Tema 3. El consumidor como demandante de bienes y servicios y como oferente de trabajo

Alcance

En el presente capítulo, estudiaremos el comportamiento del consumidor (equilibrio), como asignará su renta entre los diferentes bienes y servicios, obteniendo la mayor satisfacción posible. Veremos cómo las curvas de demanda son derivadas de dicho equilibrio. Usaremos conceptos tales como restricción presupuestaria, funciones de utilidad, curvas de indiferencia, etc.. Concluiremos estudiando cómo los cambios en las cantidades demandadas vienen originadas por distintos efectos (renta y sustitución).

Tema 3. Problemas resueltos

1.- Sea la función de utilidad $U(x,y)=x^{1/3}y^{2/3}$, compruebe que sus curvas de nivel cumplen las siguientes propiedades:

a) Pendiente negativa
b) Convexidad
c) No se pueden cortar.

Solución:

a) Antes de empezar, repasaremos brevemente el concepto de curva de indiferencia. Recuérdese que esta no es más que la representación de la función de utilidad para un determinado valor. Es decir, cada curva está formada por combinaciones de bienes *x* e *y* que proporcionan al consumidor el mismo nivel de utilidad.

Comprobar si tienen pendiente negativa es algo bastante sencillo, simplemente calcularemos la pendiente haciendo uso de la derivada y contrastaremos que dicho resultado es negativo. Recordemos que para derivar una aplicación lineal de R^2 a R (como es el caso de la función de utilidad), diferenciamos totalmente la función:

$$dU_0=\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy$$

Sabiendo que $dU_0=0$ dado que U_0 no es más que un determinado valor de la función de utilidad, y operando, se obtiene la pendiente de la curva de indiferencia:

$$0=\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy\rightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}}=-\frac{UMa_x}{UMa_y}$$

Solo nos queda calcular las utilidades marginales de cada bien:

$$UMa_x=\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}=\frac{1}{3}x^{-2/3}y^{1/3}$$
$$UMa_y=\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\frac{2}{3}x^{1/3}y^{-1/3}$$

Y sustituyendo en la pendiente de la curva de indiferencia:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{UMa_x}{UMa_y}=-\frac{\frac{1}{3}x^{-2/3}y^{1/3}}{\frac{2}{3}x^{1/3}y^{-1/3}}=-\frac{y}{2x}$$

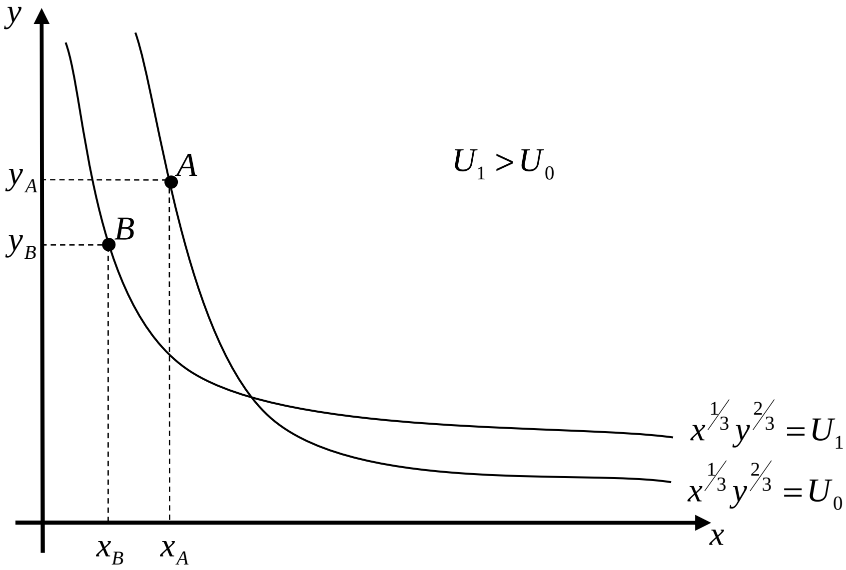
Dado que las cantidades de *x* e *y* siempre serán positivas, la pendiente de la curva de indiferencia siempre será negativa.

b) Para comprobar si la curva de indiferencia es cóncava o convexa debemos de calcular la segunda derivada de la función, si esta es negativa, la curva de indiferencia será convexa y cóncava en el caso contrario.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{d\left(-\frac{y}{2x}\right)}{dx}=\frac{y}{2x^2}$$

Por tanto, la segunda derivada es positiva, por lo que las curvas de indiferencias son convexas.

c) Para dar solución a este apartado, optaremos por realizar justamente lo contrario, es decir, vamos a suponer que si se pueden cortar. En el siguiente dibujo, mostramos este hecho.



Observamos que tenemos dos curvas de indiferencia, cada una con un distinto nivel de utilidad (si tuvieran el mismo nivel de utilidad, serían la misma). Por otro lado, hemos representado dos puntos (uno en cada curva). Sin fijarnos en nada más, claramente el punto *A* es preferido al *B*, sin embargo, el punto *A* está sobre la curva de indiferencia con un nivel de utilidad de U_o y el punto *B* sobre la curva de indiferencia con un nivel de utilidad U_1. Según el orden de preferencias establecido, el nivel de utilidad U_1 es preferido a U_0 (cualquier punto de la curva U_1 siempre será preferido a cualquier punto de la curva U_0) es decir, centrándonos en nuestros puntos, *B* siempre debería de ser preferido a *A*, no obstante se observa que ambos puntos no cumplen esta hipótesis por lo que queda demostrado que las curvas no se pueden cortar.

2.- Un individuo tiene unas preferencias representadas por la siguiente función de producción $U(x,y)=x^2y$. Sabiendo que el precio del bien x asciende a 5, y asciende a 10 y que la renta que posee alcanza las 600 unidades monetarias. Se pide:

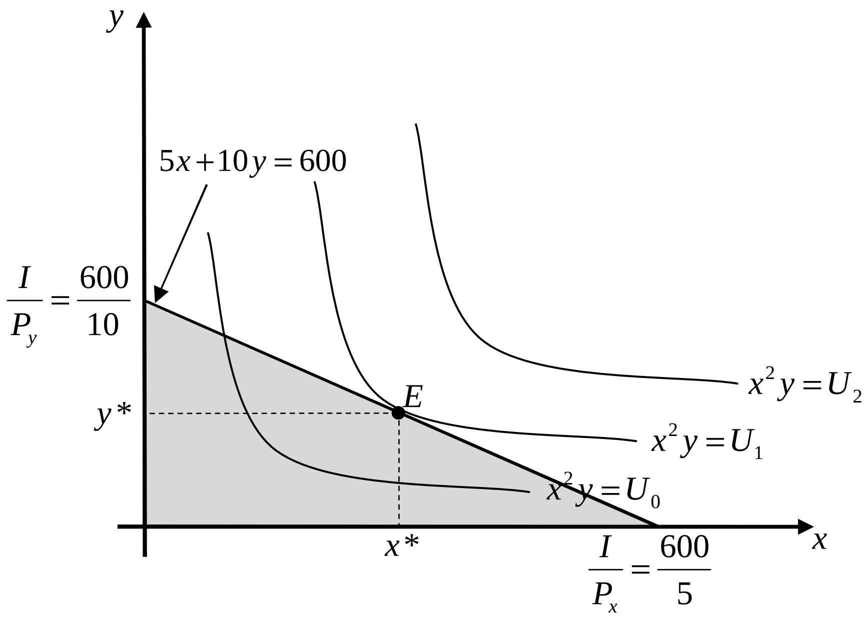
- **a) La cantidad que demandará el individuo de cada bien.**
- **b) La función de demanda ordinaria de ambos bienes.**
- **c) La utilidad máxima que alcanzará el individuo.**
- **d) Resuelva el problema de minimización de gasto utilizando los datos aportados en el apartado a.**
- **e) Calcule la curva de demanda compensada o curva demanda de *Hicks*.**

Solución:

a) Este apartado se nos pide resolver el problema de maximización de utilidad, por tanto, en primer lugar, mostraremos dicho problema de forma general y a continuación con los datos del ejercicio:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\, U(x,y) \\ s.a.\ P_x x + P_y y \leq I \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\ x^2 y \\ s.a.\ 5x + 10y \leq 600 \end{array}\right\}$$

Donde $U(x,y)$ es la función objetivo del problema y $P_x x + P_y y \leq I$ es la restricción del problema. La función objetivo es representada por las curvas de indiferencia, que no es más que dar distintos valores a la función de utilidad, en este caso U_0, U_1 y U_2. A continuación representaremos dicho problema, y calcularemos gráficamente el punto de equilibrio:



Como se observa, el problema trata de obtener la mayor utilidad (curva de indiferencia más alejada del origen) dado una restricción presupuestaria (que acota las posibles soluciones del problema, que se representa por el área sombreada). Así, el punto de equilibrio *E*, determina tanto la cantidad demandada de cada bien (x^*, y^*) que hace máxima la utilidad, como dicho nivel de utilidad alcanzado (U_1).

A continuación vamos a solucionar analíticamente el problema de maximización de utilidad. Esta solución analítica puede realizarse de diversas formas:

Igualación de pendientes

Como observamos en la solución gráfica, la solución del problema se alcanza en el punto *E*. Este punto, es una solución de tangencia, es el punto donde la restricción presupuestaria es tangente a la curva de indiferencia, o, el punto donde la pendiente de la restricción es igual a la pendiente de la curva de indiferencia. Por tanto, en primer lugar ha de verificarse que:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{curva\,de\,indiferencia} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{restricción}$$

Como ya sabemos, para obtener la pendiente, solo debemos de calcular las derivadas de cada función. Comenzaremos por la restricción:

$$5x+10y=600 \rightarrow y=\frac{600-5x}{10}=60-\frac{1}{2}x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{restricción}=-\frac{1}{2}$$

A continuación vamos a calcular la pendiente de la curva de indiferencia. Sin embargo, vamos a ver que el cálculo de la derivada no va a ser tan rápido como en el caso de la restricción. Como vemos, la curva de indiferencia es la función objetivo para un determinado valor, por tanto:

$$x^2 y=U*$$

Donde *U** denota un determinado valor para la función objetivo (recordemos, una vez más, que las curvas de indiferencia es la función objetivo para distintos valores), por tanto a continuación diferenciamos dicha función:

$$dU*=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy$$

Y dado que *U** es un número y el diferencial de un número es igual a cero, por tanto:

$$0=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}$$

Ya solo nos queda calcular la derivada:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=2xy;\ \frac{\partial U}{\partial y}=x^2$$

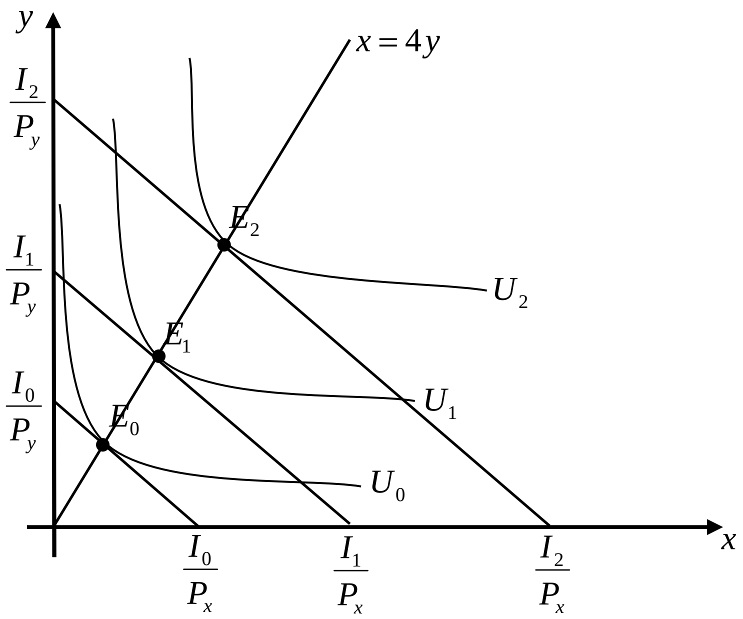
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{curva\ de\ indiferencia}=-\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}=-\frac{2xy}{x^2}=-\frac{2y}{x}$$

Igualando las pendientes:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{curva\ de\ indiferencia}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{restricción}$$

$$-\frac{2y}{x}=-\frac{1}{2}\rightarrow x=4y$$

Llegados a este punto, al lector le parecerá un tanto extraño que no hallamos obtenido ninguna cantidad y si una ecuación. El motivo de esta situación, radica en que la igualación de pendientes no es más que una condición necesaria, pero no suficiente. Antes de exponer el porqué de esta situación nos ayudaremos del gráfico siguiente para explicarlo:



Fijémonos, que todos los puntos de equilibrio (E_0, E_1 y E_2) son soluciones de tangencia. Por tanto, la solución de tangencia es una condición necesaria pero no suficiente. Por lo que necesitaremos “algo” que nos permita discriminar entre los distintos puntos de equilibrio. Vamos a ver que no es complicado, si por ejemplo, la renta del individuo fuera I_1, el punto de equilibrio sería E_1, si fuera I_0, sería E_0. Por tanto, ese “algo” no es más que la restricción presupuestaria. Así, dado que al igualar las pendientes obtenemos una ecuación con dos incógnitas, necesitaremos pues, otra ecuación (recordemos que necesitamos siempre tantas ecuaciones como número de incógnitas), siendo esa ecuación adicional la restricción presupuestaria. Por tanto, para dar solución al problema, tendremos que resolver el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{curva\ de\ indiferencia} = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{restricción} \\ P_x x + P_y y = I \end{array}\right\}$$

Haciendo uso de los datos de nuestro ejercicio y los resultados obtenidos previamente:

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{2y}{x} = -\dfrac{1}{2} \\ 5x + 10y = 600 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 4y \\ 5x + 10y = 600 \end{array}\right\} 5(4y) + 10y = 600$$

$$20y + 10y = 600 \rightarrow 30y = 600 \rightarrow y = 20, x = 80$$

Por tanto, el consumidor maximizará su utilidad cuando demande 80 unidades de bien *x* y 20 unidades de bien *y*.

Utilización de la función de Lagrange

Recordemos que el uso del lagrangiano, hace la resolución de problemas con restricciones (en igualdad) bastante sencilla. Como ya vimos en el tema inicial, el lagrangiano no es más que añadir la restricción (multiplicada por λ) en la función objetivo, creando una “nueva función objetivo" ya sin restricciones. Como sabemos, para maximizar o minimizar una función simplemente debemos de calcular su primera derivada e igualarla a cero. Por lo que el problema inicial al construir el lagrangiano quedaría como:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\; x^2 y \\ s.a.\; 5x+10y \leq 600 \end{array}\right\} \rightarrow \underset{x,y}{Max}\; l(x,y,\lambda) = x^2 y - \lambda(5x+10y-600)$$

Así, ya solo queda calcular las condiciones de primer orden (primeras derivadas del lagrangiano):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial x} = 2xy - 5\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial y} = x^2 - 10\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = -(5x+10y-600) = 0 \end{array}\right\} \text{despejando las } \lambda \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{2xy}{5} \\ \lambda = -\dfrac{x^2}{10} \\ 5x+10y = 600 \end{array}\right.$$

Igualando las λ de las dos primeras ecuaciones

$$-\frac{2xy}{5} = -\frac{x^2}{10} \Rightarrow 20xy = 5x^2 \Rightarrow 4y = x$$

Y sustituyendo el resultado en la tercera ecuación:

$$5x+10y = 600 \xrightarrow{x=4y} 5(4y)+10y = 600 \rightarrow 30y = 600 \rightarrow y = 20$$
$$x = 4(20) = 80$$

Por tanto, la solución de equilibrio se alcanza en el punto (80,20). Por supuesto, el resultado obtenido es idéntico al anterior.

Ley de igualdad de las utilidades marginales ponderadas

Finalmente podemos resolver el ejercicio a través del razonamiento económico. Ya sabemos que el objetivo del consumidor es hacer máxima su utilidad, dependiendo esta de dos bienes, *x* e *y*. Parece claro, que el consumidor elegirá su combinación de bienes sabiendo que la última unidad gastada en cada bien le va a suponer la misma satisfacción. Supongamos que esto no fuera así, y que la última unidad del bien *x* le procurara una mayor satisfacción que la última unidad consumida del bien *y*, en este caso, el consumidor decidiría reasignar su combinación de bienes, consumiendo más unidades del bien *x* (le proporciona una mayor satisfacción) y menos de *y* (ya que la satisfacción es menor). ¿Hasta cuándo reasignará?, hasta que la última unidad de cada bien le procure exactamente la misma satisfacción. Por tanto, el objetivo del consumidor será elegir una combinación de bienes *x* e *y* que le permite alcanzar la mayor utilidad posible, y que sea asequible, es decir, que su gasto no sea superior a la renta que disponga.

Profundizando más, la utilidad (o satisfacción) que me genera la última unidad de bien consumida es que lo que se llama *utilidad marginal de un bien* (la denotaremos como *UMa*). Por otro lado, recordemos que para adquirir un bien, estos tienen un precio y necesitamos una renta. Parece claro, que si dedicáramos toda nuestra renta a la adquisición de un bien, la cantidad finalmente adquirida sería simplemente el cociente entre dicha renta y el precio del bien. Por ejemplo, si nuestra renta ascendiera a 50 unidades monetarias, y el precio del bien fuera 2 unidades monetarias, la cantidad total que podríamos comprar sería 25 unidades (50/2). Supongamos ahora, que solo disponemos de una unidad monetaria, y que el precio del bien es P_x, la cantidad total que podríamos comprar de dicho bien sería, por tanto, $1/P_x$. Si relacionamos esto con el concepto de utilidad marginal descrito anteriormente tendríamos que:

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{P_x}}_{\substack{\textit{número}\\ \textit{de unidades}\\ \textit{de bien } x}} \quad \underbrace{UMa_x}_{\substack{\textit{satisfacción}\\ \textit{de la última}\\ \textit{unidad}\\ \textit{consumida}}}}_{\substack{\textit{Satisfacción originada}\\ \textit{por la última unidad}\\ \textit{monetaria gastada en}\\ \textit{el bien } x}}$$

En nuestro ejercicio tenemos dos bienes *x* e *y*, y supongamos por un momento que el consumidor se encuentra ante esta situación:

$$\frac{1}{P_x} UMa_x < \frac{1}{P_y} UMa_y$$

Como podemos deducir, al consumidor, la última unidad monetaria gastada en el bien y le reporta una mayor satisfacción que la última unidad monetaria gastada en el bien x, por tanto, el consumidor no está maximizando su utilidad (satisfacción), ya que ante este caso, decidirá reasignar su combinación de bienes, aumentado la cantidad demandada de *y* y reduciendo la cantidad demandada de *x*[1]. Pero, ¿hasta cuándo se producirá la reasignación entre bienes? La respuesta es sencilla, hasta cuando la última unidad monetaria gastada en cada bien sea la misma, en este caso, el consumidor no tendrá ningún motivo para reasignar bienes en su cesta. Por tanto, el consumidor maximizará su utilidad cuando se verifique que:

$$\frac{1}{P_x} UMa_x = \frac{1}{P_y} UMa_y$$

Esto último se denomina como la *ley de igualdad de las utilidades marginales ponderadas*, debe su nombre a que las utilidades marginales son ponderadas por la inversa de su precio.

Añadiendo a esta ecuación, la restricción presupuestaria, tendríamos una tercera forma de resolver el problema, ya que el sistema resultante estaría compuesto por dos ecuaciones (restricción presupuestaria y ley de igualdad) y dos incógnitas (*x* e *y*):

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{UMa_x}{P_x} = \dfrac{UMa_y}{P_y} \\ P_x x + P_y y = I \end{array}\right\}$$

Pero llegados a este punto, el lector podría preguntarse como calcular las utilidades marginales, sin embargo, vamos a ver que esta cuestión es bastante sencilla, esta (la *UMa*) no es más

[1] Recordemos el supuesto de que la utilidad marginal de un bien es decreciente por lo que conforme consuma más de ese bien, la utilidad de la última unidad será cada vez menor.

que la utilidad que proporciona la última unidad consumida, es decir, la pendiente de la utilidad, y como ya debemos de saber, se puede obtener mediante la derivada. Por tanto[2]:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{UMa_x}{P_x}=\dfrac{UMa_y}{P_y}\\ P_x x+P_y y=I\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\dfrac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{P_x}=\dfrac{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}}{P_y}\\ P_x x+P_y y=I\end{array}\right\}$$

Centrándonos en nuestro problema, nos queda:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{2xy}{5}=\dfrac{x^2}{10}\\ 5x+10y=600\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x=4y\\ 5x+10y=600\end{array}\right\}5(4y)+10y=600\rightarrow 30y=600\rightarrow y=\frac{60}{30}=20$$

$$x=4y\xrightarrow{y=20}x=4(20)=80$$

b) En este apartado se nos pide que obtengamos la curva de demanda ordinaria de ambos bienes. Recordemos que la función de demanda, relaciona básicamente precio y cantidad. Por lo que debemos de calcular una función que contenga ambas variables. En el apartado anterior hemos calculado la cantidad demandada cuando el precio del bien *x* ascendía a 5 unidades monetarias, siendo igual a 80 unidades. Una opción, aunque poco efectiva, sería calcular la cantidad demandada para cada precio, resulta obvio que este proceso sería infinito. No obstante, podríamos optar por no suponer ningún precio en concreto y calcular el problema como se resolvió anteriormente. Así, pasaríamos del problema anterior a uno nuevo sin fijar ningún precio en concreto.[3]

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{Max}\ x^2y\\ s.a.\ \underline{5}x+10y\le 600\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{Max}\ x^2y\\ s.a.\ \underline{P_x}x+10y\le 600\end{array}\right\}$$

Fijémonos, que el problema es igual al anterior, simplemente hemos dejado el precio sin fijar, siendo ahora dicho precio una nueva variable. Su resolución, por supuesto, es idéntica a la anterior. Vamos a solucionarlo usando la función lagrangiano. Lo calculamos pues:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{Max}\ x^2y\\ s.a.\ P_x x+10y\le 600\end{array}\right\}\rightarrow \underset{x,y}{Max}\ l(x,y,\lambda)=x^2y-\lambda(P_x x+10y-600)$$

Realizamos las condiciones de primer orden:

[2] Obsérvese como el sistema de ecuaciones resultantes coincide con el que se obtiene mediante igualación de pendientes o como resultado de igualar las dos primeras condiciones de primer orden del lagrangiano.

[3] Hemos subrayado la variable que se modifica.

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial x} &= 2xy - P_x\lambda = 0\\ \frac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial y} &= x^2 - 10\lambda = 0\\ \frac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} &= -(P_x x + 10y - 600) = 0\end{aligned}\right\}\text{ despejando las } \lambda \Rightarrow \begin{cases}\lambda = -\dfrac{2xy}{P_x}\\ \lambda = -\dfrac{x^2}{10}\\ P_x x + 10y = 600\end{cases}$$

Igualando las λ de las dos primeras ecuaciones

$$-\frac{2xy}{P_x} = -\frac{x^2}{10} \Rightarrow 20xy = P_x x^2 \Rightarrow 20y = P_x x \rightarrow y = \frac{P_x x}{20}$$

Y sustituyendo el resultado en la tercera ecuación:

$$P_x x + 10y = 600 \xrightarrow{y=\frac{P_x x}{20}} P_x x + 10\left(\frac{P_x x}{20}\right) = 600 \rightarrow P_x x + \frac{P_x x}{2} = 600 \rightarrow \frac{3P_x x}{2} = 600 \rightarrow$$

$$P_x x = 400 \rightarrow x = \frac{400}{P_x}$$

Vamos a hacer una simple comprobación para verificar si es correcta la función de demanda obtenida. Recordemos que en el apartado anterior para un precio de 5 u.m. la cantidad demandada ascendía a 80 unidades. Por tanto, utilizando la función de demanda obtenida:

$$x = \frac{400}{P_x} \xrightarrow{P_x=5} x = \frac{400}{5} = 80$$

Por lo que se comprueba que la función de demanda obtenida es correcta. Finalmente pasaremos a calcular la función de demanda del bien *y*. Se realiza exactamente igual que la del bien *x*, siendo ahora, el precio del bien *y* el que dejaremos como una variable. Así, nuestro problema de maximización quedaría como:

$$\left.\begin{aligned}&\underset{x,y}{Max}\; x^2 y\\ &s.a.\; 5x + P_y y \le 600\end{aligned}\right\}$$

Construimos el lagrangiano a maximizar:

$$\underset{x,y}{Max}\; l(x,y,\lambda) = x^2 y - \lambda\left(5x + P_y y - 600\right)$$

Y obteniendo las condiciones de primer orden:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial x} &= 2xy - 5\lambda = 0 \\
\frac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial y} &= x^2 - P_y\lambda = 0 \\
\frac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} &= -(5x + P_y y - 600) = 0
\end{aligned}\right\}$$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= -\frac{2xy}{5} \\
\lambda &= -\frac{x^2}{P_y} \\
5x + P_y y &= 600
\end{aligned}\right\} \rightarrow -\frac{2xy}{5} = -\frac{x^2}{P_y} \rightarrow x = \frac{2P_y y}{5}$$

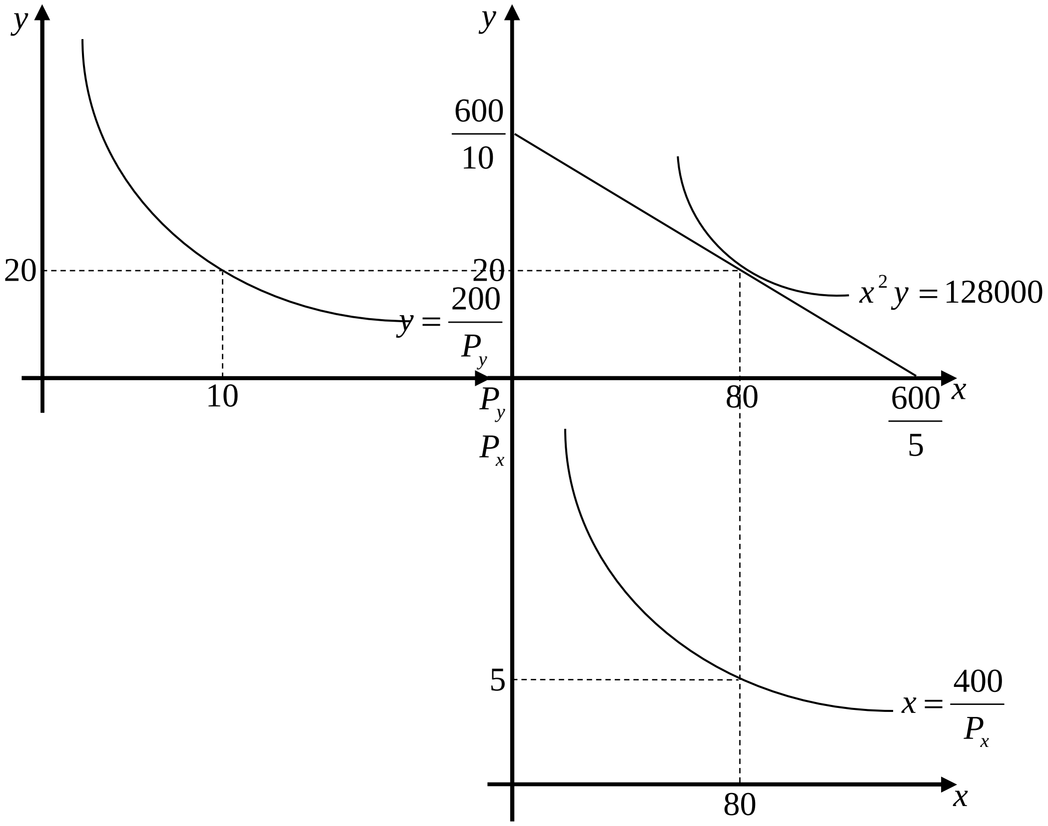
Y sustituyendo el resultado en la tercera ecuación:

$$5x + P_y y = 600 \xrightarrow{x=\frac{2P_y y}{5}} 5\left(\frac{2P_y y}{5}\right)x + P_y y = 600 \rightarrow 3P_y y = 600 \rightarrow y = \frac{200}{P_y}$$

Y ya hemos calculado la función de demanda del bien y. Repitiendo la comprobación en relación al ejercicio anterior:

$$y = \frac{200}{P_y} \xrightarrow{P_x=10} y = \frac{200}{10} = 20$$

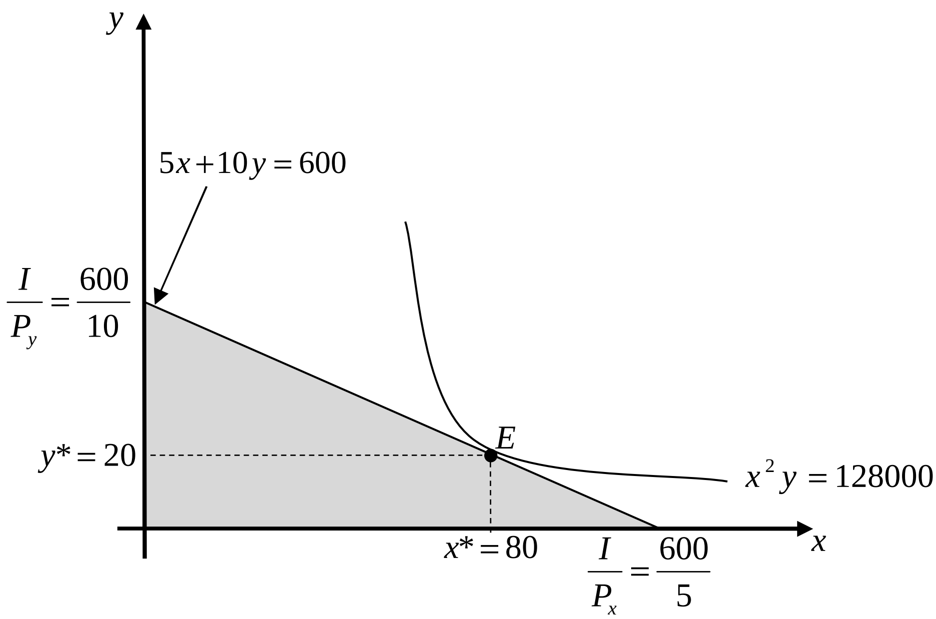
Veamos gráficamente un resumen de los apartados anteriores:



c) Para calcular la utilidad máxima, simplemente debemos de calcular el valor de la función objetivo cuando esta se hace máxima. Recordemos que esto ocurría cuando la cantidad demandada del bien *x* ascendía a 80 y la del bien *y* a 20. Sustituyendo pues estas cantidades en la función nos queda:

$$U(x, y) = U(80{,}20) = (80)^2 (20) = 128000$$

Por tanto, la utilidad máxima alcanzada es de 128000. En el gráfico siguiente, tenemos un resumen del problema del consumidor que hemos hecho en los distintos apartados.



d) El problema de minimización de gasto, básicamente consiste en cambiar la función objetivo y la restricción.

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\ x^2 y \\ s.a.\ 5x+10y \leq 600 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{\min}\ 5x+10y \\ s.a.\ x^2 y \geq U_0 \end{array}\right\}$$

Recordemos que el problema de maximización, busca maximizar la utilidad dada una determinada renta y precios (restricción presupuestaria), mientras que el problema de minimización de gasto, busca, dada una determinada utilidad y precios, cual es la renta mínima para alcanzarla. Así, en el problema de maximización sabiendo que disponemos de 600 u.m. y los precios de cada bien son 5 y 10 u.m, la utilidad máxima que alcanzaremos asciende a 128000. Por otro lado, en el problema de minimización, nos preguntamos cual será la renta mínima necesaria para una utilidad de U_0 sabiendo que los precios de cada bien ascienden a 5 y 10 u.m. respectivamente.

Si nos fijamos, en el problema de minimización tenemos tres incógnitas (x,y,U_0), por lo que, a priori, no podríamos realizar el problema. Sin embargo, realmente esto no es así, ya que U_0 es algo que si sabemos del problema de maximización y es igual a 128000. Por tanto, el problema quedaría así:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{\min}\ 5x+10y \\ s.a.\ x^2 y \geq 128000 \end{array}\right\}$$

Ya solo nos queda solucionar el problema y para ello, usaremos el método del lagrange. Aunque antes de hacerlo, deberíamos de recapacitar acerca del resultado que obtendremos. Claramente este será idéntico al del problema de maximización ya que este no es más que el problema primal, siendo el de minimización el problema dual. No obstante, como ya hemos indicado pasaremos a dar solución al problema calculando el lagrangiano.

$$\underset{x,y}{\min}\ l(x,y,\lambda) = 5x+10y-\lambda\left(x^2 y-128000\right)$$

Calculamos las condiciones de primer orden:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial x} = 5-\lambda 2xy = 0 \\ \dfrac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial y} = 10-\lambda x^2 = 0 \\ \dfrac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = -(x^2 y-128000) = 0 \end{array}\right\}$$

Despejando las λ y sustituyendo en la tercera ecuación del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda=-\dfrac{5}{2xy} \\ \lambda=-\dfrac{10}{x^2} \\ x^2y=128000 \end{array}\right\} \rightarrow -\frac{5}{2xy}=-\frac{10}{x^2} \rightarrow x=4y$$

$$(4y)^2y=128000 \rightarrow 16y^3=128000 \rightarrow y^3=\frac{128000}{16}=8000 \rightarrow y=\sqrt[3]{8000}=20$$

$$x=4y \xrightarrow{y=20} x=4(20)=80$$

Se confirman los resultados del problema de maximización, comprobándose que las cantidades de equilibrio son iguales.

e) La curva de demanda de *Hicks*, o también llamada la curva de demanda de utilidad constante, se calcula resolviendo el problema de minimización de gasto dejando el precio del bien *x* variable. Recordemos que una curva de demanda relaciona básicamente precio y cantidad, así mientras que la curva de demanda ordinaria, relaciona las combinaciones de precio y cantidad donde el consumidor hace máxima su utilidad dado una renta, la curva de demanda de *Hicks* muestra las combinaciones de precio y cantidad manteniendo la utilidad constante (problema de minimización de gasto). Por tanto, utilizando el problema del apartado *d*, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{x,y} 5x+10y \\ s.a.\ x^2y \geq 128000 \end{array}\right\}$$

Pero como queremos calcular la curva de demanda, el precio no puede fijarse, por lo que:

$$\left.\begin{array}{l} \min\limits_{x,y} P_x x+10y \\ s.a.\ x^2y \geq 128000 \end{array}\right\}$$

Su resolución es análoga a la de los apartados anteriores. Calculando en primer lugar el lagrangiano, luego las condiciones de primer orden, y finalmente dando solución al sistema de ecuaciones obtenidas de dichas condiciones. Por tanto:

$$\min_{x,y} l(x,y,\lambda)=P_x x+10y-\lambda\left(x^2y-128000\right)$$

Calculamos las condiciones de primer orden y las igualamos a 0:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial x}=P_x-\lambda 2xy=0 \\ \dfrac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial y}=10-\lambda x^2=0 \\ \dfrac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial\lambda}=-(x^2y-128000)=0 \end{array}\right\}$$

Despejando las λ y sustituyendo en la tercera ecuación del sistema:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda = -\dfrac{P_x}{2xy} \\ \lambda = -\dfrac{10}{x^2} \\ x^2 y = 128000\end{array}\right\} \rightarrow -\frac{P_x}{2xy} = -\frac{10}{x^2} \rightarrow y = \frac{P_x x}{20}$$

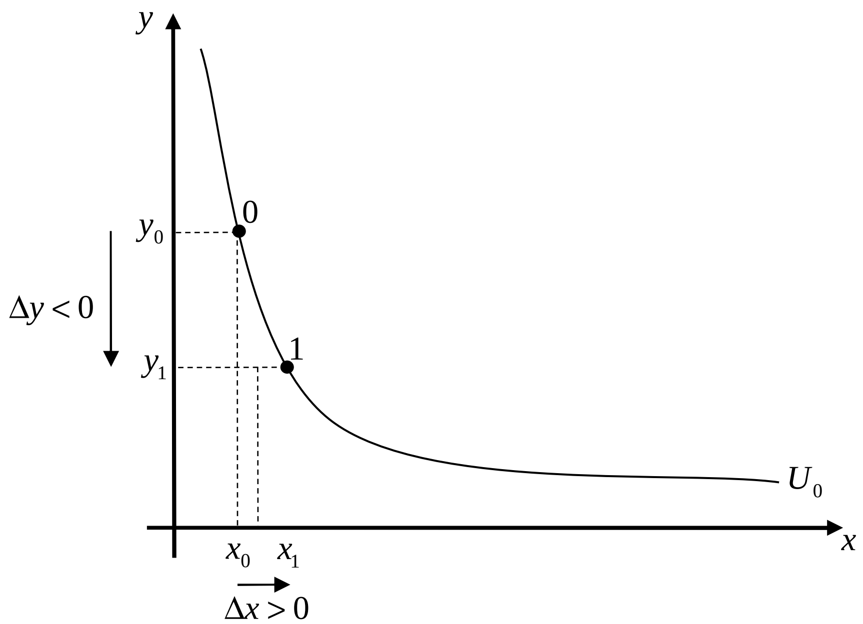
$$x^2\left(\frac{P_x x}{20}\right) = 128000 \rightarrow P_x x^3 = 2560000 \rightarrow x^3 = \frac{2560000}{P_x} \rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{25600000}{P_x}}$$

3.- Una empresa consultora de mercado, ha podido conseguir determinar las preferencias de un grupo de individuos respecto a la mantequilla –*x*- y la margarina –*y*- mediante la relación marginal de sustitución: $RMS_{y,x} = \frac{y}{x}$. Si se sabe que el precio de mercado de ambos bienes *x* e *y* ascienden a 2 y 3 unidades monetarias respectivamente y que inicialmente se dispone de 50 y 100 unidades de cada bien. Se pide:

a) Las cantidades demandadas que demandará el individuo de cada bien.
b) Las demandas netas de cada bien
c) Si el consumidor ve como se duplican su dotación inicial de bienes, así como el precio de estos, ¿Qué efectos tendrá sobre su renta monetaria y real?

Solución:

a) A priori, el problema puede parecer distinto a los ya realizados anteriormente, pero, si nos fijamos bien, este es un problema de maximización de utilidad, y veremos que la única diferencia es el modo de presentarnos los datos. Hasta ahora, la información acerca de las preferencias del consumidor era mostrada a través de una función de utilidad, ahora, en cambio, es mostrada mediante la relación marginal de sustitución (*RMS*) entre dos bienes *x* e *y*. Recordemos que ésta, básicamente, no es más que la tasa de sacrificio entre dos bienes. O dicho de otra forma, el número de unidades de bien *y* a las que hay que renunciar a cambio de una unidad adicional de bien *x* manteniendo el mismo nivel de satisfacción – es decir, permaneciendo en la misma curva de indiferencia-.



Como vemos, al pasar del punto *0* al *1* (permaneciendo en la curva de indiferencia U_0), se ha sacrificado unidades del bien *y* para obtener unidades adicionales del bien *x*. Así, la *RMS* debe su nombre a que se relacionan dos variables (*Relación*) *x* e *y*, en términos marginales (*Marginal*) que no son más que variaciones (y por tanto, diferenciales) mientras se sustituye (*Sustitución*) un bien (*y*) por otro (*x*). Por tanto:

$$RMS_{y,x} = -\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{U_0}$$

Debemos de señalar, en primer lugar el porqué del signo negativo, que viene motivado simplemente para “garantizar” que el resultado sea positivo (recordemos que el cociente entre los incrementos de ambas variables es siempre negativo). En segundo lugar, vemos que la *RMS* no es más que la pendiente de la curva de indiferencia cambiada de signo.

Por otro lado, también podemos estar interesados en calcular la relación marginal de sustitución de *x* por *y*, que nos daría el número de unidades de bien *x* que hay que renunciar a cambio de una unidad adicional de *y*, a lo largo de la curva de indiferencia que vendría dada por:

$$RMS_{x,y} = -\frac{\Delta x}{\Delta y} = -\left.\frac{dx}{dy}\right|_{U_0} = -\left(-\frac{UMa_y}{UMa_x}\right) = \frac{UMa_y}{UMa_x}$$

Por tanto, el problema que debemos de resolver es bastante sencillo, ya que recordemos que para solucionar el problema de maximización de utilidad, si optábamos por la igualación de pendientes, teníamos un sistema de dos ecuaciones como el que se muestra a continuación:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{curva\,de\,indiferencia} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{restricción} \\ P_x x + P_y y = I \end{array}\right\}$$

Ya solo nos quedaría sustituir los datos que nos proporciona el enunciado en el sistema mostrado. Así, recordando que la *RMS* no era más que la pendiente de la curva de indiferencia, por tanto, con una sencilla operación:

$$RMS_{y,x} = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{curva\,de\,indiferencia} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{curva\,de\,indiferencia} = -RMS_{y,x} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{curva\,de\,indiferencia} = -\frac{y}{x}$$

Sabiendo que la pendiente de la restricción es el cociente de precios cambiado de signo:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{restricción} = -\frac{P_x}{P_y} \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{restricción} = -\frac{2}{3}$$

Sustituyendo lo obtenido en el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{curva\,de\,indiferencia}=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{restricción}\\ P_x x+P_y y=I\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{2}{3}\\ 2x+3y=I\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}y=\dfrac{2}{3}x\\ 2x+3y=I\end{array}\right\}2x+3\left(\dfrac{2}{3}x\right)=I\rightarrow$$

$$4x=I\rightarrow x=\frac{I}{4}\rightarrow y=\frac{2}{3}\left(\frac{I}{4}\right)\rightarrow y=\frac{2I}{12}=\frac{I}{6}$$

Llegados a este punto, vemos que no podemos calcular las cantidades demandadas ya que no se dispone de la renta –*I*-. Sin embargo ¿realmente no disponemos de la renta? El lector, releyendo el enunciado comprobará, que en este se nos indica que el consumidor dispone de 50 y 100 unidades de cada bien. A priori, parece que este dato no tiene nada que ver con la renta, pero si nos fijamos, y sabiendo que los precios de ambos bienes ascienden a 2 y 3 unidades monetarias respectivamente, es fácil calcular la renta de la que dispone el consumidor. Así, si este posee 50 unidades de bien *x* (representado por $\bar{x}$), siendo el precio de este de 2 unidades monetarias, y de 100 unidades de bien *y*, (representado por $\bar{y}$), con un precio de 3 unidades monetarias, su renta será de 500 unidades monetarias.

$$I=P_x\bar{x}+P_y\bar{y}=2(50)+3(100)=500$$

Debemos fijarnos que estas dotaciones iniciales no son necesariamente las cantidades demandadas finales por el consumidor, simplemente, son las que posee inicialmente, mediante las cuales puede intercambiar para poder adquirir otras. El consumidor puede estar interesado más en un determinado bien, y mediante el intercambio adquirir más de ese bien sacrificando parte del otro bien.

Por tanto, una vez ya hemos calculado la renta, solo nos queda sustituirla en el sistema anterior y nos queda:

$$x^*=\frac{I}{4}\xrightarrow{I=500}x=\frac{500}{4}=125$$

$$y^*=\frac{I}{6}\xrightarrow{I=500}y=\frac{500}{6}=83,\widehat{3}$$

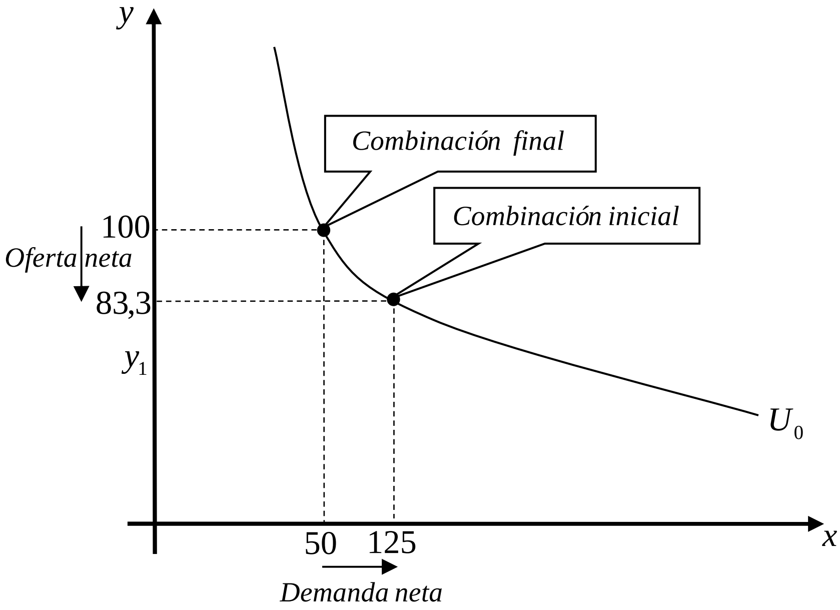
Como ya habíamos advertido, la combinación de bienes demandada no coincide con la inicial. Así el consumidor ha optado por sacrificar $16,\widehat{6}$ unidades de bien *y* $\left(83,\widehat{3}-100\right)$ para obtener *75* unidades de bien *x* adicionales (*125-50*).

b) Sin querer, acabamos de dar solución al segundo apartado del problema, que nos pedía las demandas netas de ambos bienes, estas (que denotaremos como *x* e *y*) no son más que la diferencia entre las cantidades demandadas finales y los valores de las dotaciones iniciales y que son respectivamente:

$$\hat{x}=x^*-\bar{x}=125-50=75$$

$$\hat{y}=y^*-\bar{y}=83,\widehat{3}-100=-16,\widehat{6}$$

Por tanto, existe una demanda neta positiva del bien *x* y una demanda neta negativa (oferta) del bien *y*. Veamos en el siguiente gráfico lo obtenido hasta ahora:



Si el consumidor no tuviera la posibilidad de intercambiar bienes, debería de conformarse con la combinación inicial de bienes, es por ello, que también podemos definir este punto como el punto de autarquía. Antes de pasar al siguiente apartado, podríamos calcular las funciones de demanda de ambos bienes con el fin de compararlas con respecto a las funciones de demanda netas. Como ya sabemos, la función de demanda relaciona precio y cantidad, por tanto, para calcular las funciones de cada bien, debemos de dejar el precio de cada bien variable para cada caso. Así, usando el sistema de ecuaciones utilizado inicialmente:

Curva de demanda del bien *x*

$$\left.\begin{array}{l} \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\textit{curva de indiferencia}} = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\textit{restricción}} \\ P_x x + P_y y = I \end{array}\right\}$$

Curva de demanda del bien *y*

$$\left.\begin{array}{l} \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\textit{curva de indiferencia}} = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{\textit{restricción}} \\ P_x x + P_y y = I \end{array}\right\}$$

Sustituyendo por los valores de nuestro ejercicio:

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{y}{x} = -\dfrac{P_x}{3} \\ P_x x + 3y = 500 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{y}{x} = -\dfrac{2}{P_y} \\ 2x + P_y y = 500 \end{array}\right\}$$

Y, resolviendo el sistema de ecuaciones resultante:

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{P_x}{3}\\ P_x x+3y=500\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}y=\dfrac{P_x x}{3}\\ P_x x+3y=500\end{array}\right\}$$

$$P_x x+3\left(\frac{P_x x}{3}\right)=500\rightarrow 2P_x x=500\rightarrow$$

$$x=\frac{500}{2P_x}\rightarrow x=\frac{250}{P_x}$$

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{y}{x}=-\dfrac{2}{P_y}\\ 2x+P_y y=500\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x=\dfrac{P_y y}{2}\\ 2x+P_y y=500\end{array}\right\}$$

$$2\left(\frac{P_y y}{2}\right)+P_y y=500\rightarrow 2P_y y=500\rightarrow$$

$$y=\frac{500}{2P_y}\rightarrow y=\frac{250}{P_y}$$

Por tanto las curvas de demanda para cada bien son:

$$x=\frac{250}{P_x};\ y=\frac{250}{P_y}$$

Ya solo nos quedaría obtener las curvas de demanda neta de cada bien. Estas se obtienen tan sólo de restar a cada función de demanda ordinaria el valor de su dotación inicial. Por tanto:

$$\hat{x}=x-\bar{x}=\frac{250}{P_x}-50$$

$$\hat{y}=y-\bar{y}=\frac{250}{P_y}-100$$

Finalmente, el lector se podría preguntar si la combinación inicial de bienes podría ser alguna vez la combinación final demandada. En ese caso, por tanto, las combinaciones inicial y final serían idénticas por lo que la demanda neta de ambos bienes sería igual a 0. Entonces:

$$\hat{x}=x-\bar{x}\rightarrow 0=\frac{250}{P_x}-50\rightarrow P_x=5$$

$$\hat{y}=y-\bar{y}\rightarrow 0=\frac{250}{P_y}-100\rightarrow P_y=2{,}5$$

Por tanto, para un precio de 5 y 2,5 unidades monetarias para cada bien, el consumidor demandaría exactamente la misma cantidad que la poseída inicialmente.

c) Recordemos que en el presente problema, no disponíamos de la renta monetaria del individuo que tuvimos que calcular gracias a las dotaciones iniciales de bienes así como de los precios. Esta era igual a 500 unidades monetarias.

$$I=P_x\bar{x}+P_y\bar{y}=2(50)+3(100)=500$$

Como podemos observar, las cantidades iniciales de bienes eran 50 y 100 unidades de bien *x* e *y* respectivamente, siendo los precios de cada bien 2 y 3 unidades monetarias. Si en el problema se nos indica que tanto las cantidades como los precios se han duplicado, entonces, la nueva renta sería:

$$I'=P_x'\bar{x}'+P_y'y=4(100)+6(200)=1600$$

Por tanto, parece claro, que la renta monetaria si ha sufrido variaciones. Pero ¿y la renta real? Recordemos que esta renta real, no es más que la restricción presupuestaria, o dicho de otro modo, el conjunto factible de posibles combinaciones de ambos bienes dados los precios y la renta. La restricción presupuestaria inicial, si recordamos, era:

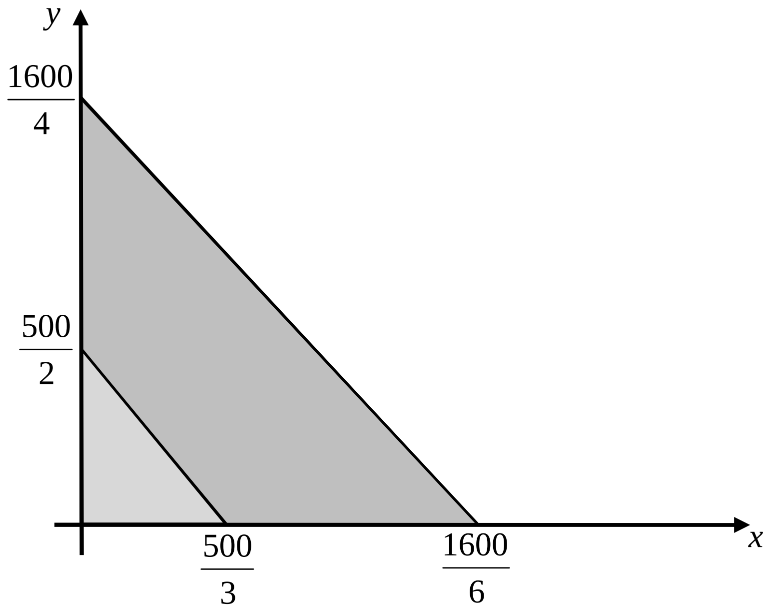
$$I = P_x x + P_y y \rightarrow 500 = 2x + 3y$$

Y la nueva restricción presupuestaria con la nueva renta y precios es:

$$I' = P_x' x + P_y' y \rightarrow 1600 = 4x + 6y$$

Parece claro, que la restricción presupuestaria es distinta, sin embargo, para verlo de forma más nítida, nos apoyaremos en el gráfico siguiente (donde representaremos ambas restricciones presupuestarias), donde se confirmará como la renta real del consumidor también se ha visto modificada.

Fijémonos como la renta real ha variado, si antes el conjunto factible era el señalado por el área gris claro, al aumentar el precio y las dotaciones iniciales de ambos bienes, la restricción presupuestaria se ha desplazado hacia la derecha, quedando una nueva área bastante más grande señalada por el área gris más oscura (por supuesto también incluye la anterior). Por tanto, se puede concluir como tanto la renta real como la monetaria han aumentado.



Fijémonos como la renta real ha variado, si antes el conjunto factible era el señalado por el área gris claro, al aumentar el precio y las dotaciones iniciales de ambos bienes, la restricción presupuestaria se ha desplazado hacia la derecha, quedando una nueva área bastante más grande señalada por el área gris más oscura (por supuesto también incluye la anterior). Por tanto, se puede concluir como tanto la renta real como la monetaria han aumentado.

4.- Sea la siguiente función de utilidad que representa los gustos de un consumidor $U(x, y) = x^{\alpha} y^{\beta}$ **. Se pide:**

a) Las funciones de demanda ordinarias de cada bien.

b) ¿De qué tipo de bien se trata?

c) Si el precio del bien *x* ha aumentado un 5%, ¿Cuál será la variación en la cantidad demandada de dicho bien?
d) Y si la renta disminuyera un 10%, ¿Cómo se vería afectada la demanda de dicho bien?
e) Sabiendo que $\alpha=\beta=0{,}5$, el P_x=2, P_y=3 y la renta es igual a 60. ¿Cuál será la cantidad demandada?
f) Y si el P_x=4 ascendiera, ¿Cuál será el excedente del consumidor?

Solución:

a) Obtener las funciones de demanda ordinarias de ambos bienes ya no debe de ser algo complicado para el lector. Recordemos que para calcularla debemos de dejar el precio del bien variable, en este caso, dado que no se señala nada, denotaremos todo aquello que no es variable (es decir, que es constante con un superíndice). Por tanto, el problema a resolver sería el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\, U(x,y) \\ s.a.\ P_x x + P_y y \le I \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\ x^{\alpha} y^{\beta} \\ s.a.\ P_x x + P_y^0 y \le I^0 \end{array}\right\}$$

El lector debe notar que tanto el precio del bien *y* como la renta aparecen con un superíndice indicando, por tanto, que son constantes y no variables. Resolverlo, ya sabemos que es bastante sencillo, sabiendo que existen diversos métodos para su resolución, nos decidimos por hacerlo por igualación de pendientes, así:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{curva\ de\ indiferencia} = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{restricción} \\ P_x x + P_y^0 y = I^0 \end{array}\right\}$$

Sabiendo que las pendientes son iguales a:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{curva\ de\ indiferencia} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x}}{\dfrac{\partial U}{\partial y}} = -\frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}}{\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}} = -\frac{\alpha y}{\beta x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{restricción} = -\frac{P_x}{P_y^0}$$

Sustituyendo en el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{\alpha y}{\beta x} = -\dfrac{P_x}{P_y^0} \\ P_x x + P_y^0 y = I^0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = \dfrac{\beta P_x x}{\alpha P_y^0} \\ P_x x + P_y^0 y = I^0 \end{array}\right\} P_x x + P_y^0\left(\frac{\beta P_x x}{\alpha P_y^0}\right) = I^0 \rightarrow P_x x + \frac{\beta P_x x}{\alpha} = I^0 \rightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha}\right) P_x x = I^0 \rightarrow x = \frac{I^0}{\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha}\right) P_x} \rightarrow x = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{I^0}{P_x}$$

Por tanto, ya hemos calculado la curva de demanda del bien *x*. Calcular la curva de demanda del bien *y* también resulta muy sencillo, utilizando el mismo sistema que anteriormente pero dejando ahora, el precio del bien *y* como variable y fijado el precio de *x* tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\, U(x,y) \\ s.a.\; P_x x + P_y y \le I \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\; x^{\alpha} y^{\beta} \\ s.a.\; P_x^0 x + P_y y \le I^0 \end{array}\right\}$$

Y resolviendo por igualación de pendientes:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{curva\ de\ indiferencia} = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{restricción} \\ P_x^0 x + P_y y = I^0 \end{array}\right\}$$

Calculando las pendientes[4]:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{curva\ de\ indiferencia} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x}}{\dfrac{\partial U}{\partial y}} = -\frac{\alpha x^{\alpha-1} y^{\beta}}{\beta x^{\alpha} y^{\beta-1}} = -\frac{\alpha y}{\beta x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{restricción} = -\frac{P_x^0}{P_y}$$

Y sustituyendo:

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{\alpha y}{\beta x} = -\dfrac{P_x^0}{P_y} \\ P_x^0 x + P_y y = I^0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{\alpha P_y y}{\beta P_x^0} \\ P_x^0 x + P_y y = I^0 \end{array}\right\} P_x^0 \left(\frac{\alpha P_y y}{\beta P_x^0}\right) + P_y y = I^0 \rightarrow \frac{\alpha P_y y}{\beta} + P_y y = I^0 \rightarrow$$

$$\left(\frac{\alpha+\beta}{\beta}\right) P_y y = I^0 \rightarrow y = \frac{I^0}{\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}\right) P_y} \rightarrow y = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{I^0}{P_y}$$

b) Recordemos que para determinar qué tipo de bien es *x* debemos de calcular su elasticidad de demanda, y en función de ella podremos establecer el tipo de bien. Así, pasamos a calcular la elasticidad de demanda, que recordemos que mide las variaciones (en términos porcentuales) en la cantidad demandada del bien *x* ante variaciones en el precio de dicho bien. Así:

---

[4] Nótese, que la pendiente de la curva de indiferencia es idéntica que en el caso anterior, ya que los precios solo afectan a la pendiente de la restricción presupuestaria.

$$\varepsilon_{demanda} = \varepsilon_{x,P_x} = \frac{Variación\ porcentual\ de\ x}{Variación\ porcentual\ de\ P_x} = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dP_x}{P_x}} = \frac{dx}{dP_x}\frac{P_x}{x} =$$

$$= \left(-\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{I^0}{P_x^2}\right)\frac{P_x}{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{I^0}{P_x}} = -1 < 0$$

Al ser la elasticidad de demanda del bien *x* negativa, dicho bien, será un bien normal o inferior. Para poder discriminar entre ambos, debemos de calcular la elasticidad renta, que, como sabemos si es positiva, el bien será normal, y si es negativa, el bien será inferior. Acordémonos que la elasticidad renta, mide las variaciones en la cantidad demandada ante variaciones en la renta de dicho bien. Por tanto:

$$\varepsilon_{x,I} = \frac{Variación\ porcentual\ de\ x}{Variación\ porcentual\ de\ I} = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dI}{I}} = \frac{dx}{dI}\frac{I}{x} =$$

$$= \left(\frac{\alpha}{(\alpha+\beta)P_x}\right)\frac{I}{\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{I}{P_x}} = 1 > 0$$

Al ser la elasticidad renta positiva, el bien *x* es un bien normal.

c) Este apartado es muy sencillo de resolver, al haber ya calculado la elasticidad de demanda del bien *x*. Aquí, se nos pide calcular la variación sufrida en la cantidad del bien *x*, ante un aumento del precio de dicho bien en un 5%. Al hablar en términos porcentuales, tenemos una clara pista de que debemos de utilizar la elasticidad de demanda, ya que esta es la que relaciona variaciones en dichos términos. Así:

$$\varepsilon_{demanda} = \varepsilon_{x,P_x} = \frac{Variación\ porcentual\ de\ x}{Variación\ porcentual\ de\ P_x} = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dP_x}{P_x}} = -1$$

Sabiendo que el precio se ha incrementado en un 5%, solo nos queda sustituir:

$$\varepsilon_{demanda} = \varepsilon_{x,P_x} = \frac{Variación\ porcentual\ de\ x}{Variación\ porcentual\ de\ P_x} = \frac{\frac{dx}{x}}{+5\%} = -1$$

$$\frac{\frac{dx}{x}}{+5\%} = -1 \rightarrow \frac{dx}{x} = -5\%$$

Es decir, al aumentar un 5% el precio, la cantidad demandada disminuirá un 5%.

d) Al igual que el anterior apartado, el hablar en términos porcentuales nos indica que debemos de utilizar la elasticidad, en este caso concreto, al indicarnos que la renta ha disminuido un 10%, debemos de hacer uso de la elasticidad renta, y por tanto:

$$\varepsilon_{x,I} = \frac{Variación\ porcentual\ de\ x}{Variación\ porcentual\ de\ I} = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dI}{I}} = 1$$

$$\varepsilon_{x,I} = \frac{\frac{dx}{x}}{-10\%} = 1 \rightarrow \frac{dx}{x} = -10\%$$

Por tanto, al disminuir la renta en un 10%, la cantidad demandada del bien *x* verá como también disminuyen en la misma medida.

e) Resolver este apartado no es tarea difícil si hacemos uso de lo calculado anteriormente. Como nos indica el enunciado, y sustituyendo los valores en el problema de maximización de utilidad, tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\, U(x,y) \\ s.a.\ P_x x + P_y y \leq I \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\ x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \\ s.a.\ 2x + 3y \leq 60 \end{array}\right\}$$

En una primera impresión, podríamos decidirnos a dar solución a dicho problema por cualquiera de los métodos que ya sabemos (lagrangiano, igualación de pendientes o utilidades marginales ponderadas). Sin embargo, centrándonos un poco, y como ya hemos advertido, podemos utilizar lo ya calculado. Así, en el apartado a, habíamos calculado las funciones de demanda de ambos bienes, por lo que podemos saltarnos el paso de resolver el problema y hacer uso de ellas.[5]

Función de demanda del bien *x*

$$x = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{I^0}{P_x}$$

Función de demanda del bien *y*

$$y = \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)\frac{I^0}{P_y}$$

Sustituyendo por los datos suministrados en el apartado

$$x = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right)\frac{60}{2} = 15$$

$$y = \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right)\frac{60}{3} = 10$$

Resumiendo, para un precio del bien *x* igual a 2, el individuo demandará 15 unidades de dicho bien *x*.

[5] A pesar de que el enunciado solo nos pide calcular la cantidad demandada del bien *x*, hemos decidido calcular las cantidades de ambos bienes, para resaltar la facilidad de su cálculo haciendo uso de las funciones de demanda.

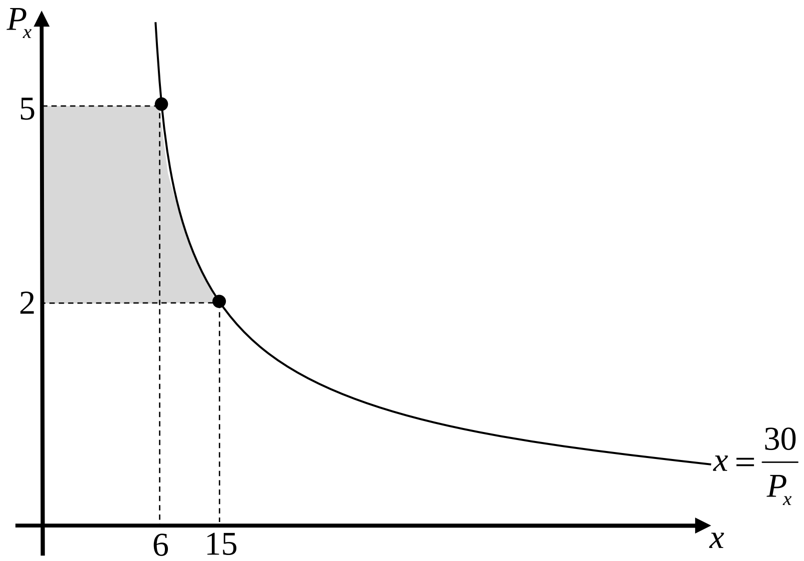
f) Al igual que el anterior apartado, vamos a calcular la cantidad demandada cuando el precio del bien *x* aumenta a 5 unidades monetarias. Así, la función de la curva de demanda es:

$$x=\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)\frac{I^0}{P_x}\rightarrow x=\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right)\frac{60}{P_x}=\frac{1}{2}\frac{60}{P_x}=\frac{30}{P_x}$$

Y como el precio asciende a 5 unidades monetarias, la cantidad demandada ascenderá a:

$$x=\frac{30}{P_x}=\frac{30}{5}=6$$

Finalmente, se pide calcular la variación del excedente del consumidor resultante de pasar de 2 a 5 unidades monetarias el precio de *x*. Antes de calcularlo, vamos a representarlo gráficamente ya que puede servirnos de apoyo para su obtención.



El área sombreada es el excedente del consumidor. Por tanto, calcular esa área es bastante fácil, para ello utilizaremos la integral definida donde los límites inferior y superior serán los precios, por tanto:

$$Excendente=\int_2^5\frac{30}{P_x}dP_x=30\int_2^5\frac{dP_x}{P_x}=30\left[\ln(P_x)\right]_2^5=30\left[\ln(5)-\ln(2)\right]=30\ln\left(\frac{5}{2}\right)=27{,}49$$

5.- La siguiente función de utilidad $U(x,y)=xy$ muestra las preferencias del consumidor hacia dos tipos de bienes *x* e *y*. Con este dato, se pide:

- **a) La función de demanda ordinaria o walrasiana del bien *x*.**
- **b) Calcule la elasticidad de demanda y la elasticidad renta de dicho bien. ¿De que tipo de bien se trata?**
- **c) Si la renta del consumidor asciende a 100 unidades monetarias, el precio del bien x a 5 unidades monetarias y el precio del bien *y* a 10 unidades monetarias ¿Cuáles serán las cantidades demandadas de equilibrio del consumidor?**

d) Calcule y obtenga el efecto total, renta y sustitución por el método de *Slutsk*y si el precio del bien *x* sube a 10 unidades monetarias permaneciendo la renta y el precio del otro bien constante. ¿Qué tipo de relación existe entre ambos bienes?

e) Obtenga ambos efectos mediante el método de *Hicks*.

f) Calcule la curva de demanda de *Slutsky* y la curva de demanda compensada o curva de demanda de *Hicks*.

g) ¿Qué aumento porcentual debe incrementarse el precio del bien x para que se produzca una variación del excedente del consumidor igual a unidades monetarias?

h) Si existieran 50 individuos igual al del problema. Obtenga las curvas de demanda de los bienes *x* e *y* para el total de esos 50 individuos.

Solución:

a) Obtener la curva de demanda del bien *x* debe de ser sumamente sencillo para el lector. Recordemos, una vez más, que la curva de demanda relaciona precio y cantidad, por lo que el resto de variables, a priori, serán fijas, por ello, en nuestro problema, estas se denotan con un superíndice. Así, el problema quedaría como:

$$\left.\begin{matrix} \underset{x,y}{Max}\, U(x,y) \\ s.a.\ P_x x + P_y^0 y \le I^0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} \underset{x,y}{Max}\ xy \\ s.a.\ P_x x + P_y^0 y \le I^0 \end{matrix}\right\}$$

En este problema, vamos a hacer uso del lagrangiano para su obtención. Por ello, calculamos el lagrangiano:

$$\underset{x,y}{Max}\ l(x,y,\lambda) = xy - \lambda\left(P_x x + P_y^0 y - I^0\right)$$

Calculamos las condiciones de primer orden:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial x} = y - P_x\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial y} = x - P_y^0\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial\lambda} = -(P_x x + P_y^0 y - I^0) = 0 \end{matrix}\right\}$$

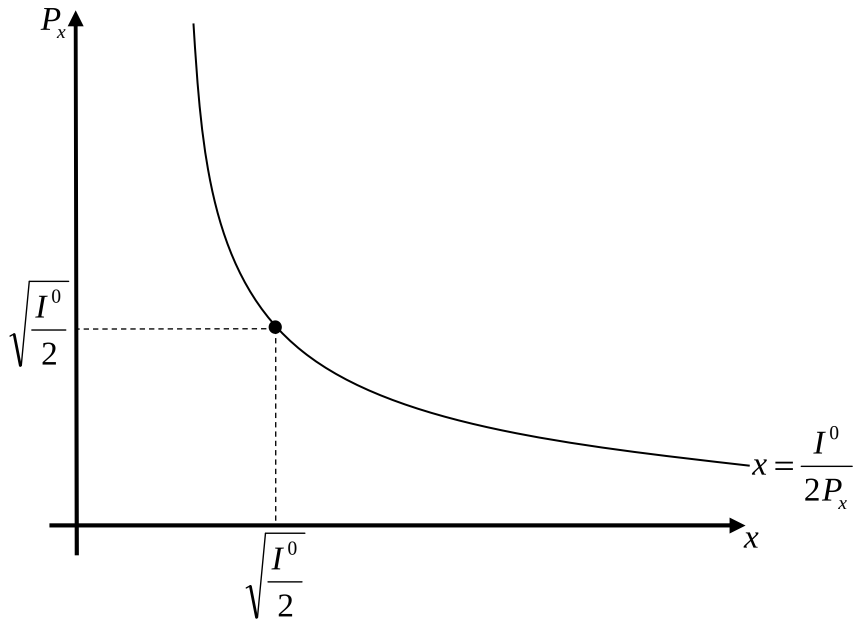
Y resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{matrix} \lambda = -\dfrac{y}{P_x} \\ \lambda = -\dfrac{x}{P_y^0} \\ P_x x + P_y^0 y = I^0 \end{matrix}\right\} \rightarrow -\frac{y}{P_x} = -\frac{x}{P_y^0} \rightarrow y = \frac{P_x x}{P_y^0}$$

Sustituyendo el resultado en la tercera ecuación:

$$P_x x + P_y^0 y = I^0 \xrightarrow{y=\frac{P_x x}{P_y^0}} P_x x + P_y^0\left(\frac{P_x x}{P_y^0}\right) = I^0 \rightarrow 2P_x x = I^0 \rightarrow x = \frac{I^0}{2P_x}$$

Por tanto, acabamos de obtener la curva de demanda del bien *x*. Se puede ver que esta curva es una hipérbola equilátera, ya que el producto de las dos variables, *x* y P_x es una constante $\left(\frac{I^0}{2}\right)$. Ya sabemos que representar una función de este tipo es muy sencillo, ya que son del tipo asintótico respecto a los ejes y además tienen pendiente negativa.



b) Antes de calcular las elasticidades, es interesante señalar algunas de las propiedades de las hipérbolas equiláteras. Recuérdese que la combinación precio-cantidad de máximo gasto se corresponde con aquel punto de la curva de demanda para el que la elasticidad de demanda vale -1. En el caso de las hipérbolas equiláteras, estas son curvas de la elasticidad constante y con valor -1 en todos sus puntos. Por ello, en estas curvas, todos los puntos son combinaciones de máximo gasto. En nuestro ejercicio, este gasto asciende a $\frac{I^0}{2}$ (cualquier combinación precio y cantidad será igual a $\frac{I^0}{2}$) . Podemos comprobarlo de manera muy sencilla. Ya que nuestro objetivo es hacer máximo el gasto, siendo este simple el precio por la cantidad, por tanto: $Max\ Gasto \rightarrow Max\ P_x x$

Para obtener el máximo simplemente diferenciamos dicho gasto y lo igualamos a 0. Por tanto:

$$dxP_x + xdP_x = 0$$

Operando:

$$dxP_x + xdP_x = 0 \rightarrow dxP_x = -xdP_x \rightarrow \underbrace{\frac{dx}{dP_x}\frac{P_x}{x}}_{\varepsilon_{demanda}} = -1 \rightarrow \varepsilon_{demanda} = -1$$

Por tanto, se confirma que en las hipérbolas equiláteras cualquier combinación es de máximo gasto, y, por tanto, con elasticidad constante y valor -1. No obstante, vamos a calcular la elasticidad de demanda, tal como nos pide el ejercicio y comprobaremos como efectivamente su valor asciende a -1.

$$\varepsilon_{demanda} = \varepsilon_{x,P_x} = \frac{Variación\ porcentual\ de\ x}{Variación\ porcentual\ de\ P_x} = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dP_x}{P_x}} = \frac{dx}{dP_x}\frac{P_x}{x} =$$

$$= \left(-\frac{I^0}{2P_x^2}\right)\frac{P_x}{\frac{I^0}{2P_x}} = -1 < 0$$

Vemos como dicha elasticidad de demanda asciende a -1, y por tanto, es negativa. Esto es sinónimo de que el bien en cuestión es un bien normal o inferior. Para poder determinar cuál de los dos es, debemos de calcular su elasticidad renta, que mide cual es la variación relativa que experimenta la cantidad demandada, ante cambios relativos en la renta, céteris paribus.

$$\varepsilon_{x,I} = \frac{Variación\ porcentual\ de\ x}{Variación\ porcentual\ de\ I} = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{dI}{I}} = \frac{dx}{dI}\frac{I}{x} = \left(\frac{1}{2P_x}\right)\frac{I}{\frac{I}{2P_x}} = 1 > 0$$

Como se observa, esta elasticidad es positiva, y por tanto, el bien *x* es un bien normal.

c) El problema que se plantea es el clásico de maximización de utilidad:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\ U(x,y) \\ s.a.\ P_x x + P_y^0 y \leq I^0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\ xy \\ s.a.\ 5x + 10y \leq 100 \end{array}\right\}$$

Para resolverlo, haremos uso de la igualación de pendientes entre la curva de indiferencia y la restricción presupuestaria.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{curva\ de\ indiferencia} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{restricción} \\ 5x + 10y = 100 \end{array}\right\}$$

Calculando las pendientes[6]:

[6] Nótese, que la pendiente de la curva de indiferencia es idéntica que en el caso anterior, ya que los precios solo afectan a la pendiente de la restricción presupuestaria.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{curva\ de\ indiferencia} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial x}}{\dfrac{\partial U}{\partial y}} = -\frac{y}{x}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{restricción} = -\frac{5}{10} = -\frac{1}{2}$$

Y sustituyendo:

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{y}{x} = -\dfrac{1}{2} \\ 5x + 10y = 100 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = 2y \\ 5x + 10y = 100 \end{array}\right\} 5(2y) + 10y = 100 \to 10y + 10y = 100 \to$$

$$20y = 100 \to y = 5$$

$$x = 2y \xrightarrow{y=5x} x = 2(5) = 10$$

Luego, las cantidades demandadas de bien *x* e *y* por el consumidor dadas sus preferencias y su restricción presupuestaría serán de 5 y 10 unidades respectivamente. Sin embargo, aunque, por supuesto, es correcto lo que acabamos de hacer, podríamos habernos ahorrado los cálculos anteriores utilizando las funciones de demanda obtenidas anteriormente.

Recordemos, que, para el bien x, esta era:

$$x = \frac{I^0}{2P_x}$$

Y sustituyendo por los datos aportados por el problema:

$$x = \frac{I^0}{2P_x} \to x = \frac{100}{2(5)} = 10$$

Para calcular la cantidad de equilibrio del bien y, solo debemos de sustituir la cantidad obtenida de *x* en la restricción presupuestaria:

$$P_x x + P_y^0 y = I^0 \to 5x + 10y = 100 \to 5(10) + 10y = 100 \to 10y = 50 \to y = 5$$

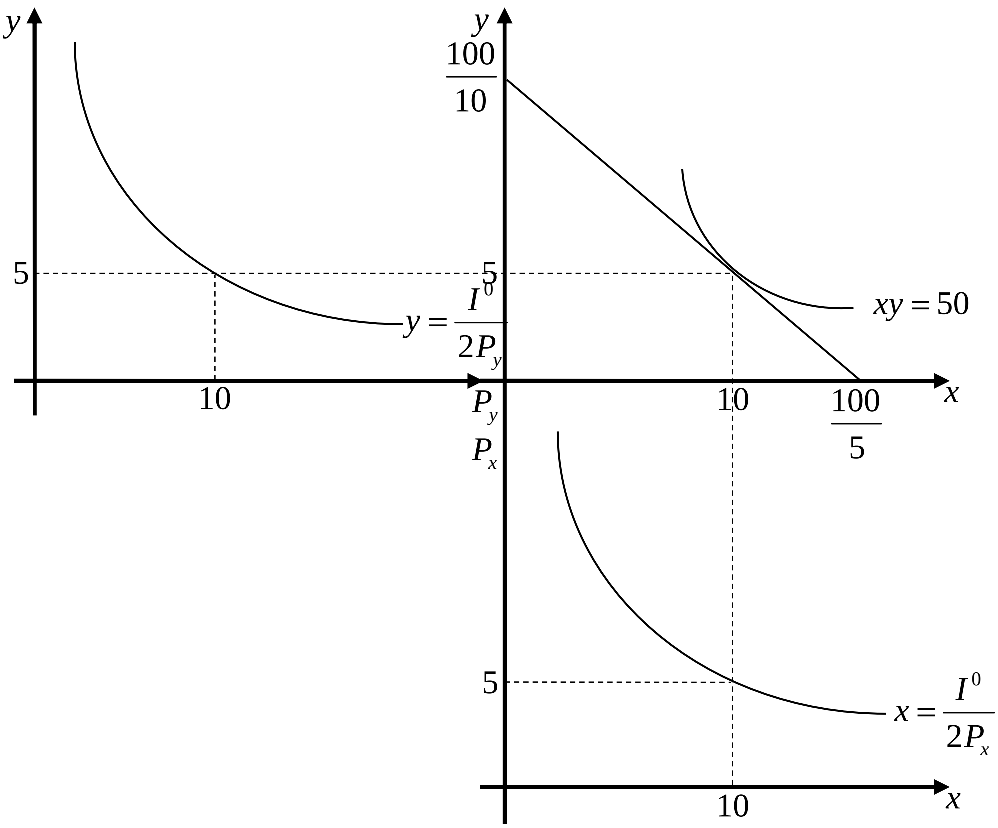
También podríamos haber optado por calcular la curva de demanda del bien *y*, bien realizando el mismo problema, pero dejando variable el precio del bien *y*, bien simplemente sustituyendo la curva de demanda del bien *x* en la restricción presupuestaria (dejando el precio del bien *y* variable).

$$P_x x + P_y y = I^0 \to P_x\left(\frac{I^0}{2P_x}\right) + P_y y = I^0 \to \frac{I^0}{2} + P_y y = I^0 \to P_y y = \frac{I^0}{2} \to y = \frac{I^0}{2P_y}$$

Si la renta asciende a 100 unidades monetarias, y el precio de y es igual a 10 u.m., entonces:

$$y = \frac{I^0}{2P_y} \xrightarrow{I^0=100, P_y=10} y = \frac{100}{2(10)} = 5$$

Parece claro, que nos habríamos ahorrado bastante tiempo si hubiéramos optado por esta segunda opción. Representemos finalmente lo obtenido:



d) Calcular la cantidad demandada del bien *x* cuando su precio ha pasado de 5 a 10 unidades monetarias, es, como hemos visto en el apartado anterior, tarea bastante sencilla. El problema resultante sería entonces:

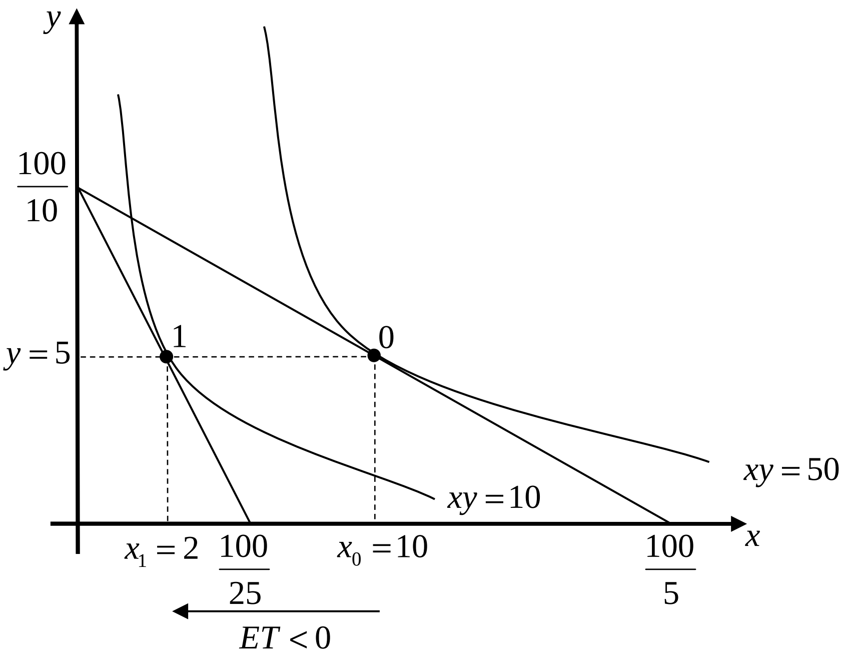
$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{Max}\ xy\\ s.a.\ 25x+10y\le 100\end{array}\right\}$$

Podríamos resolver el ejercicio, o usar la función de demanda de dicho bien. Como ya hemos visto, resulta más rápido y sencillo este segundo camino por lo que sustituyendo el precio por las 10 unidades monetarias que nos indica el apartado, obtenemos la nueva cantidad de equilibrio del bien *x*.

$$x=\frac{100}{2P_x}\xrightarrow{P_x=25}x=\frac{100}{2(25)}=2$$

A continuación, vamos a representar la cantidad de equilibrio inicial (denotada por el punto 0) y la nueva (cuando el precio pasa de 5 a 25 u.m., denotada por el punto 1).[7]

[7] Si nos fijamos, la cantidad demandada del bien y no ha sufrido modificaciones, ya que la función de demanda de este bien, depende exclusivamente de la renta y del precio de dicho bien, que como señala el enunciado, no han sufrido ninguna modificación. Por tanto, al no sufrir ninguna variación, el bien *y* es independiente del bien *x*. Si calculáramos la elasticidad cruzada de ambos bienes, esta sería igual a 0.



Claramente, el efecto total (*ET*) es negativo y asciende a -8, resultado de hacer una sencilla operación:

$$ET = x_1 - x_0 = 2 - 10 = -8 < 0$$

Ya solo nos quedaría descomponer el efecto total en los efectos renta y sustitución por el método de *Slutsky* o también llamado de *"poder de compra constante"*. Como podemos observar en el gráfico, el consumidor ha pasado del punto *0* al *1*. Por tanto, la combinación inicial de bienes (10,5) ya no es alcanzable. De este modo, la única forma de poder optar otra vez a dicha combinación, dados los nuevos precios es dotar al individuo de una renta hipotética, que denominaremos *renta de Slutsky* (I^S) que le permitiera otra vez situarse en el punto inicial. Centrándonos en nuestro ejercicio, el consumidor al elevarse el precio del bien *x*, ha perdido poder de compra, por lo que la única manera de poder alcanzar la cesta de bienes inicial es incrementando la renta (esa nueva renta, que le permitirá lograr la combinación inicial de bienes, el punto 0, es la renta de *Slutsky*) por encima de su nivel actual (que recordemos que en el ejercicio asciende a 100 unidades monetarias). Se trataría, pues de resolver el siguiente problema:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\ xy \\ s.a.\ 25x + 10y \leq I^S \end{array}\right\}$$

Fijémonos que el ejercicio es exactamente igual al anterior (con el nuevo precio del bien *x*), pero incluyendo la renta de *Slustky* (I^S). La pregunta sería ¿A cuánto asciende esta renta I^S? Recordemos que esta renta toma un valor justo para alcanzar el punto *0* ($x_0=10$, $y_0=5$), o dicho de otra forma, esta renta pasa justamente por el punto *0*. Entonces, simplemente para obtenerla nos bastará con calcular el gasto necesario para poder adquirir dichos bienes:

$$I^S = 25x + 10y$$
$$Punto\ 0 \rightarrow (10,5)$$
$$I^S = 25(10) + 10(5) = 300$$

Resumiendo, el consumidor podrá volver a situarse en el punto *0* con el nuevo precio del bien *x* (recordemos que el precio del bien *y* no ha sufrido modificaciones) cuando su renta sea igual a 300 unidades monetarias. Una vez calculada la renta de *Slustky*, el problema sería el estándar:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\ xy \\ s.a.\ 25x + 10y \leq 300 \end{array}\right\}$$

Resolvemos por el método del lagrangiano. Por lo que:

$$\max_{x,y}\ l(x,y,\lambda) = xy - \lambda(25x + 10y - 300)$$

Calculamos las condiciones de primer orden:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial x} = y - 25\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial y} = x - 10\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = -(25x + 10y - 300) = 0 \end{array}\right\} \text{despejando las } \lambda \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = -\dfrac{y}{25} \\ \lambda = -\dfrac{x}{10} \\ 25x + 10y = 300 \end{array}\right.$$

Igualamos las λ de las dos primeras ecuaciones:

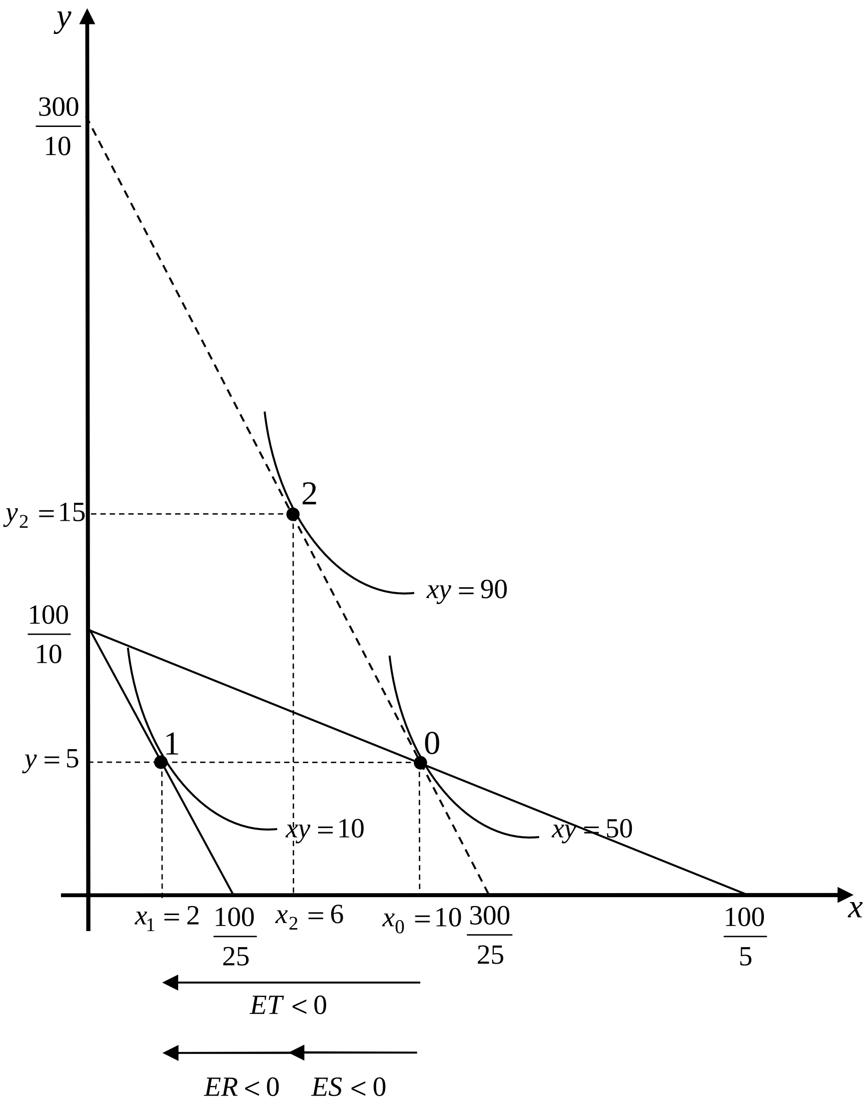
$$-\frac{y}{25} = -\frac{x}{10} \Rightarrow 25x = 10y \Rightarrow y = \frac{25x}{10}$$

Y sustituyendo el resultado en la tercera ecuación:

$$25x + 10y = 300 \xrightarrow{y=\frac{25x}{10}} 25x + 10\left(\frac{25x}{10}\right) = 300 \to 50x = 300 \to x = \frac{300}{50} = 6$$

$$y = \frac{25(6)}{10} = 15$$

El nuevo punto de equilibrio con la renta de *Slustky* (denotado como punto *2*) se encuentra en la combinación de bienes *(6,15).*En el siguiente gráfico resumimos todo el ejercicio.



Es necesario reseñar como con la renta de *Slutsky* $(I^S = 300)$ y los nuevos precios $(P_x = 25, P_y = 5)$ tenemos una nueva restricción presupuestaria (línea discontinua) que pasa justamente por el punto 0. Ahora, ya solo nos queda calcular el efecto renta (*ER*) y el efecto sustitución (*ES*). El efecto renta, asciende a -4 unidades (la diferencia entre el punto *2* y el *1*, se debe única y exclusivamente a la renta), mientras que el efecto sustitución también asciende a -4 unidades (el consumidor pudiendo permanecer en el punto *0* dada la renta de *Slutsky*, sustituye dicho punto por el *2*).

$$ET = x_1 - x_0 = 2 - 10 = -8$$
$$ER = x_1 - x_2 = 2 - 6 = -4$$
$$ES = x_2 - x_0 = 6 - 10 = -4$$

A modo de resumen, volvemos a representar los problemas de optimización para la obtención de cada punto:

Punto *0*

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{Max}\ xy\\ s.a.\ 5x+10y\le 100\end{array}\right\}$$

Punto *1*

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{Max}\ xy\\ s.a.\ \underline{25}x+10y\le 100\end{array}\right\}$$

Punto *2*

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{Max}\ xy\\ s.a.\ 25x+10y\le \underline{300}\end{array}\right\}$$

Nótese que hemos subrayado cada cambio existente para la obtención de cada punto.

Recordemos que para pasar del punto *0* al *1*, la variación se debió al aumento en el precio del bien *x*, mientras que del paso *1* al *2*, fue la renta la que se modificó pasando de la inicial a la de *Slutsky*.

e) El método de *Hicks* o de “utilidad constante”, es un método alternativo para descomponer el efecto total en los efectos renta y sustitución. Recordemos que en el método de *Slutsky*, el consumidor estaba interesado en alcanzar su cesta inicial de bienes. En el caso de *Hicks*, si bien parecido, es distinto, ya que el consumidor ahora no está interesado en alcanzar dicha cesta inicial, sino que ahora su objetivo es volver a situarse en su nivel de utilidad inicial, o dicho de otra forma, en volver a alcanzar la curva de indiferencia inicial sabiendo, por supuesto (al igual que en *Slutsky*), que los precios han sufrido modificaciones y con el menor gasto posible. Por lo que, tanto el punto *0* como el punto *1* son iguales que en el caso anterior, que, recordemos son los puntos que determinan el efecto total. En un principio, si siguiéramos el razonamiento de *Slutsky*, deberíamos de buscar una renta (que sería la renta de *Hicks* I^H) que alcanzara la curva de indiferencia inicial (recuerde que con *Slutsky* se dotaba una renta que alcanzar la combinación de bienes inicial), por tanto, el problema para la obtención del punto 2 sería el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{Max}\ xy\\ s.a.\ 25x+10y\le I^H\end{array}\right\}$$

Sin embargo, realizar el problema de esta forma no es viable, ya que, mientras en *Slutsky* si podríamos calcular la renta que nos permitía alcanzar la combinación de bienes iniciales, en *Hicks*, calcular la renta que nos permita alcanzar el nivel de utilidad inicial (curva de indifirencia inicial) no es posible. Pero, podríamos hacer uso del problema primal-dual. Si nos fijamos, al problema de maximización anterior (primal) podemos calcularle su problema de minimización (dual). Así:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{Max}\ xy\\ s.a.\ 25x+10y\le I^H\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{\min}\ 25x+10y\\ s.a.\ xy\ge U_0\end{array}\right\}$$

A priori, volvemos a tener el mismo problema ya que debemos de calcular U_0 (utilidad inicial), no obstante, vemos que esto es bastante sencillo, ya que el cálculo de la utilidad inicial simplemente nos basta con sustituir la combinación inicial de bienes en la función de utilidad.

$$U(x,y)=xy$$
$$U(\underbrace{x=10,y=5}_{Punto\ 0})=10*5=50$$

Sustituyendo dicha utilidad en el problema de minimización de gasto:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{\min}\ 25x+10y\\ s.a.\ xy\ge 50\end{array}\right\}$$

Antes de resolverlo, repasemos brevemente como se obtiene el punto (punto 2) por *Hicks* que nos permite descomponer el efecto total en efecto renta y sustitución. Dado que buscamos alcanzar el nivel de utilidad inicial (curva de indiferencia inicial), pero dados los nuevos precios, hacemos uso del problema de minimización de gasto, garantizando en la restricción que la utilidad sea la inicial.

Ahora vamos a calcular el problema de minimización mediante el lagrangiano. Por tanto, calculamos en primer lugar el lagrangiano:

$$\min_{x,y} l(x,y,\lambda) = 25x + 10y - \lambda(xy - 50)$$

Como siempre, calculamos las condiciones de primer orden:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial x} &= 25 - \lambda y = 0 \\ \frac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial y} &= 10 - \lambda x = 0 \\ \frac{\partial \ell(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} &= -(xy - 50) = 0 \end{aligned}\right\} \text{ despejando las } \lambda \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\dfrac{25}{y} \\ \lambda = -\dfrac{10}{x} \\ xy = 50 \end{cases}$$

Igualando las λ de las dos primeras ecuaciones:

$$-\frac{25}{y} = -\frac{10}{x} \Rightarrow 25x = 10y \Rightarrow y = \frac{25x}{10}$$

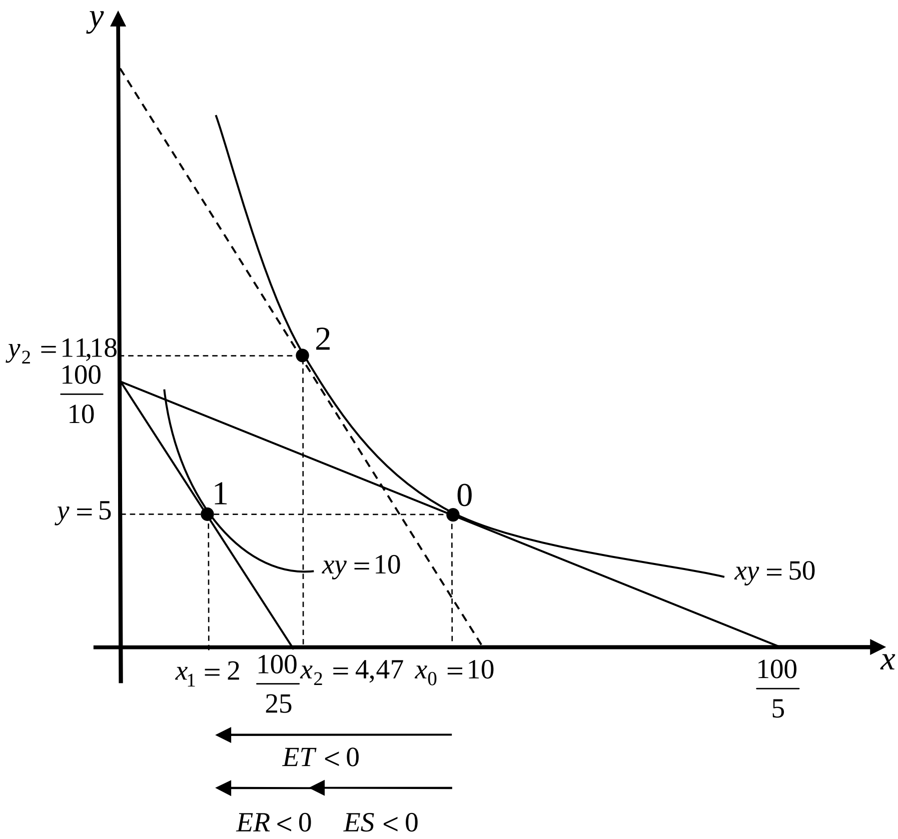
Y sustituyendo el resultado en la tercera ecuación:

$$xy = 50 \xrightarrow{y = \frac{25x}{10}} x\left(\frac{25x}{10}\right) = 50 \rightarrow \frac{25x^2}{10} = 50 \rightarrow 25x^2 = 500 \rightarrow x = \sqrt{\frac{500}{25}} \rightarrow$$

$$x = \sqrt{20} = 4{,}47$$

$$y = \frac{25x}{10} = \frac{25x}{10} = \frac{25(4{,}47)}{10} = 11{,}18$$

Por tanto, ya hemos calculado el punto *2*, cuya combinación de bienes es (4.47, 11.18). Y, ya podemos descomponer el efecto total, en efecto renta y sustitución. Pero antes, vamos a representar en el gráfico todo lo obtenido hasta ahora que nos servirá de ayuda para la descomposición de los efectos.



Fijémonos como la nueva recta presupuestaria (representada con líneas intermitentes) es tangente a la curva de indiferencia inicial. Por lo tanto, el punto *0* y el punto *2* son puntos donde la satisfacción (utilidad) del consumidor es la misma. El consumidor "sustituye" el punto *0* por el punto *2*, este es el "efecto sustitución". El efecto renta, va desde el punto *2* al punto *1*, ya que la diferencia entre ambos puntos se origina por cambios en la renta, ya que los precios son iguales (fijémonos que la rectas presupuestarias que pasan por ambos puntos son paralelas, por lo que los precios son idénticos en ambos casos).

Ahora, ya solo nos queda calcular el efecto renta (*ER*) y el efecto sustitución (*ES*). El efecto renta, asciende a -4 unidades, mientras que el efecto sustitución también asciende a -4 unidades.

$$ET = x_1 - x_0 = 2 - 10 = -8$$
$$ER = x_1 - x_2 = 2 - 4{,}47 = -2{,}47$$
$$ES = x_2 - x_0 = 4{,}47 - 10 = -5{,}53$$

A modo de resumen, volvemos a representar los problemas de optimización para la obtención de cada punto:

Punto *0*

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\ xy \\ s.a.\ 5x + 10y \leq 100 \end{array}\right\}$$

Punto *1*

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{Max}\ xy \\ s.a.\ \underline{25}x + 10y \leq 100 \end{array}\right\}$$

Punto *2*

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,y}{\min}\ 25x + 10y \\ s.a.\ xy \geq 50 \end{array}\right\}$$

Hemos subrayado cada cambio existente para la obtención de cada punto.

f) Hasta ahora, solo hemos estado interesados en calcular la curva de demanda ordinaria de un bien, sin embargo, es posible el cálculo de dos curvas de demanda adicionales, la curva de demanda de *Hicks* (o curva de demanda compensada) y la curva de demanda de *Slutsky*.

Como ya hemos visto, una curva de demanda, relaciona, básicamente precio y cantidad, así, mientras que la curva de demanda ordinaria, tiene como característica esencial que la renta monetaria se mantiene constante, en la curva de demanda de *Hicks*, es la utilidad la que permanece constante, mientras que la de *Slutsky* es la renta real o poder adquisitivo lo que permanece inalterable.

El problema por tanto para cada caso sería (en relación al bien *x*) usando los datos del problema:

Curva de demanda ordinaria	*Curva de demanda Slutsky*	*Curva de demanda Hicks*
$\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{Max}\ xy \\ s.a.\ P_x x + 10y \le \underbrace{100}_{\substack{Renta\\monetaria\\constante}}\end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{Max}\ xy \\ s.a.\ P_x x + 10y \le \underbrace{P_x(6)+10(15)}_{\substack{Renta\\real\\constante}}\end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{min}\ P_x x + 10y \\ s.a.\ xy \ge \underbrace{50}_{\substack{Utilidad\\constante}}\end{array}\right\}$

Como ya hemos calculado en el apartado a, la curva de demanda del bien x es $x = \dfrac{50}{P_x}$, por tanto, vamos a calcular la curva de demanda de *Slutsky* y la de *Hicks*.

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{Max}\ xy \\ s.a.\ P_x x + 10y \le P_x(6)+10(15)\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}\underset{x,y}{min}\ P_x x + 10y \\ s.a.\ xy \ge 50\end{array}\right\}$$

Construimos la función lagrangiano:

$$\underset{x,y}{max}\ l(x,y,\lambda) = xy - \lambda(P_x x + 10y - 6P_x - 150) \qquad \underset{x,y}{min}\ l(x,y,\lambda) = P_x x + 10y - \lambda(xy - 50)$$

Calculamos las condiciones de primer orden (primera derivada iguales a 0)

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial x} = y - \lambda P_x = 0 \\ \dfrac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial y} = x - 10\lambda = 0 \\ \dfrac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial\lambda} = -(P_x x + 10y - 6P_x - 150) = 0\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial x} = P_x - \lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial y} = 10 - \lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial\lambda} = -(xy - 50) = 0\end{array}\right\}$$

Despejando las λ e igualándolas a 0:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda=-\dfrac{y}{P_x}\\ \lambda=-\dfrac{x}{10}\\ P_x x+10y=6P_x+150\end{array}\right\}-\frac{y}{P_x}=-\frac{x}{10}\rightarrow y=\frac{P_x x}{10}\qquad \left.\begin{array}{l}\lambda=-\dfrac{P_x}{y}\\ \lambda=-\dfrac{10}{x}\\ xy=50\end{array}\right\}-\frac{P_x}{y}=-\frac{10}{x}\rightarrow y=\frac{P_x x}{10}$$

Haciendo uso de la tercera ecuación:

$$P_x x+10y=6P_x+150\xrightarrow{y=\frac{P_x x}{10}}$$

$$P_x x+10\left(\frac{P_x x}{10}\right)=6P_x+150\rightarrow$$

$$2P_x x=6P_x+150\rightarrow x^S=\frac{6P_x+150}{2P_x}\rightarrow$$

$$x^S=3+\frac{150}{2P_x}$$

$$xy=50\xrightarrow{y=\frac{P_x x}{10}}x\left(\frac{P_x x}{10}\right)=50\rightarrow$$

$$P_x x^2=500\rightarrow x^2=\frac{500}{P_x}\rightarrow x^H=\left(\frac{500}{P_x}\right)^{1/2}$$

Con un simple cálculo podemos determinar si las curvas obtenidas son correctas, si sabemos que cuando el precio del bien *x* era igual a 25, la cantidad demandada según *Slutsky* ascendía a 6 unidades, mientras que la de *Hicks* era 4,47. Sustituyendo dicho precio en las curvas obtenidas:

$$x^S=3+\frac{150}{2P_x}\rightarrow x^S=3+\frac{150}{2(25)}=6$$

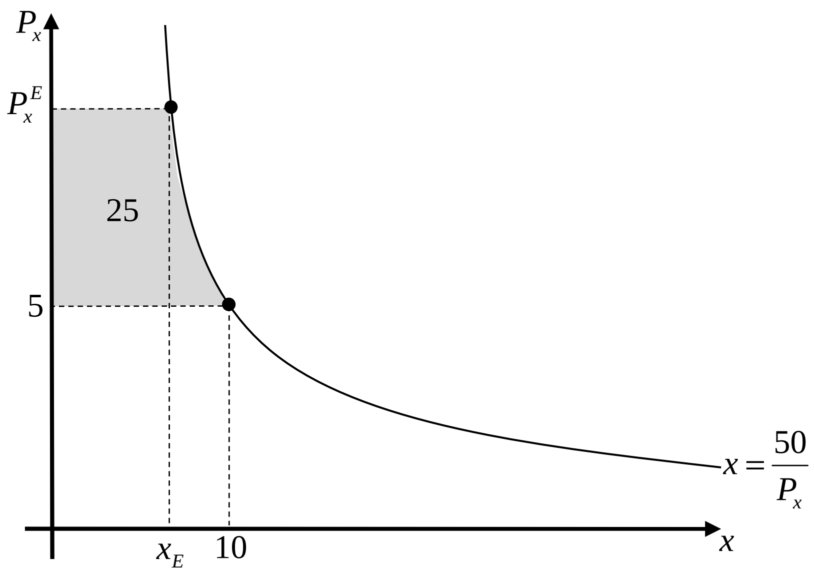
$$x^H=\left(\frac{500}{P_x}\right)^{1/2}\rightarrow x^H=\left(\frac{500}{25}\right)^{1/2}=4{,}47$$

Por tanto, son correctas las curvas de demanda obtenidas.

g) Como ya hemos calculado en el apartado a, la curva de demanda del bien x es $x=\dfrac{I^0}{2P_x}$ y dado que la renta según el enunciado es igual a 100 unidades monetarias, por tanto:

$$x=\frac{100}{2P_x}=\frac{50}{P_x}$$

El apartado nos pide que calculemos el aumento que debe experimentar el precio para que la variación del excedente del consumidor asciende a 25. Vamos a presentar este excedente gráficamente para hacer más fácil la resolución del problema:



El área sombreada es el excedente del consumidor, por lo que parece claro que primero deberíamos de calcular P_x^E que hace que dicha área sea igual a 25. El cálculo del área se resuelve mediante una integral definida siendo sus límites los precios:

$$25 = \int_5^{P_x^E} \frac{50}{P_x} dP_x \rightarrow 25 = 50\int_5^{P_x^E} \frac{dP_x}{P_x} \rightarrow 25 = 50[\ln(P_x)]_5^{P_x^E} \rightarrow 25 = 50[\ln(P_x^E) - \ln(5)] \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{25}{50} = \ln(P_x^E) - \ln(5) \rightarrow \frac{1}{2} = \ln\left(\frac{P_x^E}{5}\right) \rightarrow e^{\frac{1}{2}} = e^{\ln\left(\frac{P_x^E}{5}\right)} \rightarrow 1{,}649 = \frac{P_x^E}{5} \rightarrow P_x^E = 8{,}245$$

Es decir, para que la variación del excedente del consumidor ascienda a 25, el precio debe de pasar de 5 unidades monetarias a 8,245. En términos porcentuales, simplemente realizando una sencilla operación:

$$\text{var} = \frac{P_x^E - 5}{5} = \frac{8{,}245 - 5}{5} = 0{,}649$$

Por tanto, el precio ha de incrementarse un 64,9% para que el excedente sea igual a 25 unidades.

h) Calcular la curva de demanda de ambos bienes para el total de 50 individuos no debe de plantearnos ningún problema. Recordemos que para sumar hallar la curva de demanda global, simplemente debemos sumar horizontalmente, (recuérdese que siempre se suma vía precios) las demandas individuales de estos cincuenta sujetos.[8]

$$x^T = x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{49} + x_{50}$$

Si la curva de demanda del bien *x* es igual a $x = \frac{50}{P_x}$ y la del bien *y* $y = \frac{50}{P_y}$. Simplemente nos queda sumarlas 50 veces:

[8] El subíndice simplemente indica el individuo.

$$Bien\ x \rightarrow x^T = x_1 + x_2 + ... + x_{49} + x_{50} = \frac{50}{P_x} + \frac{50}{P_x} + ... + \frac{50}{P_x} + \frac{50}{P_x} = \frac{2500}{P_x}$$

$$Bien\ y \rightarrow y^T = y_1 + y_2 + ... + y_{49} + y_{50} = \frac{50}{P_y} + \frac{50}{P_y} + ... + \frac{50}{P_y} + \frac{50}{P_y} = \frac{2500}{P_y}$$

6.- Un individuo percibe por su trabajo un salario de 10 unidades monetarias por hora. Dicho individuo hace frente a un consumo de un bien compuesto x cuyo precio asciende a 2 unidades monetarias. Si sabemos que su función de utilidad es igual a $U(x,o) = xo$. Se pide:

a) La cantidad de bienes que consumirá y el tiempo que dedicará a trabajar.

b) Tras un tiempo, el individuo ha sido despedido, ¿a cuánto debería de ascender el subsidio de desempleo para que mantuviera la situación anterior?

c) Debido a un plan de pensiones junto al subsidio de desempleo, el individuo dispone de una renta de 40 unidades monetarias. ¿A partir de que salario estaría dispuesto a incorporarse al mercado laboral si dispone de una oferta de empleo a tiempo parcial de 4 horas al día?

Solución:

a) Parece claro que nos encontramos ante un problema de consumidor como oferente de trabajo. Donde el individuo debe de decidir que parte de su tiempo dedicará a ocio, y que parte al trabajo, siendo esta la vía para alcanzar la renta que permite demandar bien *x*. El problema al que se enfrenta sería el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,o}{Max}\ U(x,o) \\ s.a.\ P_x x \le I \\ \quad o + l = 24 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \underset{x,o}{Max}\ U(x,o) \\ s.a.\ P_x x \le wl \\ \quad o + l = 24 \end{array}\right\}$$

Sabiendo que el precio del bien x es igual a 2 y el salario por hora asciende a 10 tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,o}{Max}\ U(x,o) \\ s.a.\ 2x \le 10l \\ \quad o + l = 24 \end{array}\right\}$$

Incluyendo la segunda restricción a la primera:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,o}{Max}\ U(x,o) \\ s.a.\ 2x \le 10(24 - o) \end{array}\right\}$$

Resolviéndolo haciendo uso del lagrangiano:

$$\underset{x,y}{Max}\ l(x,o,\lambda) = xo - \lambda(2x - 10(24 - o))$$

Realizamos las condiciones de primer orden:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\ell(x,o,\lambda)}{\partial x} &= o - 2\lambda = 0\\ \frac{\partial\ell(x,o,\lambda)}{\partial o} &= x - 10\lambda = 0\\ \frac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial\lambda} &= -(2x - 10(24-o)) = 0\end{aligned}\right\} \text{despejando las } \lambda \Rightarrow \begin{cases}\lambda = -\dfrac{o}{2}\\ \lambda = -\dfrac{x}{10}\\ 2x = 240 - 10o\end{cases}$$

Igualando las λ de las dos primeras ecuaciones

$$-\frac{o}{2} = -\frac{x}{10} \Rightarrow x = 5o$$

Y sustituyendo el resultado en la tercera ecuación:

$$2x = 240 - 10o \xrightarrow{x=5o} 2(5o) = 240 - 10o \rightarrow 10o = 240 - 10o \rightarrow o = \frac{240}{20} = 12$$

Por tanto, dedicará 12 horas a ocio, y el resto hasta llegar a 24, es decir, las 12 horas restantes las destinará a trabajar. Finalmente, la cantidad de bien x que demandará será igual a 60 unidades.

b) Mientras el consumidor trabajaba, la utilidad máxima alcanzada ascendió a:

$$U(x = 60, o = 12) = 60 \cdot 12 = 720$$

Por tanto, el consumidor tendrá que alcanzar esta utilidad para mantener la situación anterior. Si nos fijamos en el problema de dicho consumidor:

Antes

$$\left.\begin{aligned}&\max_{x,o} U(x,o)\\ &s.a.\ P_x x \le I\\ &\quad o + l = 24\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned}&\max_{x,o} U(x,o)\\ &s.a.\ P_x x \le wl\\ &\quad o + l = 24\end{aligned}\right\}$$

Ahora

$$\left.\begin{aligned}&\max_{x,o} U(x,o)\\ &s.a.\ P_x x \le I\\ &\quad o + l = 24\end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned}&\max_{x,o} U(x,o)\\ &s.a.\ P_x x \le \bar{I}\\ &\quad o + l = 24\end{aligned}\right\}$$

Donde I será el subsidio de desempleo. Dar solución al ejercicio es extremadamente fácil, dado que *l=0* (no trabaja), entonces el ocio *o=24*:

$$U(x,o) = xo \rightarrow U(x,24) = 24x$$

Si la utilidad debe ser al menos a 720:

$$720 = 24x \rightarrow x = \frac{720}{24} = 30$$

Y sabiendo que el subsidio es igual a:

$$\bar{I} = P_x x \xrightarrow{P_x=2,x=30} \bar{I} = 2(30) = 60$$

Así, el individuo obtendrá la misma utilidad que si estuviera trabajando siempre y cuando el subsidio de desempleo fuera igual (o mayor) a 60 unidades monetarias. Nótese que a pesar de demandar la mitad de bienes que en el caso anterior, la utilidad alcanzada es exactamente idéntica.

c) Como el individuo se encuentra sin rentas salariales, la cantidad demandada de bien *x* será:

$\bar{I} = P_x x \rightarrow 40 = 2x \rightarrow x = \frac{40}{2} = 20$, y por tanto, la utilidad máxima alcanzada será:

$$U(x,o) = xo \rightarrow U(x = 20, o = 24) = 20 \cdot 24 = 480$$

Si decidiera incorporarse al mercado de trabajo (perdería, por tanto, el subsidio de desempleo junto a su plan de pensiones), entonces:

$$P_x x = wl \rightarrow 2x = w4 \rightarrow x = \frac{4w}{2} \rightarrow x = 2w$$

Si sabemos que, al menos su utilidad debe de ser la anterior, por tanto:

$$480 = xo \xrightarrow{x=2w} 480 = (2w)20 \rightarrow 480 = 40w \rightarrow w = \frac{480}{40} = 12$$

Así, si el salario por hora es inferior a 12 unidades monetarias, entonces, el individuo no se incorporará al mercado de trabajo.

7.- Un consumidor presenta la siguiente función de utilidad $U(x,o) = x^2 o$, donde *x* es un determinado bien compuesto y *o* es el número de horas dedicadas al ocio. Este individuo acaba de ser sido premiado con un boleto de la lotería por la cantidad de 48 unidades monetarias. Por otro lado, está empleado en un puesto de trabajo por el que recibe un salario de 2 unidades monetarias. Si sabe que el precio del bien *x* asciende a 5 unidades monetarias, se pide:

a) El número de horas que dedicará a trabajar, y la cantidad de bienes que consumirá.

b) La curva de oferta de trabajo del propio individuo.

c) Increíblemente, este individuo ha sido premiado con un nuevo premio que asciende a 24 u.m. ¿Qué número de horas dedicará ahora a trabajar?

Solución:

a) Es fácil darse cuenta, que el problema versa sobre el consumidor como oferente de trabajo. Vamos a ver, como a pesar de los cambios aparentes, el problema es similar a los realizados hasta ahora. Antes de resolverlo, señalaremos los cambios existentes. Básicamente, dos son los cambios relevantes. En primer lugar, nuestras variables de elección son ahora el bien *x*, y el número de horas dedicadas al ocio (*o*). En segundo lugar, la renta ya no es una constante exógena sino que ahora depende del propio individuo (del número de horas que esté dispuesto a trabajar (*l*)).

El objetivo del consumidor, como siempre es maximizar su utilidad, sabiendo que tiene restricciones, por un lado, una restricción presupuestaria (el gasto en el bien *x* ($P_x x$) no puede superar su renta (*I*)) y una restricción temporal (sabiendo que el día son 24 horas, deberá de repartir este tiempo en ocio (*o*) o en trabajo (*l*)). Por tanto, el problema al que se enfrenta el consumidor es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,o}{Max}\, U(x,o) \\ s.a.\ P_x x \le I \\ \qquad o + l = 24 \end{array}\right\}$$

Pero como nos indica el enunciado, el consumidor dispone de dos vías para adquirir renta, por un lado, una renta del tipo no salarial (el premio de la lotería), y por otro lado, como fruto de su trabajo (renta salarial). Por tanto:

$$I = \underbrace{\bar{I}}_{\substack{renta\\ no\\ salarial}} + \underbrace{wl}_{\substack{renta\\ salarial}}$$

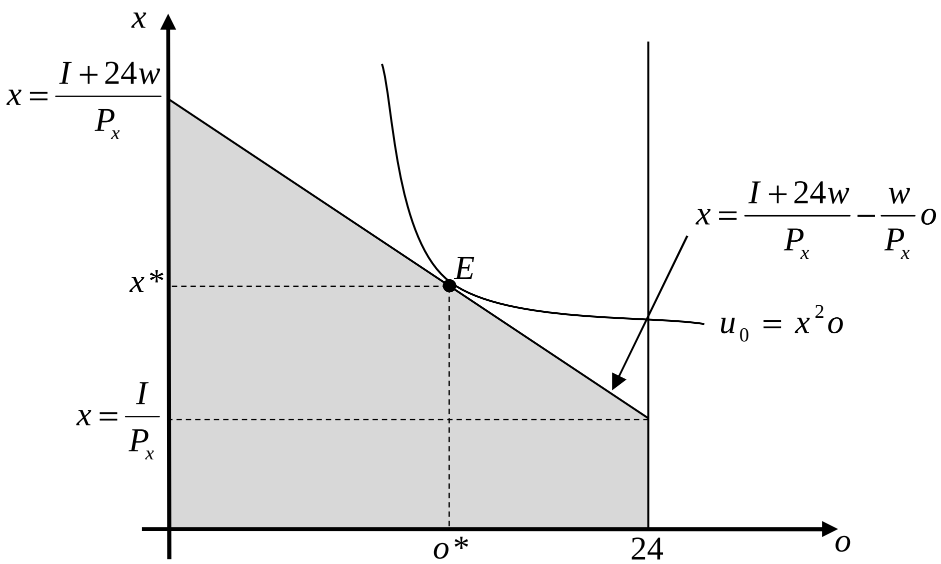
Fijémonos que la renta salarial no es más que el número de horas trabajadas (l) por el salario por hora (w). Por tanto, el problema del consumidor quedaría:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,o}{Max}\, U(x,o) \\ s.a.\ P_x x \le \bar{I} + wl \\ \qquad o + l = 24 \end{array}\right\} \text{y con los datos de nuestro problema} \left.\begin{array}{l} \underset{x,o}{Max}\ x^2 o \\ s.a.\ P_x x \le 48 + 2l \\ \qquad o + l = 24 \end{array}\right\}$$

El lector puede pensar que el problema resulta más complicado de lo habitual dada la existencia de dos restricciones. Sin embargo, podemos incluir la segunda en la primera, y por tanto, reducir estas a solo una:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{x,o}{Max}\ x^2 o \\ s.a.\ P_x x \le 48 + 2(24 - o) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \underset{x,o}{Max}\ x^2 o \\ s.a.\ 4x \le 96 - 5o \end{array}\right\}$$

Ahora, ya nos queda un problema estándar, que podemos resolverlo de cualquiera de las formas aprendidas anteriormente. Pero antes, vamos a representar gráficamente le problema planteado:



EL problema es prácticamente idéntico al problema estándar, quizás, lo único destacable sea el conjunto asequible (área sombreada). Resolviendo por igualación de pendientes:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\dfrac{dx}{do}\right|_{curva\,de\,indiferencia} = \left.\dfrac{dx}{do}\right|_{restricción} \\ 4x = 96 - 2o \end{array}\right\}$$

Calculando las pendientes:

$$\left.\frac{dx}{do}\right|_{curva\,de\,indiferencia} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial o}}{\dfrac{\partial U}{\partial x}} = -\frac{x^2}{2xo} = -\frac{x}{2o}$$

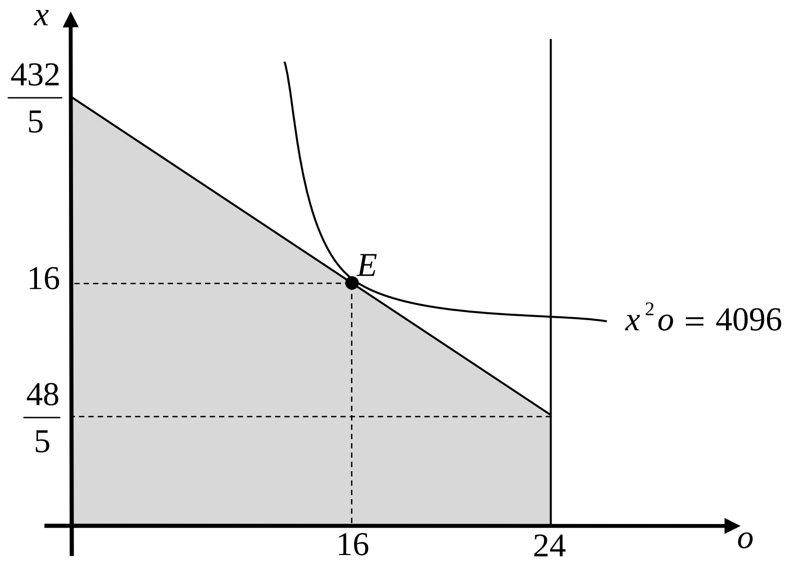
$$\left.\frac{dx}{do}\right|_{restricción} = -\frac{w}{P_x} = -\frac{2}{4}$$

Y sustituyendo:

$$\left.\begin{array}{l} -\dfrac{x}{2o} = -\dfrac{2}{4} \\ 4x = 96 - 2o \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x = o \\ 4x = 96 - 2o \end{array}\right\} 4x = 96 - 2x \to 6x = 96 \to x = \frac{96}{6} = 16$$

$$x = o \xrightarrow{x=16} o = 16$$

Por tanto, el consumidor demandará 16 unidades del bien x, dedicará a ocio un total de 16 horas, y al trabajo las 8 horas restantes (*l=24-16*). En el siguiente gráfico mostramos lo obtenido.



b) Para calcular la curva de oferta de trabajo, simplemente debemos de utilizar el problema inicial pero sin fijar el salario *w* (una curva de oferta relaciona precio y cantidad, en nuestro ejercicio, salario y número de horas trabajadas), por tanto:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,o}{Max}\,U(x,o)\\ s.a.\ 4x \le 48 + w(24-o)\end{array}\right\}$$

Sin embargo, el lector se habrá dado cuenta que no es posible realizarlo de esta forma, ya que al incluir la segunda restricción en la primera, desaparece la variable *l* (número de horas trabajadas). No obstante, para evitar esta situación, podríamos calcular en primer lugar la curva de demanda de ocio (que relaciona el número de horas de ocio en relación al salario), así, igualando las pendientes:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\dfrac{dx}{do}\right|_{curva\,de\,indiferencia} = \left.\dfrac{dx}{do}\right|_{restricción}\\ 4x = 48 + w(24-o)\end{array}\right\}$$

Calculando las pendientes:

$$\left.\frac{dx}{do}\right|_{curva\,de\,indiferencia} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial o}}{\dfrac{\partial U}{\partial x}} = -\frac{x^2}{2xo} = -\frac{x}{2o}$$

$$\left.\frac{dx}{do}\right|_{restricción} = -\frac{w}{P_x} = -\frac{w}{4}$$

Y sustituyendo:

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{x}{2o} = -\dfrac{w}{4}\\ 4x = 48 + w(24-o)\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x = \dfrac{wo}{2}\\ 4x = 48 + w(24-o)\end{array}\right\}4\left(\frac{wo}{2}\right) = 48 + w(24-o) \rightarrow$$

$$2wo = 48 + 24w - wo \rightarrow 3wo = 48 + 24w \rightarrow o = \frac{48+24w}{3w} \rightarrow o = \frac{16}{w} + 8$$

Y sabiendo que $o + l = 24$, la curva de oferta de trabajo será:

$$o = \frac{16}{w} + 8 \xrightarrow{o=24-l} 24 - l = \frac{16}{w} + 8 \rightarrow l = 16 - \frac{16}{w}$$

Comprobemos que el resultado es correcto con los valores del enunciado. Así cuando el salario asciende a 2 unidades, según las curvas de oferta de trabajo y de ocio:

$$o = \frac{16}{w} + 8 \xrightarrow{w=2} o = 16$$

$$l = 16 - \frac{16}{w} \xrightarrow{w=2} l = 8$$

Finalmente, es importante señalar, que la curva de oferta de trabajo tiene pendiente positiva, que comprobaremos calculando su pendiente a través de la derivada:

$$\frac{dw}{dl} = \frac{16}{w^2} > 0$$

c) El problema es idéntico al del apartado a, simplemente variando la renta no salarial:

$$\left.\begin{array}{l}\underset{x,o}{Max}\, U(x,o)\\ s.a.\ P_x x \leq \bar{I} + w(24-o)\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\underset{x,o}{Max}\ x^2 o\\ s.a.\ 4x \leq (48+24)+2(24-o)\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}\underset{x,o}{Max}\ x^2 o\\ s.a.\ 4x \leq 120+2o\end{array}\right\}$$

Resolviendo por igualación de pendientes:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\dfrac{dx}{do}\right|_{curva\,de\,indiferencia} = \left.\dfrac{dx}{do}\right|_{restricción}\\ 4x = 120-2o\end{array}\right\}$$

Calculando las pendientes:

$$\left.\frac{dx}{do}\right|_{curva\,de\,indiferencia} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial o}}{\dfrac{\partial U}{\partial x}} = -\frac{x^2}{2xo} = -\frac{x}{2o}$$

$$\left.\frac{dx}{do}\right|_{restricción} = -\frac{w}{P_x} = -\frac{2}{4}$$

Solo nos quedaría sustituir:

$$\left.\begin{array}{l}-\dfrac{x}{2o} = -\dfrac{2}{4}\\ 4x = 120-2o\end{array}\right\}\left.\begin{array}{l}x = o\\ 4x = 120-2o\end{array}\right\} 4x = 120-2x \rightarrow 6x = 120 \rightarrow x = \frac{120}{6} = 20$$

$$x = o \xrightarrow{x=20} o = 20$$

Por tanto, dedicaría 20 horas a ocio, y el tiempo restante, 4 horas a trabajo. Siendo la utilidad máxima alcanzada igual a 8000.

Tema 3. Problemas propuestos

1.- Compruebe que las curvas de indiferencia de la siguiente función de utilidad $U(x,y)=x^2y^2$ cumplen las propiedades de convexidad y pendiente negativa.

Solución:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}<0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{y}{x^2}\right)>0$$

2.- Un consumidor dispone de la siguiente función de utilidad $U(x,y)=xy^2$ siendo el precio del bien *x* e *y* igual a 3 y 6 u.m. respectivamente y la renta igual a 90 u.m. Con estos datos, se pide:

a) **Las cantidades demandadas por el consumidor de ambos bienes. ¿A cuánto asciende su utilidad máxima?**
b) **La curva de demanda ordinaria de ambos bienes.**
c) **La curva de demanda compensada o de *Hicks*.**

Solución:

a) x=10, y=10, U=1000

b) $x=\dfrac{30}{P_x}; y=\dfrac{60}{P_y}$

c) $x=\left(\dfrac{9000}{P_x^2}\right)^{1/3}$

3.- Sea la siguiente función de utilidad que representa los gustos de un consumidor $U(x,y)=x^2y^2$. Sabiendo que el precio del bien *x* asciende a 3 u.m. y el del bien *y* a 5 u.m., disponiendo de una renta de 120 u.m. Se pide:

a) **¿Es el bien *x* un bien normal?**
b) **Si el precio del bien *x* disminuye un 10%. ¿Cuánto aumentará la cantidad demandada?**
c) **Si la renta del individuo aumenta un 20%. ¿Cuánto aumentará la cantidad demandada?**
d) **¿Cuál será la cantidad demandada de cada bien?**
e) **Si el precio de *x* aumenta a 6 u.m. ¿A cuánto asciende el excedente del consumidor?**
f) **Si el precio del bien *x* es igual a 2, halle la curva de demanda compensada o de *Hicks*.**

Solución:

a) El bien *x* es un bien normal ya que su elasticidad de demanda es negativa y su elasticidad renta es positiva.

b) Un 10%.

c) Un 20%.

d) *x*=20, *y*=12.

e) 41,589.

f) $x^H = \left(\dfrac{1440000}{P_x^2}\right)^{1/4}; x^S = 10 + \dfrac{30}{P_x}$.

4.- Las preferencias de un consumidor sobre los bienes *x* e *y* pueden ser descritas mediante la siguiente función de utilidad: $U(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{2}{3}}$ **. Se pide:**

- **a) Calcule la curva de demanda del bien *x* e *y*.**
- **b) La elasticidad de demanda y la elasticidad renta del bien *x*. ¿Es el bien *x*, un bien normal?**
- **c) Si el precio del bien *x* asciende a 3 u.m., el del bien *y* a 6 u.m, y la renta es igual a 90 u.m. ¿Cuáles serán las cantidades demandadas de ambos bienes?**
- **d) Si el precio del bien *x* aumenta a 5 u.m. Calcule el efecto renta y sustitución por el método de *Hicks*.**
- **e) Calcúlelo ahora por el método de *Slutsky*.**
- **f) Obtenga la curva de demanda del bien x si existen 20 consumidores iguales al del problema.**
- **g) Si la variación del excedente del consumidor es igual a 100 u.m., ¿cuánto ha aumentado el precio del bien *x*?**

Solución:

a) $x = \dfrac{I}{3P_x}; y = \dfrac{6I}{3P_y}$.

b) $\varepsilon_D = -1; \varepsilon_{x,I} = 1; Bien\ normal$.

c) *x*=10, *y*=10.

d) *ES*=-2,67; *ER*=-1,33; *ET*=-4.

e) *ES*=-2,89; *ER*=-1,11; *ET*=-4.

f) $x_T = \dfrac{600}{P_x}$.

g) $P_x = 22{,}03$.

5.- Un determinado individuo, ante la escasez de puestos de trabajos, ha decidido hacerse autoempleado creando una tienda online vendiendo fresas de Huelva. Tras un riguroso estudio de mercado, considera que por cada hora dedicada a su trabajo percibirá la cantidad de 4 u.m. Además, según sus propias estimaciones derivadas de dicho estudio ha conseguido describir sus preferencias sobre el ocio y el consumo de un bien compuesto *x* según la siguiente función de utilidad $U(x,o) = xo^2$ **. Con esto datos, se pide:**

- **a) Cuanto tiempo dedicará al ocio, cuanto al trabajo y que cantidad de bien *x* demandará si el precio del bien asciende a 2 u.m.**
- **b) El gobierno en su política de fomento del autoempleo ha decidido subvencionar su negocio con un total de 12 u.m. ¿Cuál dedicará ahora al ocio?**
- **c) Calcule la curva de oferta de trabajo del individuo (con la subvención)**
- **d) ¿A cuánto debería ascender la subvención para que el individuo decidiera trabajar solo a media jornada (4 horas)?**

Solución:

a) $o = 16; l = 8; x = 16$.

b) $o = 18$.

c) $l = 8 - \dfrac{8}{w}$

d) La subvención debería ser igual a 24 u.m.

Tema 3. Cuestiones de elección múltiple

1.- La curva de indiferencia será una línea continua:

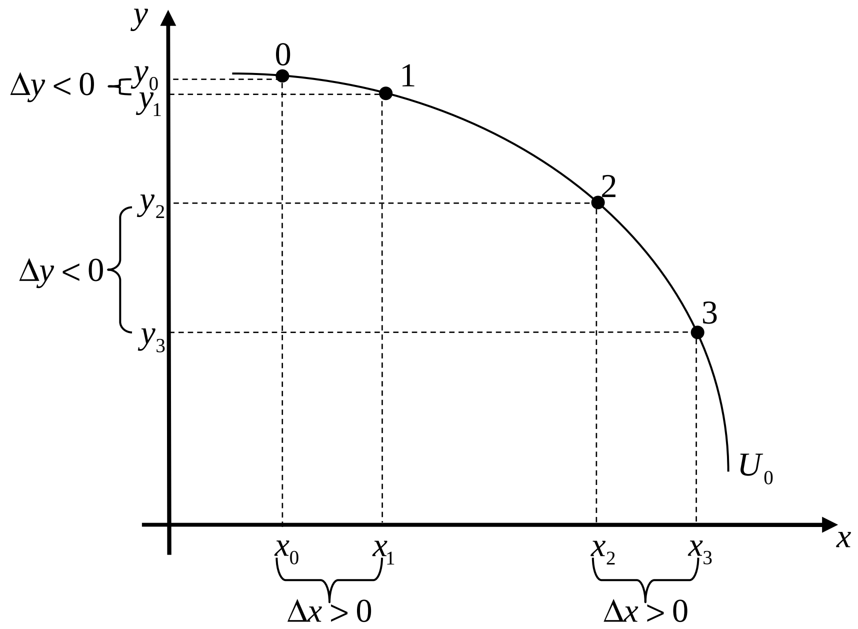
a) Más ancha que un punto singular.
b) Igual de ancha que un punto singular. ✓
c) Menos ancha que un punto singular.
d) Ninguna de las anteriores.

Solución: Recordemos que las curvas de indiferencia están formadas por puntos (combinaciones de bienes) que reportan al consumidor la misma satisfacción (puntos indiferentes). Si la curva de indiferencia fuera más ancha, contendría puntos (combinaciones) pertenecientes a los conjuntos mejor y peor que cualquier punto dentro de la misma curva, y, por tanto, reportarían al consumidor distintas satisfacciones.

2.- Si una curva de indiferencia no fuera convexa, entonces:

a) La *RMS* sería negativa y decreciente.
b) La *RMS* sería positiva y decreciente.
c) La *RMS* sería positiva y creciente. ✓
d) La *RMS* sería negativa y creciente.

Solución: Para dar respuesta a esta pregunta, quizás la mejor opción sea dibujar una curva de indiferencia cóncava tal como nos indica el enunciado. Así:



La *RMS* como ya sabemos es la pendiente de la curva de indiferencia cambiada de signo. Por tanto, la pendiente de la curva sigue siendo negativa a pesar de que ya no es convexa. Por tanto, la *RMS* será positiva y las opciones a y d quedan descartadas. Si nos fijamos en el gráfico, conforme nos desplazamos por la curva hacía la derecha, vemos que para adquirir la misma cantidad de bien *x*, el consumidor cada vez estará dispuesta a sacrificar más de y. Si, la *RMS* es igual a:

$$RMS_{y,x} = -\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

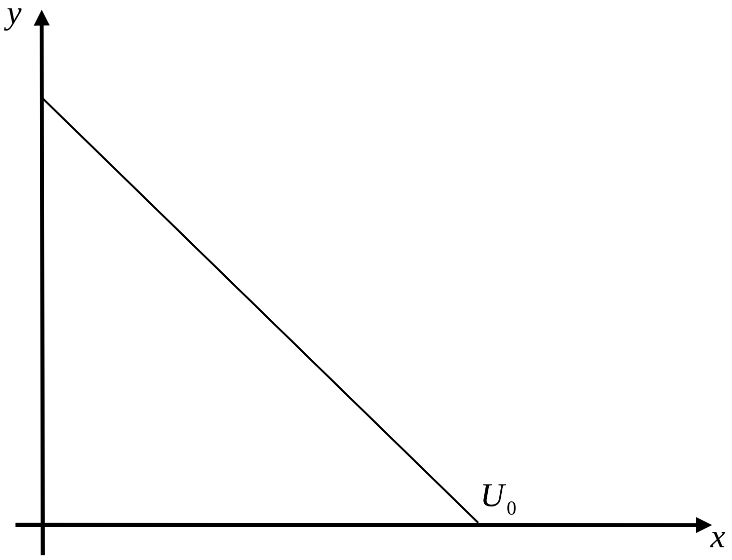
Parece claro, que mientras el denominador permanece constante (el incremento de x de 0 a 1, es igual al incremento de x de 2 a 3), el numerador cada vez se hace más grande, por tanto el cociente se hará mayor. Así, podemos concluir que la respuesta correcta es la *c*, la *RMS* es positiva y creciente.

El lector también podrá responder a esta pregunta, analizando las pendientes en cada punto, ya que recordemos, como hemos indicado al principio, que la *RMS* es la pendiente de la curva cambiada de signo. Así, conforme nos desplazamos hacia la derecha en la curva, la pendiente de la restricción cada vez es mayor en términos absolutos. Por lo que se vuelve a confirmar lo anteriormente descrito.

3.- La *RMS* de dos bienes perfectamente sustitutivos es:

a) Decreciente.
b) Negativa.
c) Constante. ✓
d) Ninguna de las anteriores.

Solución: Dibujemos una curva de indiferencia para dos bienes perfectamente sustitutivos y calculemos la *RMS*.

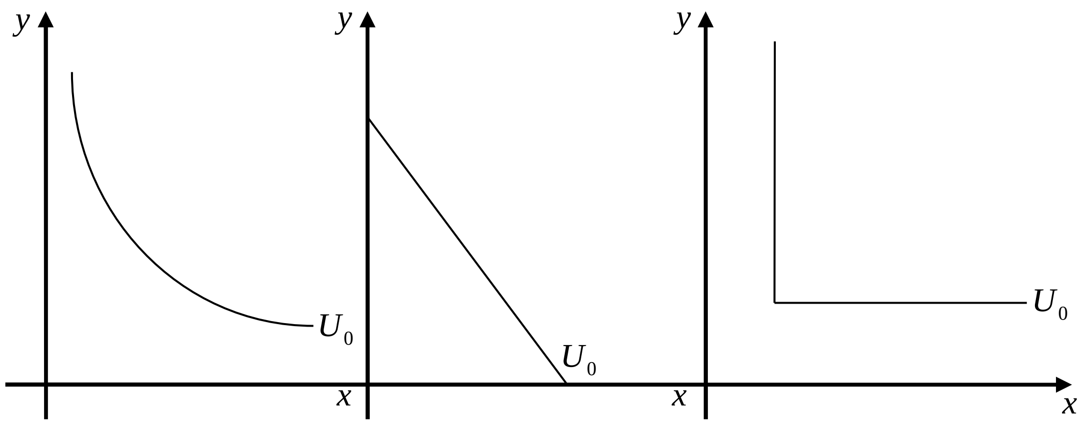


La curva de indiferencia es una recta con pendiente negativa. Como la *RMS* es la pendiente de la curva con el signo cambiado, será por tanto positiva y constante (la pendiente de la recta es una constante).

4.- Cual de las siguientes funciones de utilidad representan el caso de bienes complementarios:

a) $U(x,y) = xy$.
b) $U(x,y) = x + y$.
c) $U(x,y) = \min(x,y)$. ✓
d) Ninguna de las anteriores.

Solución: Recordemos que el caso de bienes complementarios son aquellos que tienen una demanda conjunta, es decir, que las variaciones en el precio de uno tienen como consecuencia variaciones tanto en la demanda de ese bien como de otro. Si representamos las curvas de indiferencia derivada de las tres funciones de utilidad tenemos que:



Mientras que la primera curva es una curva estándar, la segunda (figura central) muestra el caso de dos bienes sustitutivos (*RMS* constante ya que al ser una recta la pendiente es invariable). Finalmente, la curva de indiferencia del apartado c (gráfica de la derecha), representa una curva de dos bienes complementarios. Este tipo de funciones son denominadas de Leontief.

5.- La utilidad marginal de un bien *x* es:

a) La utilidad de la última unidad consumida.
b) La variación de la utilidad total ante una variación en la cantidad consumida de dicho bien.
c) La derivada de la función de utilidad con respecto al bien *x*.
d) Todas las anteriores. ✓

Solución: Es claro que la solución es la d), ya que todas las demás respuestas son distintas formas de explicar lo mismo. La derivada no es más que la variación de una variable con respecto a otra (en el límite). Si estas dos variables son utilidad total y bien *x*, por tanto, variaciones de la cantidad de *x*, supondrán variaciones en la utilidad total. Finalmente, si dicha variación en la cantidad fuera de una unidad, la variación que sufriría la utilidad total, sería exactamente, la utilidad de esa última unidad.

6.- Sea la combinación de bienes *A* compuesta por 5 unidades de ropa y 2 de comida, y la *B*, de 2 unidades de ropa y 6 de comida. ¿Qué combinación es preferida?:

a) La *A*.
b) La *B*.
c) Son indiferentes.
d) Ninguna de las anteriores. ✓

Solución: A priori, el lector podría estar tentado a sumar las cantidades de ropa y comida de cada combinación y decidir por la que sumara más. En este caso, elegiría la *B*, ya que contiene 8 unidades totales y la A solo tendría 7. Sin embargo, deberíamos de saber que este razonamiento es incorrecto ya que sin conocer la función de preferencia no podemos sumar las cantidades de ambos bienes. Imagine, por un momento que el bien *x* son automóviles y el bien *y* escobas. ¿Realmente sumaríamos las cantidades de ambos bienes y optaríamos por la que más cantidad tuviera? Por tanto, sin tener conocimiento de la función de preferencia del consumidor, no es posible discriminar entre una u otra combinación.

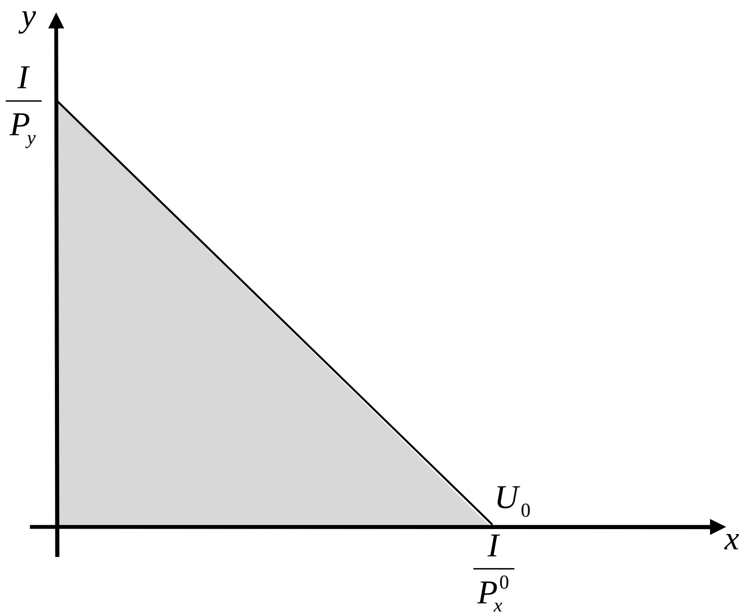
7.- Si el precio del bien *x* aumenta, entonces:

a) El conjunto asequible disminuye.
b) La pendiente de la restricción presupuestaria aumenta (en valor absoluto).
c) El punto de corte de la restricción presupuestaria con el eje de ordenadas varía.
d) Todas las anteriores. ✓

Solución: Recordemos que la restricción presupuestaria nos señala que el gasto no puede ser superior a la renta que se disponga. Por tanto:

$$\underbrace{P_x x + P_y y}_{Gasto} \leq \underbrace{I}_{Renta}$$

Representando dicha restricción presupuestaria:



Siendo el área sombreada el conjunto asequible que determina las distintas combinaciones de bien *x* e *y* que puede permitirse el consumidor dada su renta. Calculemos a continuación la pendiente de la restricción presupuestaria:

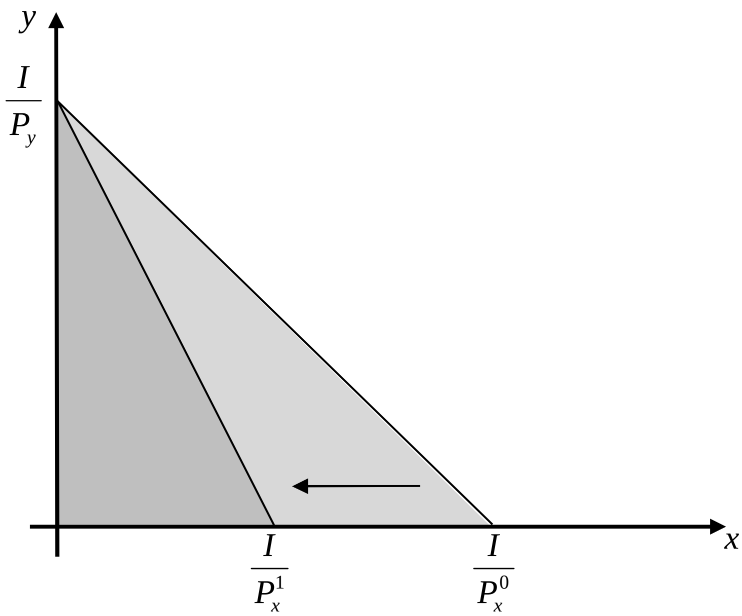
$$P_x^0 x + P_y y = I \rightarrow y = \frac{I}{P_y} - \frac{P_x^0 x}{P_y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P_x^0}{P_y}$$

Si el precio del bien x aumenta, entonces $P_x^1 > P_x^0$, por lo que la pendiente será ahora:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P_x^1}{P_y}$$

Siendo por tanto, mayor en valor absoluto (el numerador es ahora más grande). Finalmente, representando de nuevo la restricción presupuestaria y el conjunto asequible nuevo.



Claramente se observa como el nuevo conjunto asequible ha disminuido (área sombreada más oscura), confirmándose que la pendiente ahora es mayor, y como el punto de corte con el eje de ordenadas ha variado.

8.- Si la renta del consumidor disminuye, entonces:

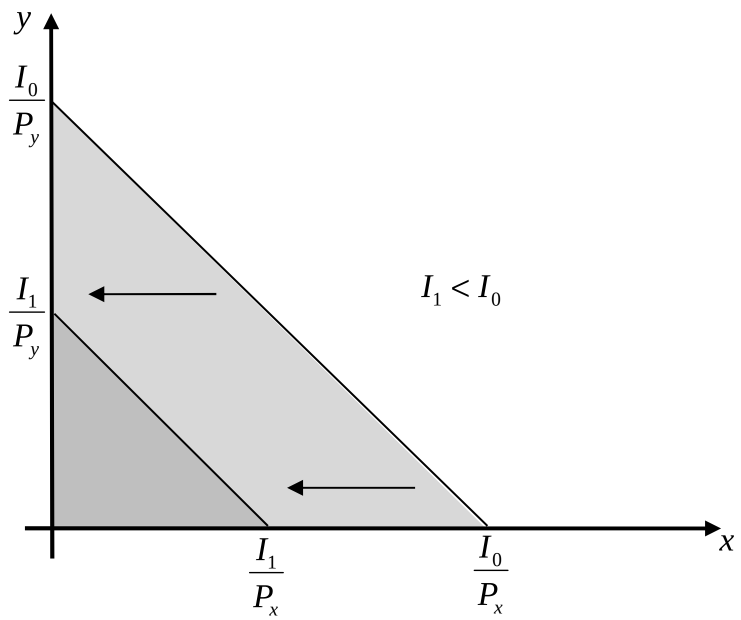
a) El conjunto asequible disminuye.
b) La pendiente de la restricción presupuestaria no varía.
c) La restricción presupuestaria se desplazará de forma paralela hacia la izquierda.
d) Todas las anteriores. ✓

Solución: De la pregunta anterior sabemos que la pendiente de la restricción presupuestaría es el cociente de los precios cambiado de signo:

$$P_x^0 x + P_y y = I \rightarrow y = \frac{I}{P_y} - \frac{P_x^0 x}{P_y}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P_x^0}{P_y}$$

Por tanto, sea cual sea la renta disponible por el consumidor, la pendiente permanecerá inalterable. Sin embargo, si existen cambios en el conjunto asequible, ya que los puntos de corte con el eje de ordenadas y de abscisas, serán distintos. Si representamos la restricción presupuestaria antigua junto con la nueva que incorpora la nueva renta:



Por tanto, la restricción presupuestaria se desplaza hacia la izquierda reduciendo el conjunto asequible.

9.- Si la curva de Engel tiene pendiente negativa, el bien es:

a) Complementario.
b) Sustitutivo.
c) Normal.
d) Inferior. ✓

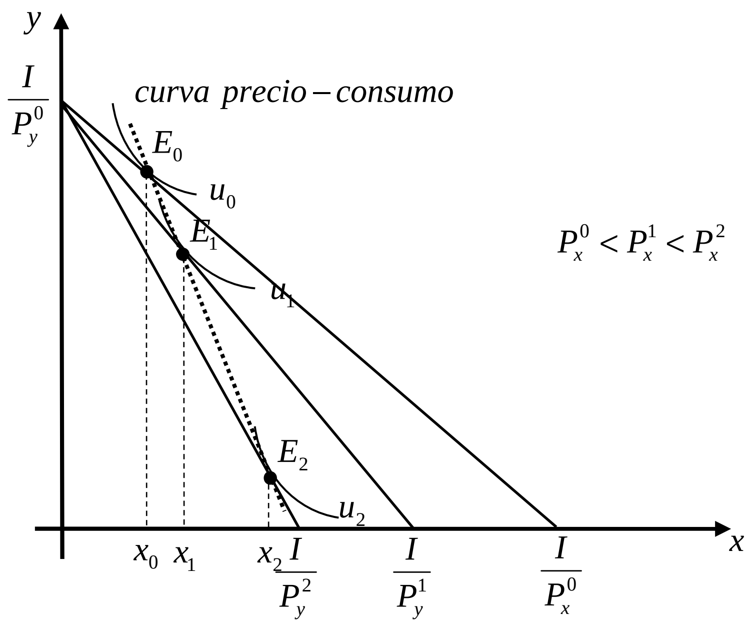
Solución: La curva de Engel, es una curva que relaciona renta y cantidad manteniéndose el precio constante. Por lo tanto, en esta pregunta ya podemos descartar la opción a y b, ya que si un bien es complementario o sustitutivo tiene su origen en la relación con otro bien, no con la renta.

Recordemos que un bien inferior, es aquel cuya demanda tiene un comportamiento inverso a su renta. Así cuando esta aumenta, la demanda disminuye y viceversa. Por tanto, la pendiente de la curva que relacione ambas variables (cantidad y renta) debe de ser negativa.

10.- La curva precio-consumo de un bien Giffen:

a) Tiene pendiente negativa. ✓
b) Tiene pendiente positiva.
c) Es nula.
d) Ninguna de las anteriores.

Solución: Un bien Giffen, es un tipo de bien inferior, con la particularidad de que su demanda aumenta cuando aumenta el precio de dicho bien y viceversa. Calculemos la curva precio-consumo:



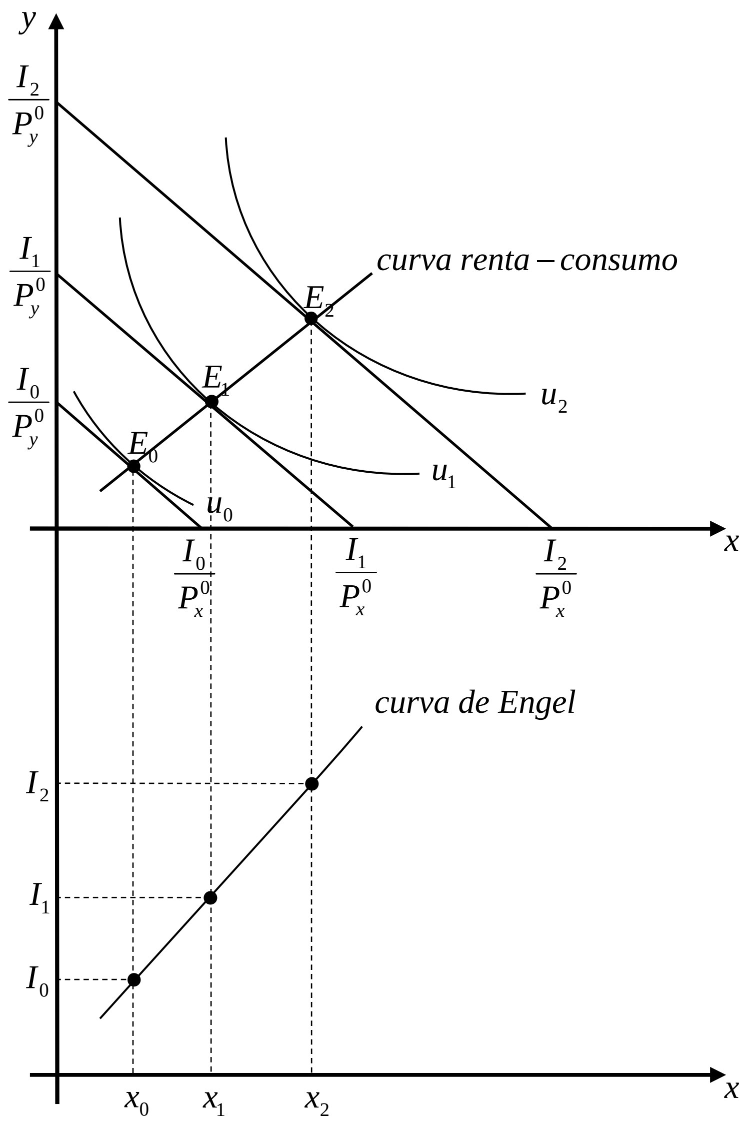
Claramente la curva precio-consumo del bien *x* tiene pendiente negativa. Como vemos, al aumentar el precio, la restricción presupuestaria se desplaza no paralelamente hacia la izquierda, provocando un nuevo punto de equilibrio que genera una nueva cantidad demandada de *x* (menor).

11.- Si la curva renta consumo del bien *x* tiene pendiente positiva:

a) La curva de Engel tiene pendiente positiva.
b) Al aumentar la renta, aumenta el consumo del bien *x*.
c) El bien *x* es un bien normal.
d) Todas las anteriores. ✓

Solución:

Obtengamos gráficamente una curva renta consumo con pendiente positiva y calculamos también la curva de Engel derivada de ella.

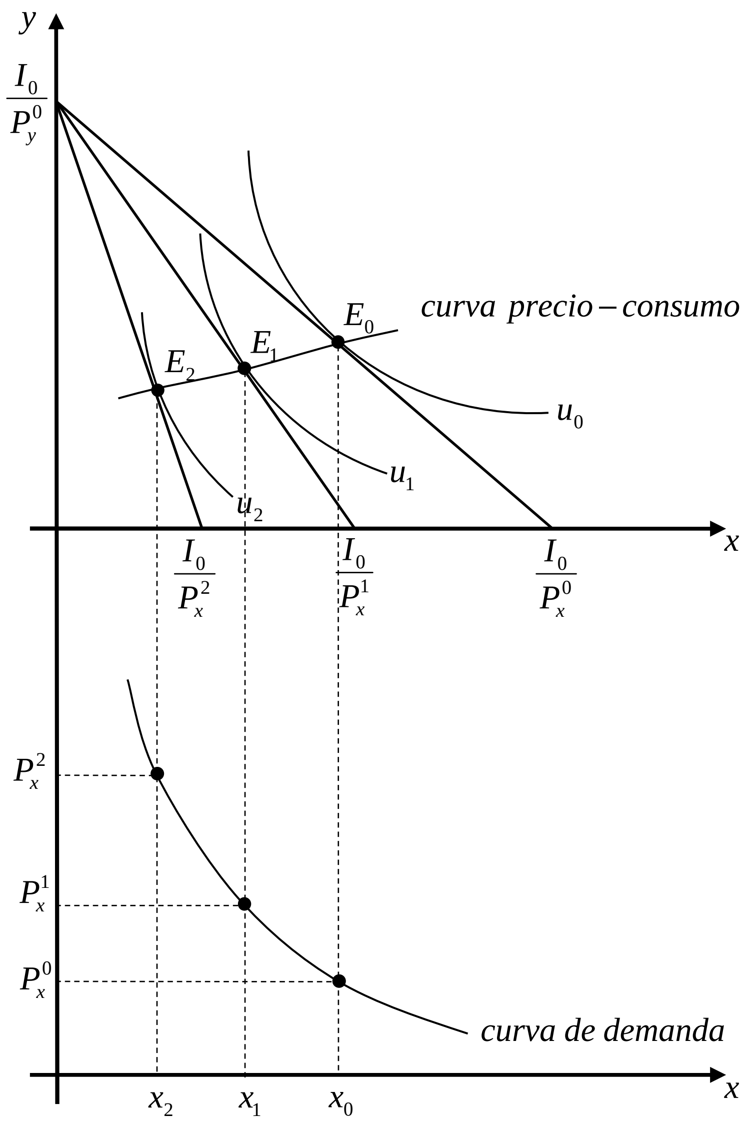


Claramente, la curva de Engel tiene pendiente positiva, es decir, conforme aumenta la renta, aumenta la cantidad demandada, luego se trata de un bien normal y todas las respuestas son correctas.

12.- A lo largo de la curva de demanda de un individuo:

a) La utilidad del consumidor es máxima
b) La utilidad del consumidor es constante
c) La utilidad del consumidor varía
d) Las respuestas a) y c) son correctas. ✓

Solución:



Como se observa, la curva de demanda está formada por combinaciones de precio y cantidad, donde el consumidor se encuentra en equilibrio, es decir, donde dada la renta y los precios, maximiza su utilidad. Por tanto, en todos los puntos de la curva de demanda, el consumidor estará maximizando su utilidad, no obstante, está varía, en función de la renta y los precios, por lo que la respuestas correctas con la *a* y la *c*.

13.- Si la renta monetaria de un individuo se duplica y los precios de ambos bienes *x* e *y* se triplican, entonces, la restricción presupuestaria:

a) No varía.
b) Se desplaza paralelamente hacia la izquierda. ✓
c) Se desplaza paralelamente hacia la derecha.
d) Ninguna de las anteriores.

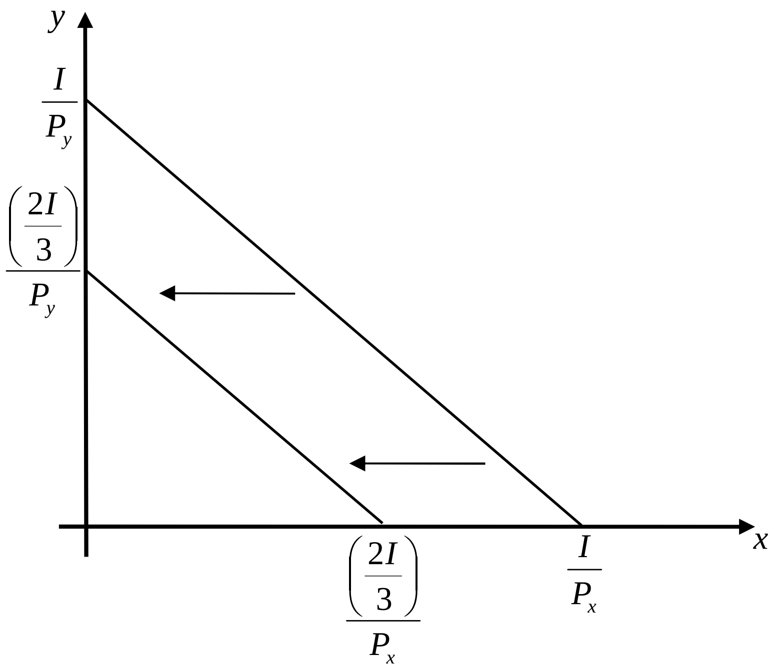
Solución: Con una sencilla operación podemos dar solución a la pregunta. Sea la restricción presupuestaria inicial:

$$P_x x + P_y y = I$$

Si los precios se triplican y la renta se duplicara entonces:

$$(3P_x)x + (3P_y)y = (2I) \rightarrow 3(P_x x + P_y y) = 2I \rightarrow P_x x + P_y y = \frac{2I}{3}$$

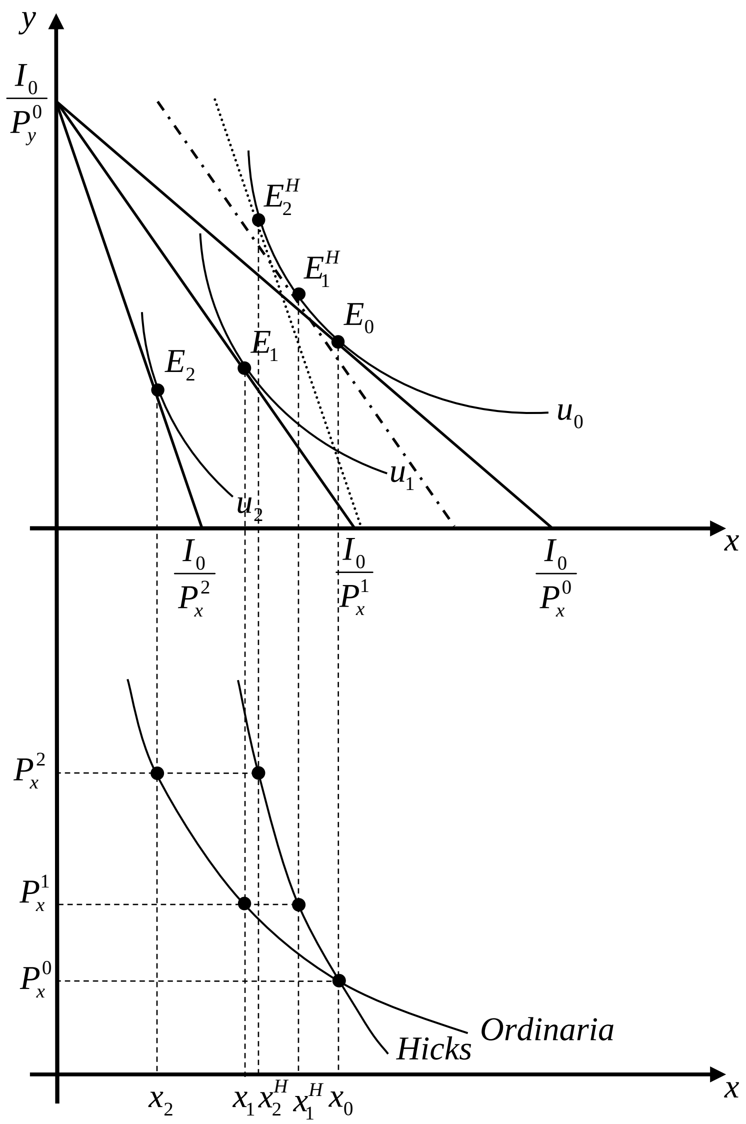
Es decir, la nueva restricción presupuestaria dispone ahora de una renta menor ya que $\frac{2I}{3} < I$. Y ya sabemos, que si la renta disminuye, la pendiente de la restricción no varía, pero si se produce un desplazamiento paralelo hacia la izquierda. Veámoslo de forma gráfica:



14.- En la curva de demanda de *Hicks*, se supone que:

a) La renta real se mantiene constante.
b) La utilidad se mantiene constante. ✓
c) La renta monetaria se mantiene constante.
d) Ninguna de las anteriores.

Solución: Una curva de demanda, relaciona básicamente precio y cantidad. Vamos a calcular gráficamente dicha curva (y también la ordinaria), ya que nos será de gran ayuda.

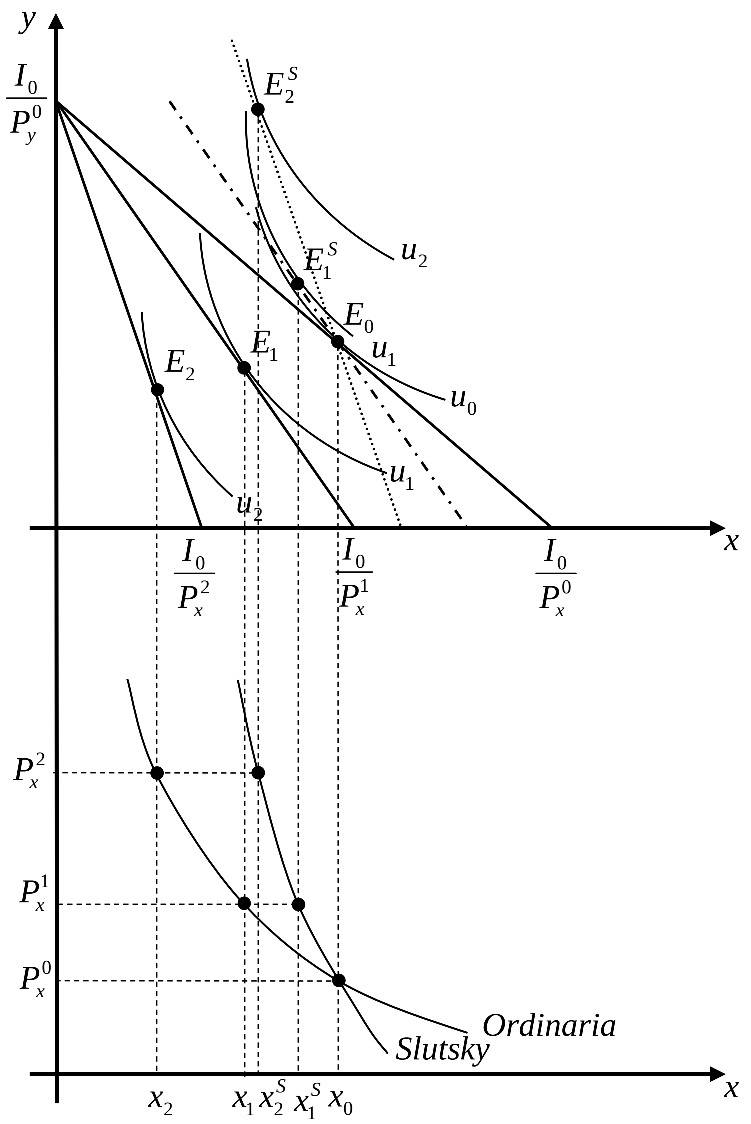


Vemos que los puntos de equilibrio d, E_2^H son puntos tangentes a la curva de indiferencia inicial (utilidad inicial), dados los precios $\left(P_x^1, P_y^0\right)$ y $\left(P_x^2, P_y^0\right)$respectivamente. Por tanto, parece claro, que en la curva de demanda de *Hicks* o también llamada curva de demanda compensada, la utilidad permanece constante.

15.- Si el bien es normal, y el precio de dicho bien aumenta, entonces, la curva de demanda de *Slutsky* es:

a) Más inelástica.
b) Menos inelástica. ✓
c) Es independiente.
d) Ninguna de las anteriores.

Solución: Obtengamos gráficamente la curva de demanda de *Slutsky*.

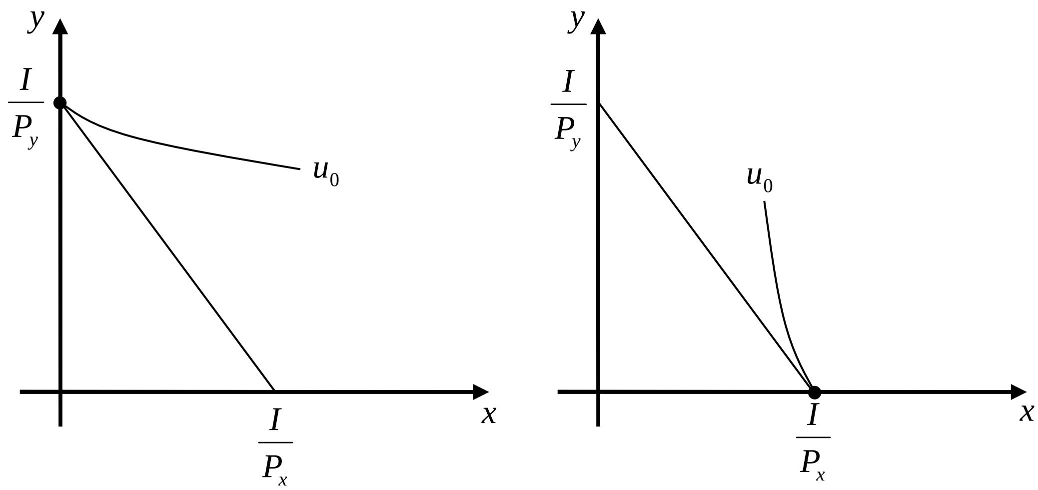


Los puntos de equilibrio E_1^S, E_2^S son puntos tangentes a distintas curvas de indiferencia, de restricciones presupuestarias donde dados los precios $\left(P_x^1, P_y^0\right)$ y $\left(P_x^2, P_y^0\right)$ se ha "variado" la renta (renta de *Slutsky*) para poder mantenerse en la combinación inicial $\left(x_o, y_0\right)$ (por eso las dos nuevas restricciones pasan por el punto E_0). Claramente la curva de demanda de *Slutsky* es más inelástica que la demanda ordinaria.

16.- En una solución de esquina la *RMS* es:

a) Igual al cociente de los precios
b) Inferior al cociente de los precios (en valor absoluto) si esta solución se encuentra en el eje de ordenadas
c) Superior al cociente de los precios (en valor absoluto) si esta solución se encuentra en el eje de abscisas
d) Las respuestas b) y c) son correctas. ✓

Solución: Dibujemos los casos donde la solución de esquina se da tanto en el eje de ordenadas como en el de abscisas:



Si sabemos que la RMS es la pendiente de la curva de indiferencia con el signo cambiado, y que el cociente de los precios, es la pendiente de la restricción (también con el signo cambiado), entonces, cuando la solución de esquina se encuentra en el eje de ordenadas, se observa que la pendiente de la restricción es mayor que la pendiente de la curva de indiferencia (en valor absoluto). Análogamente, en el caso de que la solución de esquina se encuentre en el eje de abscisas, el resultado es justamente el contrario.

17.- La curva precio-consumo de un bien:

a) Está formada por puntos donde la pendiente de la restricción es igual a la pendiente de la curva de indiferencia.
b) Se cumple la ley de las utilidades marginales ponderadas.
c) Está formada por la unión de las combinaciones de bienes que maximizan la utilidad cuando se mantienen constante la renta y el precio de los otros bienes.
d) Todas las anteriores. ✓

Solución: Ya hemos visto en otras preguntas la curva precio consumo (pregunta 7 u 8). Como se observa, está forma por puntos de equilibrios, que recordemos son puntos donde la pendiente de la restricción es igual a la pendiente de la curva de indiferencia, además la diferencia radica en la variación en el precio manteniéndose todo lo demás constante. Finalmente, podemos señalar que la ley de las utilidades marginales ponderadas muestra que el individuo maximizará la utilidad cuando la satisfacción obtenida por la última unidad monetaria gastada en cada bien sea idéntica, es decir:

$$\frac{UMa_x}{P_x} = \frac{UMa_y}{P_y}$$

Operando:

$$\frac{UMa_x}{UMa_y} = \frac{P_x}{P_y} \rightarrow -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{curva} = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{restriccion} \rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{curva} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{restriccion}$$

18.- El gobierno, debido al déficit público imperante ha decidido aumentar el IVA con el fin de incrementar la recaudación presupuestaria y reducir dicho déficit. Los asesores del presidente, muy interesados en las consecuencias de esta medida, están interesados en calcular por un lado, las consecuencias de esta medida, y por otro lado, estarían dispuestos a estudiar que impuestos reducir para compensar esta subida. Dado sus estudios de microeconomía ¿qué le recomendaría a dichos asesores?:

a) Calcular la curva de demanda ordinaria o walrasiana.

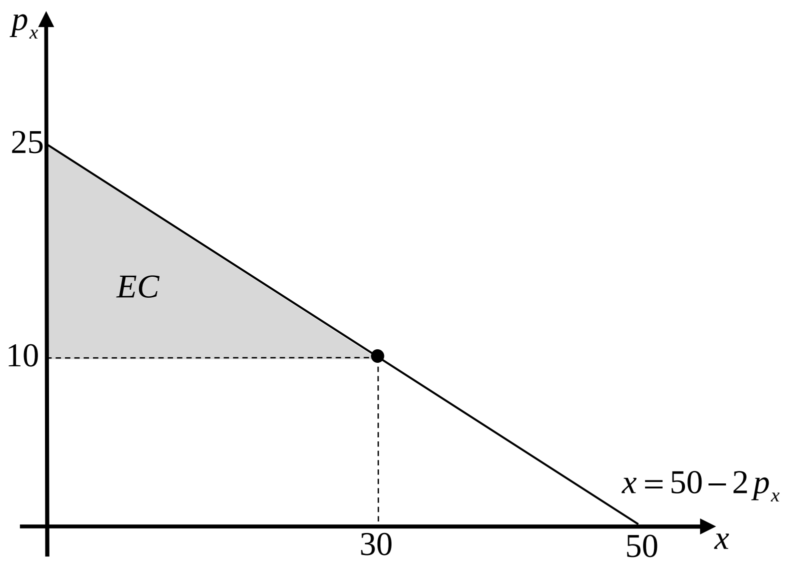
b) Calcular la curva de demanda compensada o de Hicks.
c) Calcular ambas curvas de demanda. ✓
d) Ninguna de las anteriores.

Solución: La curva de demanda ordinaria o walrasiana, mide como varía la cantidad demandada al variar el precio suponiendo constantes la renta y los precios de los demás bienes, y la curva de demanda compensada o de Hicks, mide lo mismo pero permaneciendo constante la utilidad y el precio de los demás bienes. Por tanto, la primera pregunta se resuelve, claramente haciendo uso de la curva de demanda ordinaria. Sin embargo, para dar solución a la segunda deberíamos de hacer uso de la curva de demandada compensada. Esta, mide las cantidades que estarían dispuestos a demandar los consumidores si fueran "compensados" por las consecuencias de la subida del IVA (claramente es un efecto renta, ya que la renta real de los individuos se ve reducida por la subida impositiva). Esta "compensación", podría venir determinada, entre otras políticas económicas, por una reducción de otros impuestos tal como nos dice el enunciado.

19.- Si la función de demanda de un determinado bien, viene dada por $x=50-2p_x$ y se sabe que el precio del bien asciende a 10 unidades monetarias, entonces el excedente del consumidor será:

a) No es posible calcularlo con los datos que disponemos.
b) 100
c) 225. ✓
d) Ninguna de las anteriores

Solución: Recordemos que el excedente del consumidor no es más que la diferencia entre lo que está dispuesto a pagar un individuo por un bien y lo que realmente paga por el. Así, si nos centramos en nuestro ejercicio, parece claro que el individuo estaría dispuesto a pagar 25 unidades del bien x (simplemente despejando p_x cuando $x=0$), a pesar de que el precio del bien asciende a 10 unidades monetarias. Si representamos la función de demanda junto al precio del bien:



Por tanto, el excedente del consumidor es el área sombrada. Al ser el área un triángulo, el cálculo resulta extremadamente sencillo, ya que como sabemos, su área es:

$$Área = \frac{base \cdot altura}{2}$$

En nuestro ejercicio:

$$\acute{A}rea = \frac{30 \cdot (25 - 10)}{2} = 225$$

Por tanto, el excedente del consumidor asciende a 225. Sin embargo, debemos señalar, que habitualmente, la función de demanda no es recta, por lo que el área resultante no será un triángulo, y por tanto, no será válido el procedimiento descrito con anterioridad. Es por ello, que vamos a calcular el área haciendo uso de las integrales definidas. Como vemos, el área está definida por los precios, siendo el valor mínimo 10 y el máximo 25. Por tanto:

$$Excedente = \int_{10}^{25} (50 - 2p_x)dp_x = \left| 50p_x - p_x^2 \right|_{10}^{25} = \left(50(25) - (25)^2\right) - \left(50(10) - (10)^2\right) =$$
$$= (1250 - 625) - (500 - 100) = 225$$

20.-Si la curva de demanda dos individuos son: $x_D = 10 - 2p_x ; x_D = 6 - 3p_x$ **la curva de demanda de mercado será::**

a) $x_D = 16 - 5p_x$.

b) $x_D = \begin{cases} 10 - 2p_x & si\ p_x \geq 2 \\ 16 - 5p_x & si\ p_x \leq 2 \end{cases}$. ✓

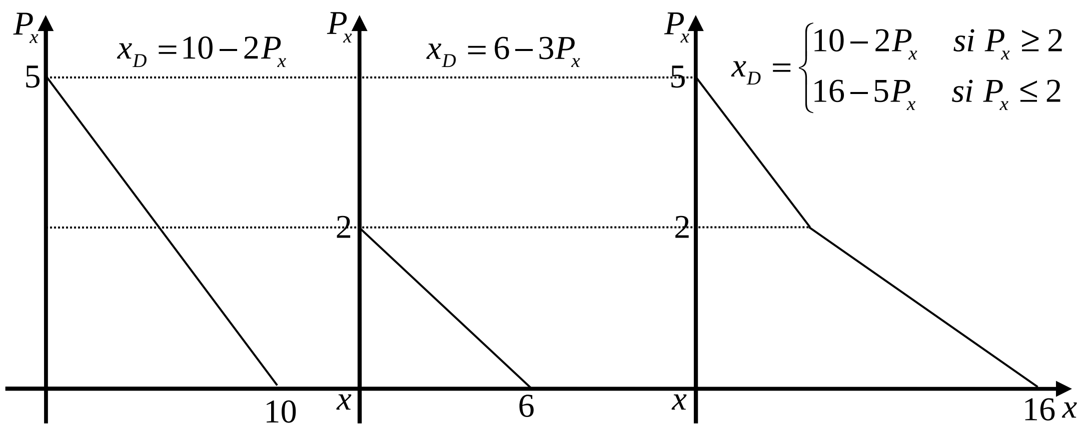
c) $x_D = 16 - 5p_x \quad si\ p_x \geq 2$.

d) Ninguna de las anteriores.

Solución: El lector, de forma inmediata puede estar tentado a sumar de forma horizontal ambas curvas de demanda, por lo que:

$$X_D = x_D^1 + x_D^2$$
$$X_D = (10 - 2p_x) + (6 - 3p_x) = 16 - 5p_x$$

Sin embargo, si representáramos las curvas de demanda individuales y la de mercado veríamos que:

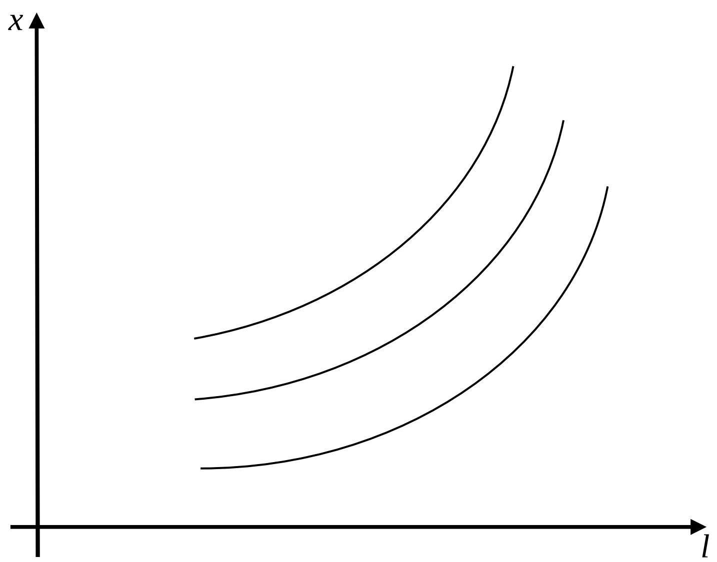


Existe un quiebre cuando el precio del bien x asciende a 2 unidades, cuando el precio es mayor, solo el individuo 1 podrá demandar cantidad, mientras que cuando es inferior, ambos individuos podrán demandar. Por tanto, cuando el precio es inferior a 2 unidades monetarias, la curva de demanda de mercado será la suma de las curvas de demanda de cada individuo, no obstante, cuando supere las dos unidades, la curva de demanda de mercado coincidirá con la del individuo 1.

21.- Si la curva de indiferencia de la función de utilidad que tiene como argumentos el bien *x* y el trabajo *l*, su pendiente será:

a) Positiva. ✓
b) Negativa.
c) Nula.
d) Ninguna de las anteriores.

Solución: La utilidad del consumidor aumentará conforme el número de bien



22.- Si el individuo no dispone de renta no salarial, dependiendo la renta exclusivamente del salario, entonces, la restricción presupuestaria:

a) La pendiente varía.
b) La pendiente no varía.
c) La restricción presupuestaría se desplazará paralelamente hacia la izquierda (o hacia abajo).
d) Las respuestas a) y c) son correctas. ✓

Solución: La renta del consumidor se puede dividir según su origen del siguiente modo:

$$I = \underbrace{\bar{I}}_{\substack{renta\\no\\salarial}} + \underbrace{wl}_{\substack{renta\\salarial}}$$

La restricción presupuestaria para el consumidor como oferente de trabajo viene dada por:

$$P_x x \leq I \rightarrow P_x x \leq \underbrace{\bar{I}}_{\substack{renta\\no\\salarial}} + \underbrace{wl}_{\substack{renta\\salarial}} \rightarrow P_x x \leq I \rightarrow P_x x \leq \underbrace{\bar{I}}_{\substack{renta\\no\\salarial}} + \underbrace{w(24-o)}_{\substack{renta\\salarial}}$$

Si no existiera renta no laboral, entonces:
$P_x x \leq wl \rightarrow P_x x \leq w(24-o)$

Calculamos la pendiente de cada restricción:

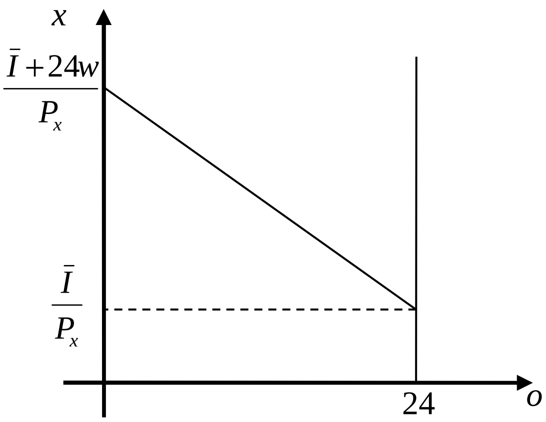
$P_x x \leq \bar{I} + w(24-o)$ $\qquad$ $P_x x \leq w(24-o)$

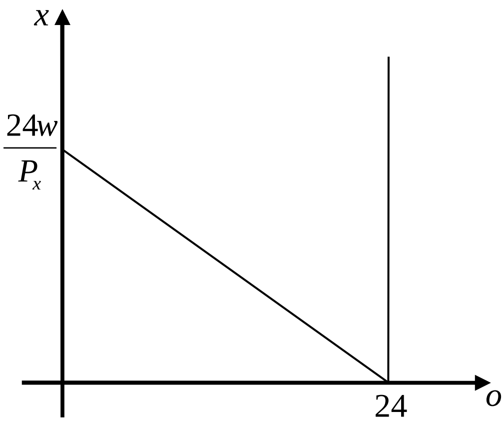
Despejando *x*:

$$x = \frac{\bar{I} + w(24-o)}{P_x} \qquad x = \frac{w(24-o)}{P_x}$$

$$\frac{dx}{do} = \frac{-w}{P_x} \qquad \frac{dx}{do} = \frac{-w}{P_x}$$

Por tanto, las pendientes son idénticas. Y representando ambas restricciones:





Vemos como la pendiente no ha variado, y que simplemente la restricción presupuestaria se ha desplazado hacia abajo.

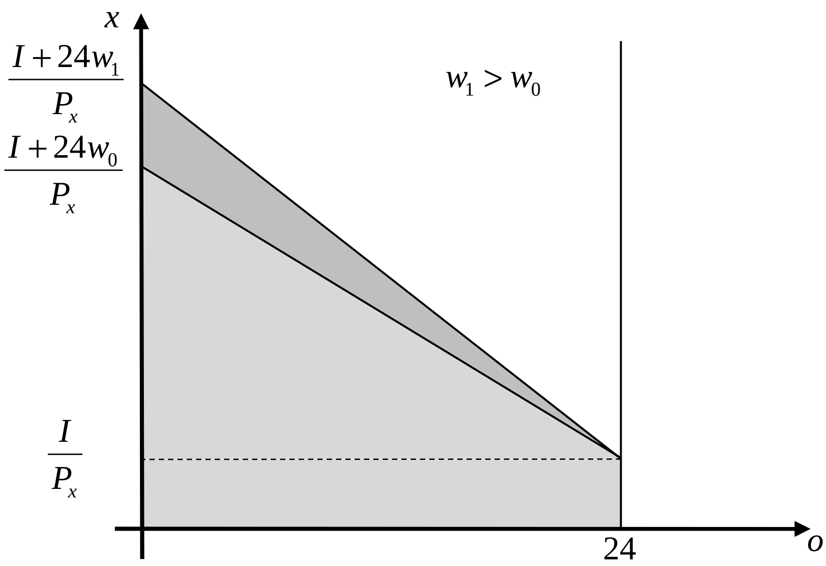
23.- Ante un aumento del salario por hora:

a) La pendiente aumenta y el conjunto asequible disminuye.
b) La pendiente aumenta y el conjunto asequible aumenta. ✓
c) La pendiente disminuye y el conjunto asequible disminuye.
d) La pendiente disminuye y el conjunto asequible aumenta.

Solución: Haciendo uso del ejercicio anterior, claramente el salario afecta a la pendiente ya que esta es:

$$\frac{dx}{do} = \frac{-w}{P_x}$$

Así, conforme el salario aumenta, la pendiente de la restricción (en valor absoluto también aumentará). Representando en un mismo gráfico la restricción con distintos salarios:

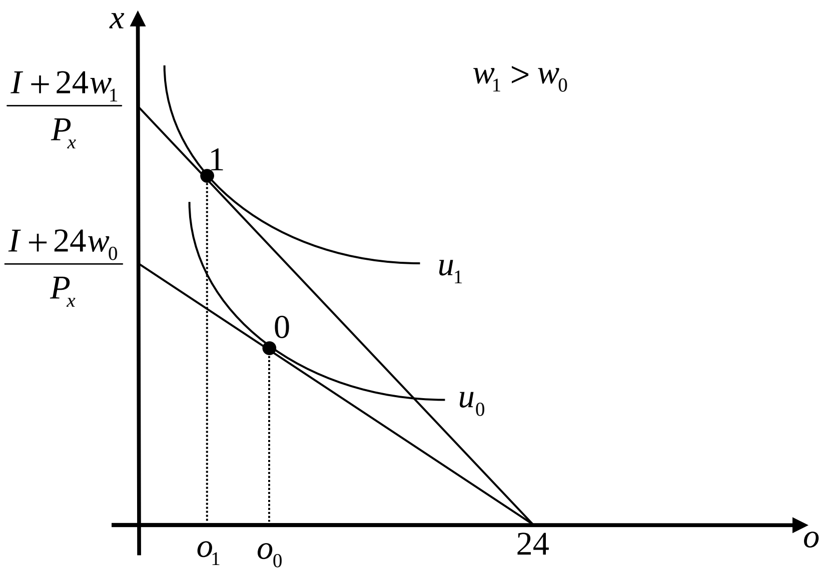


Rotundamente el conjunto asequible aumenta (siendo ahora el anterior, marcado con gris claro, junto con el nuevo, que es el anterior más el área en gris oscuro).

24.- Si al subir el salario, el número de horas trabajadas disminuye y el consumo del bien compuesto aumenta, entonces:

a) *ES>ER.* ✓
b) *ES<ER.*
c) *ES=ER.*
d) Ninguna de las anteriores.

Solución:



Si el salario aumenta, el coste de oportunidad del ocio aumenta, y se sustituirá dicho ocio por trabajo (así el consumidor dispondrá de mayor renta, y por tanto, mayor consumo). Claramente el efecto sustitución (*ES*) domina sobre el efecto renta (*ER*) ya que se ha sustituido ocio por trabajo (*ES*), a pesar de que al aumentar el salario, la renta real aumenta y el consumidor podrá aumentar sus horas de ocio sin necesidad de incrementar el número de horas trabajadas (*ER*).

25.- Un determinado individuo dedica una serie de horas diarias a trabajar utilizando el resto de tiempo a ocio (incluyendo las horas de sueño). Sin embargo, debido a los buenos resultados de la empresa, ha visto como su salario ha aumentado un 20 %, ante esta situación, el individuo ha decidido aumentar el número de horas trabajadas, por tanto:

a) El efecto sustitución domina sobre el efecto renta. ✓
b) El efecto renta domina sobre el efecto sustitución
c) El efecto sustitución y el efecto renta no tienen nada que ver.
d) Ninguna de las anteriores

Solución:

Si el efecto sustitución dominara sobre el efecto renta, al aumentar el salario, el ocio se encarecería (coste de oportunidad), y por tanto, se sustituiría ocio por trabajo (la renta del individuo se deriva del número de horas trabajadas). Sin embargo, si fuera al contrario, al aumentar el salario el individuo vería aumentada su renta real, y por tanto, podría alcanzar curvas de indiferencias más altas, por tanto, dedicaría más tiempo a ocio restándosela al número de horas trabajadas. Por lo que la respuesta correcta es la a).