Tema 4. El consumidor como demandante de bienes y servicios

4.1. Introducción

Este capítulo presenta los elementos básicos de la teoría de la demanda de bienes y servicios, con el objetivo de desvelar cuáles son sus determinantes como paso previo a la búsqueda de proposiciones, esto es, de ciertas previsiones sobre los efectos que sobre las cantidades demandadas tienen los cambios en estos determinantes, labor esta que constituye el núcleo del próximo capítulo. Para alcanzar este objetivo, en este tema analizaremos el problema al que se enfrenta un consumidor representativo.

Sobre la base del supuesto de racionalidad, el problema de elección del consumidor, ya sea en su faceta de demandante de bienes y servicios o en su papel de oferente de trabajo (tal y como analizaremos más adelante en el tema 6), se modelizará en términos de una conducta optimizadora. En particular, para modelizar la demanda de bienes y servicios, supondremos que el consumidor asignará su renta entre los diferentes bienes de forma que la combinación óptima (es decir, las cantidades que decidirá demandar de cada uno de los bienes) ha de permitirle obtener la mayor satisfacción posible.

Por tanto, dada la existencia de *n* bienes, el consumidor ha de determinar la cantidad de cada uno de estos bienes que desea demandar para que la satisfacción que estos bienes le reportan sea lo mayor posible. Con este objetivo, si supusiéramos que el consumidor siempre prefiere más a menos, es decir guiado bajo el principio de *cuanto más mejor*, la solución sería trivial en ausencia de limitaciones a la adquisición de bienes: el consumidor elegiría una cesta con cantidades infinitas de todos los bienes.

Sin embargo, este modelo no sería realista en tanto en cuanto el consumidor no puede adquirir todo lo que desea –nos referimos aquí al problema de *escasez y elección*, esto es, el origen de los problemas económicos–. En realidad, supondremos que las cestas de bienes y servicios que puede adquirir están condicionadas por la renta de que dispone y por los precios de los bienes y servicios, de forma que el gasto total en el que ha de incurrir para adquirir las cantidades demandadas de los diferentes bienes ha de ser inferior a la renta de que dispone. Así pues, el problema del consumidor como demandante de bienes y servicios puede formalizarse a través de un problema de optimización restringida: el consumidor ha de elegir una combinación de los diferentes bienes y servicios a su alcance –variables de elección– con la que su satisfacción se haga máxima –función objetivo del problema– pero condicionado en esta elección a que sólo puede elegir de entre aquellas combinaciones que le resultan asequibles, esto es, de entre aquellas cuyo gasto es inferior a la renta de que dispone –restricción del problema–.

Al análisis parsimonioso de los diferentes elementos del problema y de la solución del mismo, a través de aproximaciones alternativas, se dedica este primer capítulo de la teoría de la demanda.

Esquema del tema

4.1. Introducción

4.2. La conducta del consumidor y supuestos acerca de sus preferencias

4.3. El planteamiento del problema del consumidor

- 4.3.1. La función objetivo: las preferencias y la función de utilidad
- 4.3.2. La pendiente de las curvas de indiferencia y la relación marginal de sustitución
- 4.3.3. Funciones de utilidad y mapas de curvas de indiferencia especiales

4.4. La restricción presupuestaria

4.5. La solución del problema del consumidor

- 4.5.1. La solución gráfico-analítica
- 4.5.2. Un caso especial: soluciones de esquina
- 4.5.3. Solución del problema a través de la función de Lagrange
- 4.5.4. Interpretación del multiplicador en el problema de maximización de utilidad del consumidor
- 4.5.5. La interpretación económica de la solución del problema del consumidor

Apéndice: Generalización para *n* bienes

4.2. La conducta del consumidor y supuestos acerca de sus preferencias

Los objetos de la elección

Las cantidades demandadas de bienes y servicios x_i, serán los objetos de la elección del consumidor, de acuerdo con la conducta descrita en la introducción. Si denotamos las combinaciones de bienes o cestas a través de vectores del tipo $(x_1,...,x_n)$, en los que sus componentes, $x_i \geq 0$, son las cantidades demandadas de cada uno de los *n* bienes que componen la cesta.

En cualquier caso, y sin que ello suponga pérdida de generalidad, a lo largo del capítulo trabajaremos con cestas de dos bienes (x, y), para facilitar las representaciones gráficas en el plano de las variables de elección.

Supuestos acerca de los gustos: la relación de preferencia

Para el desarrollo de nuestro modelo, necesitamos definir una función objetivo, algo que nos permita saber si una cesta es preferida o indiferente a otra, para hallar la combinación óptima y hacerla compatible con el supuesto de racionalidad en la conducta del consumidor.

En otras palabras, aunque cada individuo tendrá sus propias preferencias subjetivas y distintas, la relación de preferencias ha de verificar una serie de propiedades de coherencia que exponemos a continuación y que servirán para configurar la forma de la función objetivo del problema del consumidor. Estas propiedades y sus implicaciones son analizadas a continuación:

Supuesto 1: Completitud

Un supuesto central de nuestro modelo será el que el consumidor siempre será capaz de expresar preferencia o indiferencia entre cualquier par de combinaciones, es decir, siempre será capaz de decir *prefiero la cesta A* $-(x_A, y_A)-$ *a la cesta B* $-(x_B, y_B)-$ o *soy indiferente entre la combinación A y la B,* si las dos le resultan igual de atractivas. Este supuesto garantiza que la relación de preferencia no tiene "agujeros", es decir, casos en los que no es aplicable.

Supuesto 2: Coherencia/transitividad

Si una cesta *A* es preferida a una cesta *B*, y esta última a una cesta *C*, la combinación *A* ha de ser preferida a la *C*.

Supuesto 3: Reflexividad

Toda cesta es indiferente a sí misma. De este supuesto se colige que toda combinación pertenece a un conjunto de indiferencia formado por aquellas combinaciones que son indiferentes a ella, y que al menos contiene a ella misma.

Supuesto 4: Como los bienes son "deseables", el consumidor siempre prefiere más a menos

Este supuesto, también llamado de *no saturación*, implica que si una combinación *A* contiene más de uno de los *n* bienes que contiene y no menos de los *n-1* restantes que una combinación *B*, la combinación *A* será preferida a la *B*. Este supuesto tiene una serie de implicaciones que podemos analizar, con ayuda de la figura 1 a continuación, para el caso de cestas compuestas por solo dos bienes (x, y).

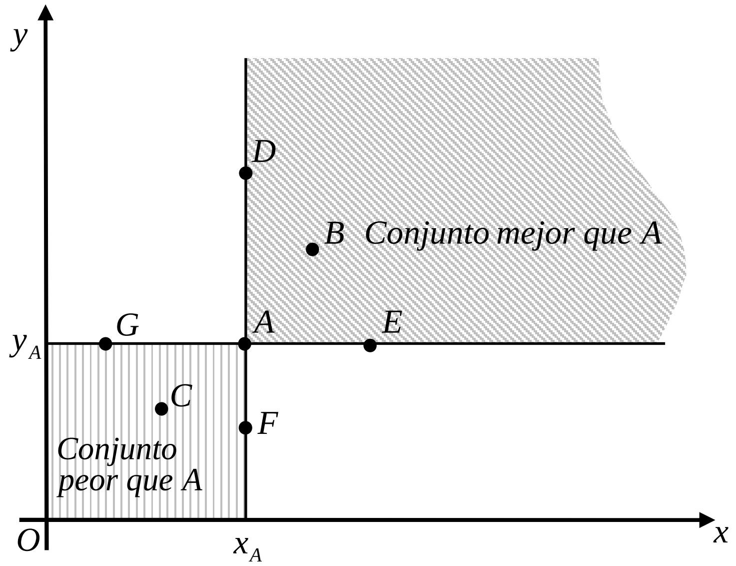

Figura 1: Conjunto mejor y conjunto peor que una combinación dada

En esta figura hemos representado la combinación *A*, compuesta por las cantidades (x_A, y_A) de ambos bienes. Convendremos que siguiendo el supuesto de que una combinación que contenga mayores cantidades que la combinación *A* de ambos bienes, como le ocurre a la combinación *B*, (x_B, y_B) resultará preferida a la combinación *A*. Fijémonos ahora en una combinación como la *C*, (x_C, y_C) que contiene menos de ambos bienes que la combinación *A*. Convendremos que en este caso, la combinación *A* es preferida a la combinación *C*. Centrémonos ahora en las combinaciones *D* y *E*. La combinación *D* contiene la misma cantidad de bien *x* que la combinación *A*, pero una cantidad superior de bien *y*, de forma que aplicando esta propiedad, resultará preferida a la combinación *A*. Igualmente, la combinación *E* contiene la misma cantidad de bien *y* que la combinación *A*, pero una mayor cantidad de bien *x*, por lo que también ha de resultar preferida a la combinación *A*. Finalmente, la combinación *A* será preferida a las combinaciones del tipo *F* o *G* ya que, estas últimas, conteniendo la misma cantidad que *A* de uno de los bienes, contienen una menor cantidad del otro bien que compone la cesta.

Por tanto, es posible distinguir tres subconjuntos en el gráfico: a) *el conjunto mejor que A*: es decir el conjunto de combinaciones preferidas a *A*, compuesto por combinaciones del tipo *B*, *D* y *E*; b) *el conjunto peor que A*: es decir el compuesto por aquellas combinaciones sobre las que *A* se revela preferida, esto es, combinaciones del tipo *C*, *F* o *G*; y c) el conjunto de *combinaciones indiferentes a la combinación A*, que deben situarse en el área no rayada.

Llegados a este punto, el conjunto de combinaciones indiferentes a una dada ha de situarse en las áreas no rayadas, pero nada garantiza que en un conjunto de indiferencia tenga que haber más de una combinación o que, si hay más de una, ésta tenga que ser una línea continua, hecho este muy conveniente para que nuestra función objetivo se acomode a la estructura de los modelos de optimización con los que pretendemos analizar la conducta de los agentes en la actividad económica.

Así pues, y para dar una forma precisa a estos conjuntos de indiferencia que faciliten la solución del problema del consumidor, se establecen una serie de axiomas o supuestos adicionales.

Supuesto 5: El lugar geométrico de las combinaciones indiferentes a una dada, será una superficie continua y nunca más ancha que un punto singular

En combinación con los cuatro supuestos anteriores, este nuevo supuesto establece dos cosas. En primer lugar, dada una cesta *A*, siempre será posible compensar una reducción de la cantidad de uno de los dos bienes mediante un aumento en la cantidad demandada del otro, de forma que la nueva combinación sea indiferente a la primera. En segundo lugar establece que el conjunto de indiferencia ha de ser una línea. En efecto, el conjunto de combinaciones indiferentes a *A*, no puede ser una banda, ya que en ese caso contendría combinaciones pertenecientes a los conjuntos mejor y peor que *A*.

Supuesto 6: La curva de indiferencia ha de ser estrictamente convexa –su conjunto mejor ha de ser estrictamente convexo–[1]

El supuesto de convexidad estricta supone que, dadas dos combinaciones pertenecientes a una misma curva de indiferencia, cualquier combinación de las pertenecientes al segmento que las une –o *mezcla*[2]– es preferida a cualquiera de ellas y, por tanto, pertenece al conjunto mejor, tal y como se aprecia en la figura 2.

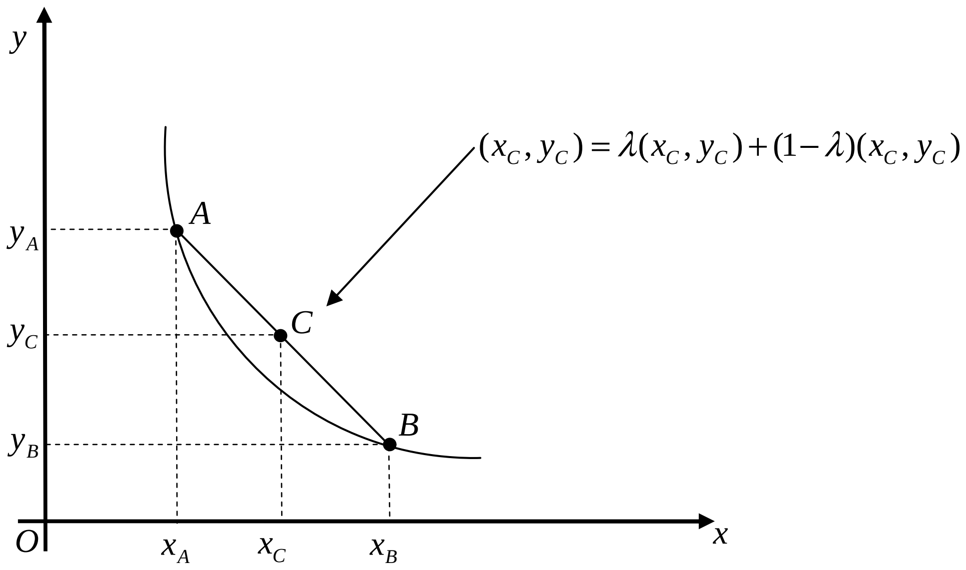

Figura 2: La convexidad del conjunto mejor

Sobre la base de nuestra discusión acerca de los conjuntos mejor, peor e indiferente y por aplicación de los supuestos 5 y 6, la curva de indiferencia de la combinación *A* –el lugar geométrico de las combinaciones que son indiferentes a *A*– admite la representación gráfica de la siguiente figura 3, que llamaremos *curva de indiferencia*:

[1] Este supuesto sobre la curvatura de las curvas de indiferencia responde a una cuestión de conveniencia técnica para la resolución de problemas de optimización, ya que al ser el conjunto asequible convexo, esto garantiza que el óptimo del problema sea un único óptimo local (global). Sin embargo, este supuesto puede relajarse a uno de convexidad no estricta, en el que pueden darse diferentes situaciones incluidas aquéllas en las que la solución del problema no es única.

[2] Una mezcla es una combinación lineal convexa de dos combinaciones. En particular, una combinación lineal convexa de dos cestas $A\ (x_A, y_A)$ y $B(x_B, y_B)$ es una cesta *C* en las que los parámetros de la combinación lineal suman 1, es decir, cualquier combinación perteneciente al segmento que une a las combinaciones *A* y *B*: $(x_C, y_C) = \lambda(x_A, y_A) + (1-\lambda)(x_B, y_B)\ con\ 0 < \lambda < 1$.

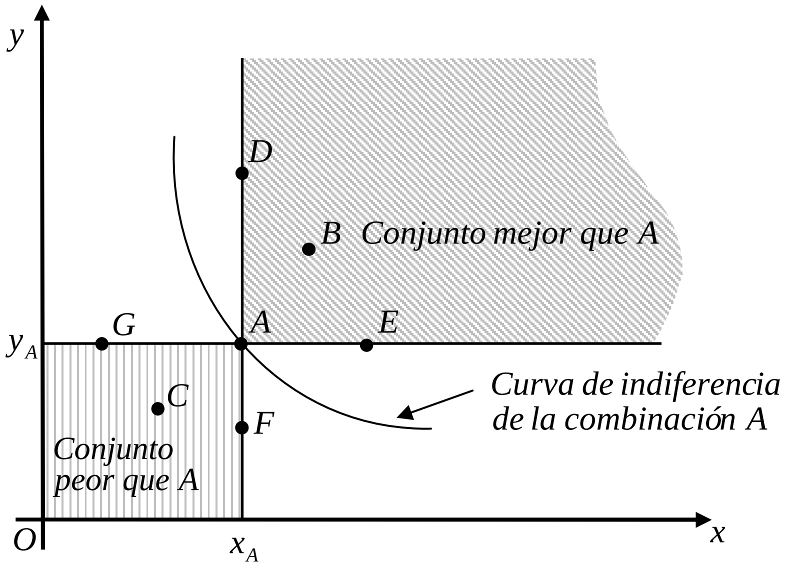

Figura 3: El conjunto de indiferencia de la combinación *A*

En suma, y como consecuencia de los supuestos establecidos, cada combinación pertenece a una curva de indiferencia estrictamente convexa y con pendiente negativa, de forma que los gustos del consumidor, expresados a través de su relación de preferencias, se pueden representar a través de un mapa de curvas de indiferencia en las que los conjuntos más alejados del origen son preferidos a los más cercanos a éste, por aplicación del supuesto de no saturación. La figura 4 a continuación captura esta idea:

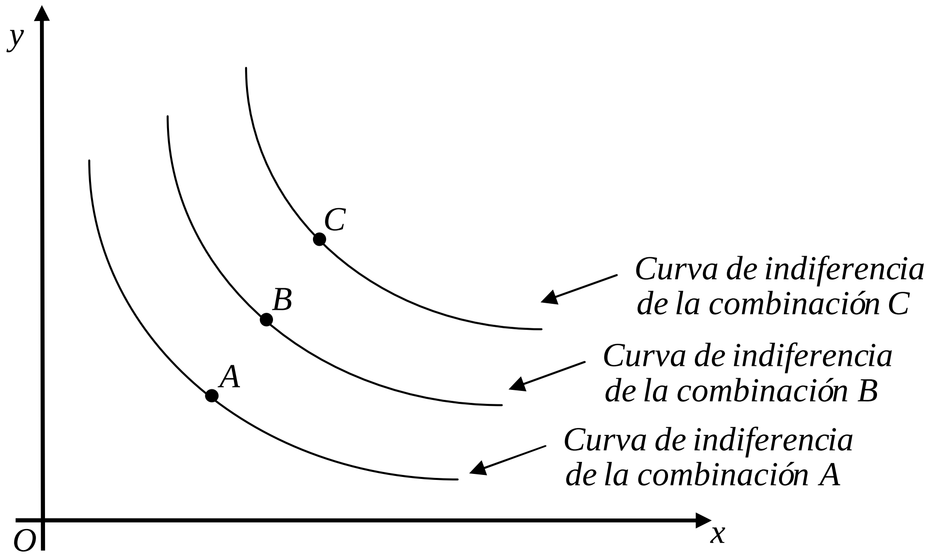

Figura 4: Un mapa de curvas de indiferencia

Estas curvas de indiferencia, tal y como se han definido (estrictamente convexas y con pendiente negativa), poseen dos características importantes: (i) presentan una *relación marginal de sustitución* decreciente; y (ii) no pueden cortarse. Aunque volveremos más adelante sobre esta cuestión, avanzamos que la relación marginal de sustitución entre los dos bienes nos indica cuál es la cantidad de un bien a la que habría que renunciar a cambio de una unidad adicional del otro, de modo que nos movamos entre dos combinaciones indiferentes. En otros términos, para pasar de un punto de la curva de indiferencia *A* a un punto *B*, hemos de renunciar a una cantidad de bien *y*, denotada por Δy con $-\Delta y < 0$ a cambio de disponer de una unidad adicional de *x*, Δx, con $\Delta x = 1$.

Como puede comprobarse en el panel (a) de la siguiente figura –figura 5–, esta relación $RMS_{y,x} = -\Delta y / \Delta x$ es decreciente, ya que a medida que nos desplazamos en sentido descendente a lo largo de la curva de indiferencia, esto es, de izquierda a derecha, la cantidad a la que hay que renunciar de *y*, a cambio de una cierta cantidad de *x*, se hace cada vez menor –compare el paso del punto *A* al *B* con el paso del *B* al *C*–. En otros términos, la pendiente de la curva de indiferencia $\Delta y / \Delta x$ disminuye –se hace menos negativa–.

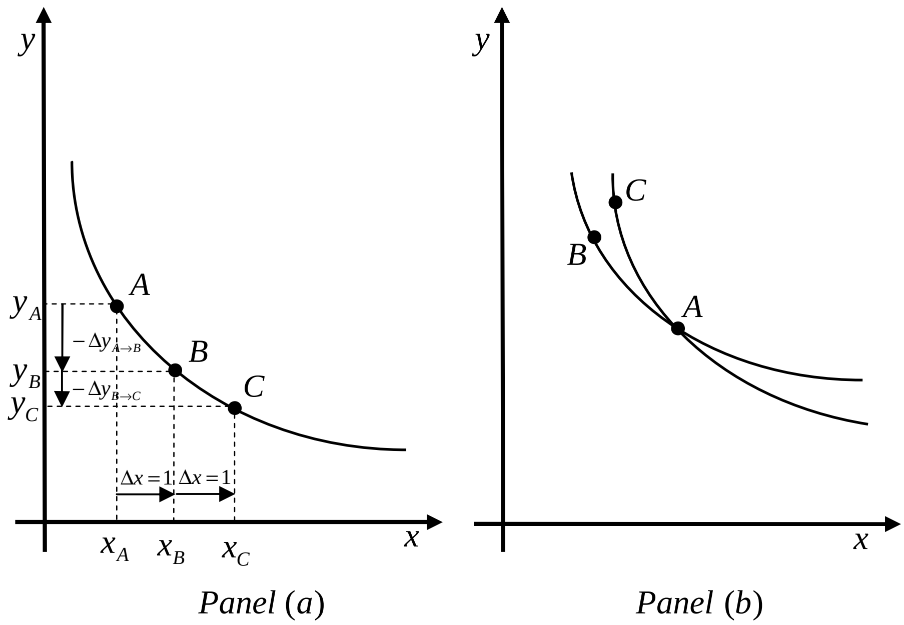

Figura 5: Características de las curvas de indiferencia: RMS decreciente y no pueden cortarse

Además, el lector puede comprobar que estas curvas de indiferencia no pueden cortarse. Observe cómo en el panel (b) de la figura anterior, al permitir que se corten dos curvas de indiferencia, se incumpliría el supuesto de transitividad ya que si *A* es indiferente a *B* y a *C*, al pertenecer simultáneamente a las curvas de indiferencia que contienen a estas dos combinaciones, *C* debería ser indiferente a *B*, y no preferida a *B*, como ha de resultar del hecho de que *C* contiene cantidades mayores de ambos bienes que la cesta *B*.

4.3. El planteamiento del problema del consumidor

De forma general, diremos que el consumidor como demandante de bienes y servicios ha de decidir de entre las diferentes combinaciones de bienes y servicios que puede adquirir, en función de los precios de éstos y de la renta de que dispone, aquélla que le resulte mejor que las demás según sus preferencias, según sus gustos.

En el caso de un consumidor que se enfrenta al problema de decisión sobre las cantidades demandadas de dos bienes *x* e *y*, la estructura del problema queda formalmente como,

$$\begin{aligned} &\underset{(x,y)}{Max}\; U(x,y) \\ &s.a.\;\; P_x^0 x + P_y^0 y \le I^0 \\ &x \ge 0, y \ge 0 \end{aligned}$$

donde (x, y) son las variables de elección del problema, esto es, las cantidades a demandar de ambos bienes, U es la función objetivo del problema que asigna a las diferentes combinaciones de bienes un determinado escalar de acuerdo al nivel de satisfacción que cada combinación le permite alcanzar, y $P_x^0 x + P_y^0 y \leq I^0$, donde P_x^0, P_y^0 son los precios de los dos bienes e I^0 la renta del consumidor, es la restricción presupuestaria a la que se enfrenta el consumidor, que indica que el gasto en los bienes *x* e *y* no puede sobrepasar el valor de la renta de que dispone el consumidor.

En el caso más general, en el que las combinaciones contengan *n* bienes, el problema quedaría formalmente como:

$$\begin{aligned} &\underset{(x_1,\dots,x_n)}{Max} \quad U(x_1,\dots,x_n) \\ &s.a.\ P_{x_1}^0 x + \dots + P_{x_n}^0 x_n \leq I^0 \\ &x_1 \geq 0,\dots,x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Aunque este problema podría ser resuelto directamente, antes de proceder a su resolución gráfica y analítica procederemos a analizar los elementos del mismo, esto es, las características de la función objetivo y la restricción presupuestaria.

4.3.1. La función objetivo: las preferencias y la función de utilidad

Si quisiéramos representar la relación de preferencia-indiferencia entre las diferentes combinaciones a través de una función, ésta debería asignar un número a cada combinación, de forma que si una combinación (x_A, y_A) es preferida a otra combinación (x_B, y_B) debería asignar un número mayor a la primera, mientras que si el consumidor es indiferente entre una combinación (x_A, y_A) y una combinación (x_C, y_C) esta función debe asignar un mismo número a ambas combinaciones. Llamaremos a esta función la *función de utilidad*.

Por tanto, para nuestras combinaciones compuestas por dos bienes *x* e *y*, la función de utilidad será cualquier función *U* de R^2 en R –de R^n en R, en el caso de combinaciones formadas por *n* bienes– es decir, que asigne un número real a cada combinación de forma que cumpla con las propiedades de la relación de preferencias.

En particular, la función ha de ser monótona creciente, es decir, ha de asignar un número mayor a las combinaciones situadas en el conjunto mejor a una combinación dada y asignar un mismo número a aquellas combinaciones de un mismo conjunto de indiferencia. Es decir,

$$\text{Si } U(x_A, y_A) > U(x_B, y_B) \Rightarrow (x_A, y_A)\ \textit{es preferida a}\ (x_B, y_B)$$
$$\text{Si } U(x_A, y_A) = U(x_C, y_C) \Rightarrow (x_A, y_A)\ \textit{es indiferente a}\ (x_C, y_C)$$

En este punto hay que aclarar que esta función es tan sólo una función ordinal, es decir, ha de reflejar la ordenación de preferencias del consumidor, asignando un número mayor a una combinación que es preferida a otra, pero la magnitud de la diferencia entre los números asignados a ambas combinaciones no tiene ningún significado, como sí ocurre en las funciones cardinales. En otros términos, del valor del número no podemos sacar una conclusión acerca de la intensidad con la que le gustan o disgustan las cestas al consumidor.

Por tanto, si una función cualquiera $U(x, y)$ representa las preferencias del consumidor cualquier transformación monótona positiva de esta función también servirá para representar las preferencias ya que mantendrá la "ordenación" de las diferentes cestas aunque las diferencias relativas entre los números asignados no se mantengan, requisito éste que sí habría de cumplirse en el caso de una función de tipo cardinal.

Por otro lado, el crecimiento de esta función garantiza que la función asigna un mayor nivel de utilidad a aquellas combinaciones que son preferidas atendiendo al principio de no saturación, de que el consumidor prefiere más a menos. Por tanto, $\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} > 0$ y $\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} > 0$. La implicación de este supuesto es que la función de utilidad asigna un número mayor a las curvas de nivel más alejadas del origen. Es decir, dada una combinación cualquiera, el aumento de la cantidad de uno de los bienes que la componen, supongamos el bien *x*, permaneciendo el bien *y* constante implicará un nuevo valor de la función de utilidad más elevado, es decir una variación de la utilidad positiva. Esta variación experimentada por la utilidad al variar la cantidad de uno de los bienes sin variar el resto de los bienes incluidos en la combinación, se corresponde con el concepto de derivada parcial. Siguiendo con la pauta de adjetivar con la palabra marginal a todas las derivadas presentes en los modelos microeconómicos, esta derivada parcial se denomina utilidad marginal del bien *x* quedará denotada por UMa_x. Formalmente, en el caso de combinaciones compuestas por dos bienes *x* e *y*, la función de utilidad y la utilidad marginal se pueden expresar como:

$$U\underbrace{(x,y)}_{R^2} \rightarrow \underbrace{u}_{R}$$

$$UMa_x = \frac{\partial U}{\partial x} > 0$$

$$UMa_y = \frac{\partial U}{\partial y} > 0$$

y en el caso de combinaciones formadas por *n* bienes, como

$$U\underbrace{(x_1,...,x_n)}_{R^n} \rightarrow \underbrace{u}_{R}$$

$$UMa_{x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} > 0$$

Utilicemos la función de utilidad para combinaciones formadas por dos bienes, para facilitar su análisis. Si quisiéramos representar esta función en el plano de las variables de elección del problema –las cantidades de *x* e *y*–, necesitaríamos fijar la variable *u*, es decir, tendríamos que representar la función a través de sus curvas de nivel. Recuerde que si queremos representar el mapa de curvas de nivel de una función, tan sólo tendremos que representar las diferentes ecuaciones que se obtienen al fijar el valor de *u* en diferentes niveles. Así la curva de nivel de la función objetivo para el nivel de utilidad u_0 vendrá dada por todas aquellas combinaciones a las que la función de utilidad asigna un mismo valor de la utilidad u_0. Recuerde que si dos combinaciones reportan al consumidor el mismo nivel de utilidad, ambas combinaciones resultarán indiferentes al consumidor. Por esta razón las curvas de nivel de la función de utilidad no son otra cosa que sus curvas de indiferencia. Por ello, en el problema del consumidor nos referiremos de forma indistinta a las curvas de nivel (o contornos) de la función de utilidad como mapa de curvas de nivel o mapa de curvas de indiferencia.

Representamos en la figura 6 a continuación un mapa de curvas de indiferencia para la función de utilidad $U(x, y)$:

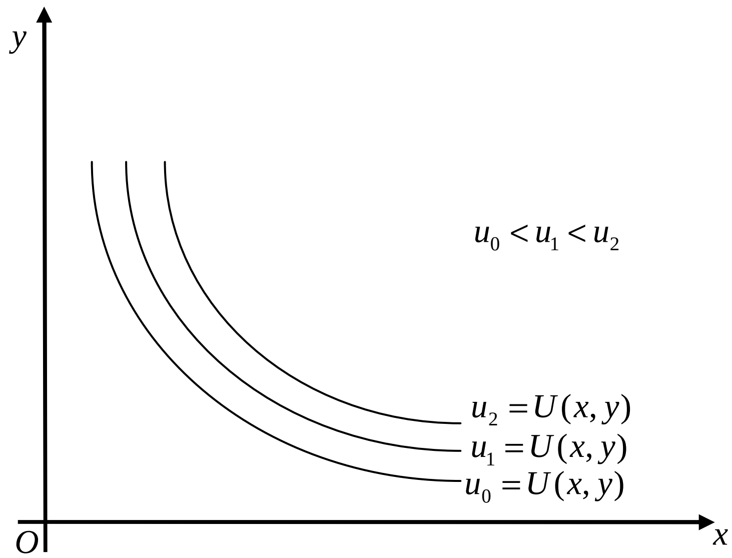

Figura 6: Un mapa de curvas de indiferencia

Formalmente, la curva de nivel para el nivel de utilidad u_0, viene dada por el conjunto de combinaciones definidas por:

$$C_{u_0} = \{(x, y) / U(x, y) = u_0\}$$

es decir, el lugar geométrico de las combinaciones de bienes a las que el consumidor asigna un mismo nivel de satisfacción, esto es, entre las que el consumidor es indiferente.

Cada curva de indiferencia, dadas las propiedades de la relación de preferencias, es una función estrictamente cuasicóncava, lo que garantiza que el conjunto mejor sea estrictamente convexo, como exigimos al analizar la relación de preferencias.

Además, y dado que nos queremos apoyar en el cálculo diferencial para resolver el problema del consumidor, supondremos que la función de utilidad será continua y dos veces continuamente diferenciable. Este supuesto elimina la posibilidad de que la pendiente de la curva de indiferencia de un salto, como ocurre en aquellos casos en los que los bienes son complementarios (esta cuestión será tratada en el siguiente apartado).

En suma, como la función de utilidad asigna valores más altos a las combinaciones preferidas, las combinaciones situadas en curvas de indiferencia más elevadas –las más alejadas del origen–, son preferidas, por lo que el problema del consumidor se puede interpretar como la búsqueda de la combinación que hace máxima esta función de utilidad (de entre las combinaciones que puede adquirir, dados los precios y la renta).

Para completar esta discusión acerca de las propiedades de las curvas de indiferencia, puede resultar interesante el análisis del siguiente mapa de curvas de indiferencia representado en la figura 7, y las implicaciones que, la concavidad o convexidad de las mismas tienen sobre algunas de las propiedades anteriores.

En esta figura hemos representado una función de utilidad estrictamente cuasicóncava, lo que se refleja en el hecho de que las curvas de nivel representadas por los círculos concéntricos más pequeños, tienen asociadas niveles más altos de utilidad, es decir que $u_0 < u_1 < u_2$. Esta función determina este mapa de curvas de indiferencia que ha sido divido en cuatro áreas para discutir acerca de la conveniencia de algunos de los supuestos que hemos impuesto a las funciones de utilidad para que sean compatibles con los axiomas que hemos impuesto a la relación de preferencia.

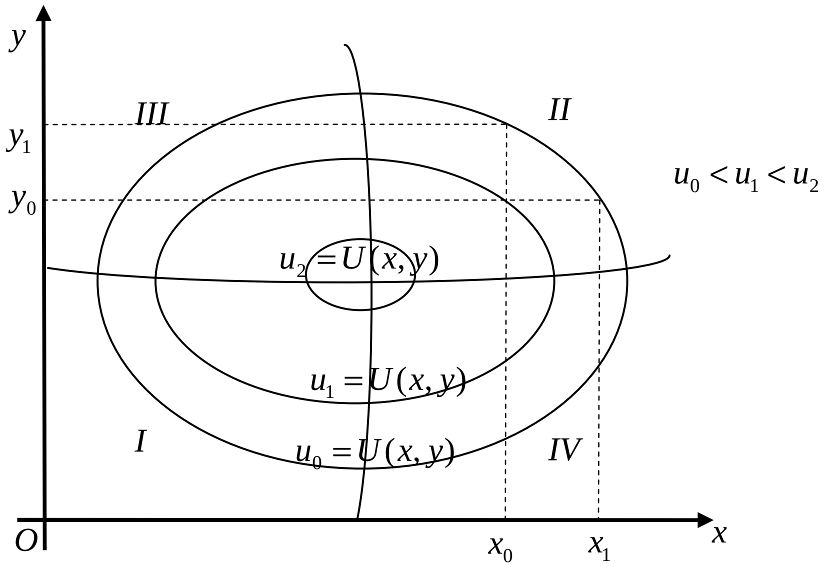

Figura 7: Mapas de curvas de nivel: regiones compatibles con las propiedades de un mapa de curvas de indiferencia

Supongamos por un instante que las curvas de indiferencia no fueran estrictamente convexas, como lo son las que pertenecen a la *región I*, del gráfico, sino que fueran estrictamente cóncavas, como las representadas en la *región II*. Observe que cuando el consumidor adquiere la cesta de bienes (x_0, y_0) obtiene una satisfacción u_1. Por el supuesto de no saturación, la cesta (x_0, y_1) debe ser preferida a la cesta (x_0, y_0) al contener más cantidad de bien *y*, y no menos del bien *x*. Sin embargo la función de utilidad en esa región le asignaría una satisfacción u_0 que es menor que u_1. Igualmente, la función de utilidad asigna a la combinación (x_1, y_0) un nivel de satisfacción menor que el que asigna a la cesta (x_1, y_1), cuando debería ser al contrario, ya que esta cesta contiene la misma cantidad de bien *y*, y una mayor cantidad de bien *x*. Por tanto, las curvas de indiferencia cóncavas estarán asociadas a mercancías que son considerados como "males" por el individuo, esto es a las que aplicaremos el principio de que el consumidor prefiere menos a más, ya que el aumento de su cantidad suponen una merma de la satisfacción obtenida. Haciendo razonamientos análogos en las *regiones III* y *IV*, el consumidor puede comprobar que en el caso del área *III*, *x* sería un bien, e *y* un mal, mientras que las curvas de indiferencia con la forma de las que poseen las de la región *IV*, servirían para representar combinaciones formadas por un bien, el *y*, y un mal, el *x*.

4.3.2. La pendiente de las curvas de indiferencia y la relación marginal de sustitución

Tal y como hemos comentado, sobre la base de los supuestos anteriores se desprende que la curva de indiferencia tiene pendiente negativa descendente a medida que nos movemos de izquierda a derecha. Comprobemos este extremo con ayuda del cálculo diferencial y aprovechemos esta discusión para relacionar la pendiente de la curva de nivel de la función de utilidad con el concepto de relación marginal de sustitución. Para llevar a cabo esta tarea, suponga que nos encontramos en la curva de nivel en la que la función de utilidad alcanza el valor u_0.

Para calcular la pendiente de una curva de indiferencia, nos bastará con hallar el valor de $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{u_o=U(x,y)}$. Para obtener esta relación, diferenciamos la curva de nivel:

$$u_0 = U(x,y) \Rightarrow du_0 = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy \Rightarrow$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{u_0=U(x,y)} = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}} = -\frac{UMa_x}{UMa_y}$$

Es decir, la pendiente de las curvas de indiferencia es negativa ya que, tal y como se ha demostrado anteriormente, las utilidades marginales de ambos bienes son positivas.

Recordemos que la relación marginal de sustitución entre dos bienes *y* y *x*, se define como la cantidad de mercancía *y* a que está dispuesto a renunciar –*dy*– un consumidor a cambio de una unidad adicional de *x*, –*dx*– sin que el nivel de satisfacción se vea alterado. Dado que necesariamente para conseguir un aumento de la cantidad de un bien hay que renunciar al otro –se trata de una tasa requerida de compensación entre dos magnitudes–, si queremos que esta relación entre las variaciones tenga signo positivo hemos de definirla como:

$$RMS_{y,x} = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{u_0=U(x,y)},$$

que no es otra cosa que la pendiente de la curva de indiferencia pre-multiplicada por -1:

$$RMS_{y,x} = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{u_0=U(x,y)} = -\left(-\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}\right) = \frac{UMa_x}{UMa_y}$$

4.3.3. Funciones de utilidad y mapas de curvas de indiferencia especiales

Bienes perfectamente sustitutivos

Suponga unas curvas de indiferencia que sean rectas con pendiente negativa como las representadas en la figura 8 a continuación. Observe por ejemplo la curva de indiferencia de nivel u_0. En esta curva vemos cómo permanece constante la cantidad de mercancía *y* a la que está dispuesto a renunciar el consumidor a cambio de una unidad adicional de *x*, sin que el nivel de satisfacción se vea alterado. En otras palabras, en estas circunstancias se cumple que la relación marginal de sustitución es constante. Podemos comprobar cómo se trata de curvas de nivel de funciones de utilidad del tipo, $U(x,y) = ax + by$, siendo estas rectas paralelas de pendiente negativa e igual a $-a/b$. Aplicando la propia definición de relación marginal de sustitución, diremos que:

$$RMS_{y,x} = \frac{UMa_x}{UMa_y} = \frac{a}{b}$$

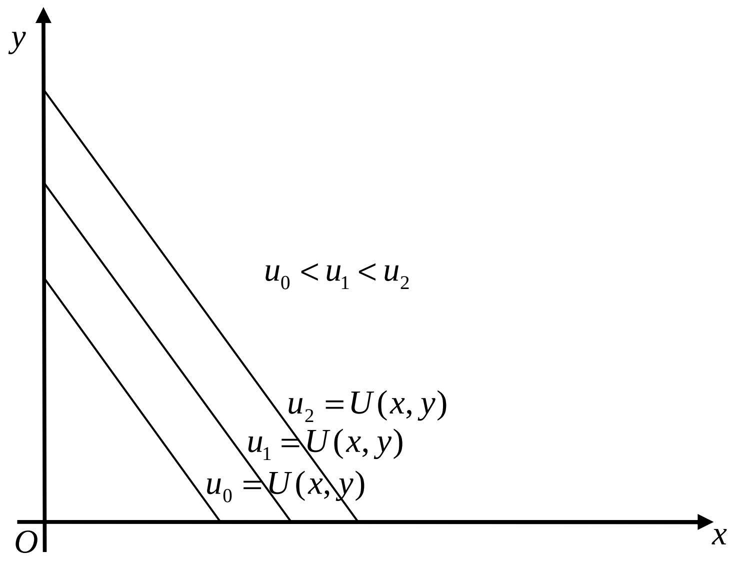

Figura 8: Bienes sustitutivos

Bienes perfectamente complementarios

La forma habitual de las curvas de indiferencia supone que los dos bienes presentan un cierto grado de sustituibilidad. Es decir, es posible desplazarnos de un punto a otro de la curva renunciando a una cierta cantidad de un bien a cambio de una cantidad adicional del otro. Sin embargo, hay casos en los que para poder disfrutar el consumo de un bien –o lo que es lo mismo, para que este consumo genere utilidad–, es necesario el consumo del otro en una cierta proporción fija. En este caso la función de utilidad toma la forma $u = \min[ax, by]$ donde $a, b > 0$.[3] Podemos comprobar que las curvas de indiferencia son ángulos rectos. Si nos centramos por simplicidad en el caso en el que $a = b = 1$, la función de utilidad será $u = \min[x, y]$, de forma que la satisfacción estará determinada por la menor de las cantidades consumidas. En este caso los dos bienes son complementarios perfectos. El mapa de curvas de indiferencia para este tipo de bienes se representa en la figura 9 a continuación:

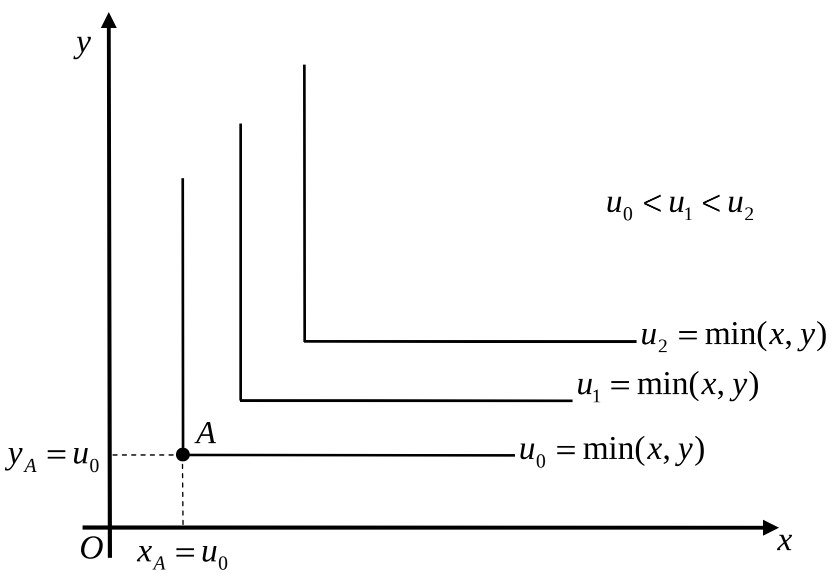

Figura 9: Bienes complementarios

[3] Llamamos a estas funciones tipo *Leontief*, o de proporciones fijas.

En el punto *A* de la figura anterior, se cumple que $x_A = y_A$. Por tanto, en el punto A también se cumple que $u_0 = \min[x_A, y_A] = x_A = y_A$.

4.4. La restricción presupuestaria

Conocidos (o dados) (i) los precios de los bienes, P_x^0 y P_y^0; (ii) que el consumidor dispone de un nivel de renta dado I^0; y (iii) que el consumidor no puede demandar cantidades negativas de los bienes, la *restricción presupuestaria* a la que se enfrenta el consumidor simplemente refleja el hecho de que la suma del gasto en el bien *x*, $P_x^0 x$, más el gasto en el bien y, $P_y^0 y$, no puede superar la renta total I^0 de que dispone el consumidor.

Para el caso de dos bienes, la restricción presupuestaria queda expresada formalmente como: $P_x^0 x + P_y^0 y \leq I^0$.[4] Así pues, la restricción presupuestaria define al conjunto de combinaciones de bienes (x, y), que resultan asequibles al consumidor, limitando la solución del problema de elección del consumidor a una de las combinaciones que verifican esta restricción y que llamaremos, *espacio presupuestario* o *conjunto asequible*. Para representar las combinaciones que verifican esta desigualdad, es decir las combinaciones (x, y) pertenecientes al espacio presupuestario, procederemos a representar la restricción en términos de igualdad $P_x^0 x + P_y^0 y = I^0$, en el plano de las variables de elección. Para ello, despejamos la *y* de la expresión anterior:

$$y = \frac{I^0}{P_y^0} - \frac{P_x^0}{P_y^0} x$$

Podemos observar cómo la restricción presupuestaria no es más que una recta con pendiente negativa del tipo $y = a - bx$. No en vano, a esta igualdad se le denomina también *recta presupuestaria*. En este caso, el valor de la ordenada en el origen, o lo que es lo mismo, el valor de *a* es I^0 / P_y^0. La pendiente, o lo que es lo mismo, el valor de *–b*, se obtiene hallando el valor de la derivada de *y* con respecto a *x* en la recta presupuestaria, siendo en este caso $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{I^0} = -\frac{P_x^0}{P_y^0}$. Esta pendiente será negativa dado que los precios son necesariamente positivos. Observe que esta derivada es la tasa a la que un consumidor dotado con una renta determinada I^0 puede intercambiar los bienes *x* e *y* en el mercado. En otros términos, si el consumidor reduce el consumo del bien *x* en una unidad, reduce el gasto en la cuantía P_x^0, que ahora está disponible para adquirir el bien y. Como el precio de *y* es P_y^0, podrá adquirir una cantidad P_x^0 / P_y^0 del bien *y*. Por tanto una unidad de *x* se puede cambiar por una cantidad de P_x^0 / P_y^0 de bien *y*.

Los cortes de la recta presupuestaria con los ejes de abscisas y ordenadas se obtienen hallando el valor de *x* para *y*=0 y el valor de *y* para *x*=0. Concretamente:

[4] En el caso de *n* bienes, la restricción presupuestaria que define el conjunto de combinaciones asequibles para el consumidor queda formalizada por la expresión: $P_{x_1}^0 x_1 + \ldots + P_{x_n}^0 x_n \leq I^0$

Si $x=0 \Rightarrow y=\frac{I^0}{P_y^0}-\frac{P_x^0}{P_y^0}(0) \Rightarrow y=\frac{I^0}{P_y^0}$

Si $y=0 \Rightarrow 0=\frac{I^0}{P_y^0}-\frac{P_x^0}{P_y^0}x \Rightarrow \frac{I^0}{P_y^0}=\frac{P_x^0}{P_y^0}x \Rightarrow x=\frac{I^0}{P_x^0}$

Resaltemos aquí que esto último se podría haber realizado de forma mental aplicando un sencillo razonamiento: si el consumidor no gasta cantidad alguna en el bien *x* (*x*=0) quiere decir que decide invertirlo todo en bien *y*. La cantidad máxima de bien *y* que puede adquirir se obtiene dividiendo la renta entre el precio de este bien *y*. Análogamente, si el consumidor no gasta cantidad alguna en el bien *y* (*y*=0) quiere decir que lo invierte todo en *x*. La cantidad máxima de bien *x* que puede adquirir se obtiene dividiendo la renta entre el precio de este bien *x*.

Una vez conocidos estos cortes con los ejes, la recta presupuestaria en el plano de variables de elección puede representarse como una recta del tipo de la representada en la figura 10, en la que implícitamente hemos considerado que el precio del bien *x* es inferior al del bien *y* ya que, como se observa, la distancia entre el origen de coordenadas y la cantidad máxima de bien *x* que se puede adquirir es claramente superior a la que podríamos adquirir de bien *y* si el consumidor destinase toda su renta a la compra de este bien.

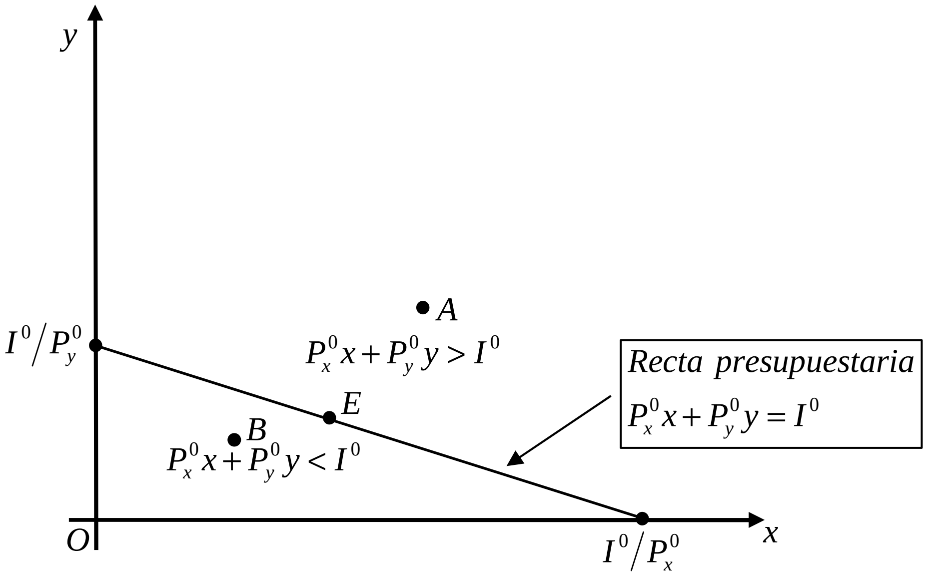

Figura 10: El espacio presupuestario

Observe que las combinaciones pertenecientes a la recta presupuestaria como la *E*, son combinaciones en las que el consumidor gasta toda su renta, mientras que aquéllas situadas por debajo de la misma, como la *B*, son combinaciones para las cuales el gasto no llega a alcanzar el nivel de la renta de que dispone. Finalmente, combinaciones situadas a la derecha de la restricción presupuestaria como la *A* no resultan asequibles, puesto que su adquisición conlleva el incurrir en un gasto superior a la renta I^0. El conjunto de combinaciones pertenecientes al triángulo rectángulo de vértices $O, I^0/P_x^0, I^0/P_y^0$, incluidas las pertenecientes a la recta presupuestaria o sobre los ejes de cantidades, constituyen el conjunto asequible del problema del consumidor como demandante de bienes y servicios, esto es, su espacio presupuestario. El espacio presupuestario incluye pues todas las combinaciones que resultan asequibles (elegibles) por parte del consumidor, representando por tanto su poder de compra. Para entender mejor esta idea analizamos a continuación qué le ocurre al espacio presupuestario ante cambios en los parámetros que lo definen, los precios de ambos bienes P_x^0, P_y^0 y la renta I^0.

Efectos de los cambios en los precios y la renta sobre el espacio presupuestario

Recordemos que para representar el área definida por la restricción presupuestaria para el vector de precios y renta $\left(P_x^0, P_y^0, I^0\right)$, esto es la definida por la inecuación , $P_x^0 x + P_y^0 y \leq I^0$, procedimos a representar la recta presupuestaria $P_x^0 x + P_y^0 y = I^0$ en el plano de las variables (x, y), cuyos puntos de corte con el eje de abscisas y ordenadas son I^0 / P_x^0 y I^0 / P_y^0, respectivamente y cuya pendiente es $-P_x^0 / P_y^0$.

Supongamos que disminuye la renta del sujeto, *ceteris paribus*, es decir sin que varíen los precios de los dos bienes. La nueva restricción presupuestaria es ahora $P_x^0 x + P_y^0 y \leq I^1$, donde $I^0 > I^1$. Evidentemente, el conjunto de combinaciones asequibles ha de ser ahora menor ya que la disponibilidad de un menor nivel de renta provocará que algunas combinaciones que eran asequibles ahora ya no lo sean. Como habrá advertido, si representamos la nueva recta presupuestaria, esta tiene la misma pendiente, aunque los cortes con los ejes son ahora menores que antes. Se produce pues un desplazamiento paralelo de la restricción presupuestaria tal y como se representa en la figura 11:

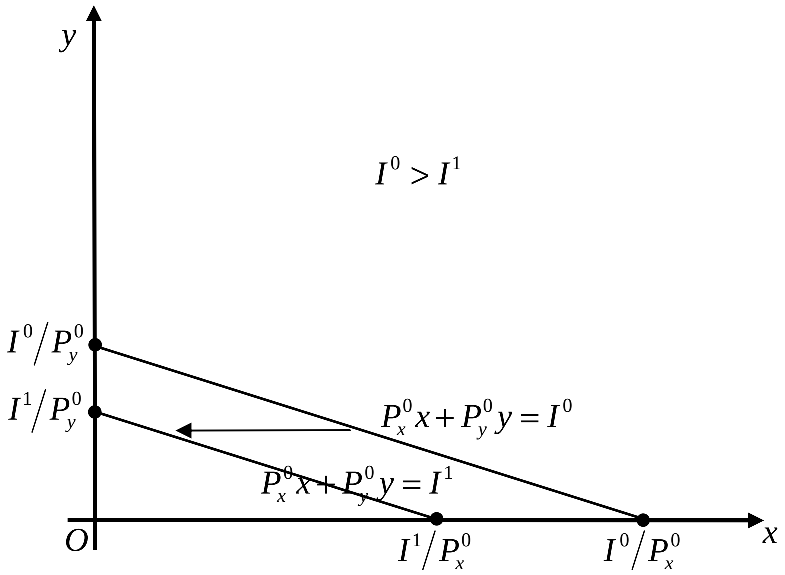

Figura 11: El efecto de una reducción de la renta

A continuación, se analiza el detalle de cada una de las dos rectas presupuestarias, antes y después de la reducción de la renta:

Recta presupuestaria para el vector de precios y renta $\left(P_x^0, P_y^0, I^0\right): P_x^0 x + P_y^0 y = I^0$

Pendiente: $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{I^0} = -\frac{P_x^0}{P_y^0}$

Cortes con los ejes:

$$\text{Si } x{=}0 \Rightarrow y = \frac{I^0}{P_y^0} - \frac{P_x^0}{P_y^0}(0) \Rightarrow y = \frac{I^0}{P_y^0}$$

$$\text{Si } y{=}0 \Rightarrow 0 = \frac{I^0}{P_y^0} - \frac{P_x^0}{P_y^0}x \Rightarrow \frac{I^0}{P_y^0} = \frac{P_x^0}{P_y^0}x \Rightarrow x = \frac{I^0}{P_x^0}$$

Recta presupuestaria para el vector de precios y renta $\left(P_x^0, P_y^0, I^1\right): P_x^0 x + P_y^0 y = I^1$

Pendiente: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{I^0} = -\dfrac{P_x^0}{P_y^0}$

Cortes con los ejes:

$$\text{Si } x{=}0 \Rightarrow y = \frac{I^1}{P_y^0} - \frac{P_x^0}{P_y^0}(0) \Rightarrow y = \frac{I^1}{P_y^0}$$

$$\text{Si } y{=}0 \Rightarrow 0 = \frac{I^1}{P_y^0} - \frac{P_x^0}{P_y^0}x \Rightarrow \frac{I^1}{P_y^0} = \frac{P_x^0}{P_y^0}x \Rightarrow x = \frac{I^1}{P_x^0}$$

Analicemos ahora el efecto de un aumento en el precio del bien *x*, *ceteris paribus*, es decir, sin que varíen el precio del otro bien ni la renta, de forma que el nuevo precio del bien es ahora P_x^1 con $P_x^1 > P_x^0$. Ahora la recta presupuestaria para el vector de precios y renta $\left(P_x^1, P_y^0, I^0\right)$ es $P_x^1 x + P_y^0 y = I^0$. Compruebe que ahora este cambio supone una reducción del espacio presupuestario, una pérdida de poder de compra[5] al afectar, tanto a la pendiente como al corte con el eje de abscisas:

Pendiente: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{I^0} = -\dfrac{P_x^1}{P_y^0}$

Cortes con los ejes:

$$\text{Si } x{=}0 \Rightarrow y = \frac{I^0}{P_y^0} - \frac{P_x^1}{P_y^0}(0) \Rightarrow y = \frac{I^0}{P_y^0}$$

$$\text{Si } y{=}0 \Rightarrow 0 = \frac{I^0}{P_y^0} - \frac{P_x^1}{P_y^0}x \Rightarrow \frac{I^0}{P_y^0} = \frac{P_x^1}{P_y^0}x \Rightarrow x = \frac{I^0}{P_x^1}$$

Gráficamente, este cambio aparece representado en la siguiente figura.

[5] Decimos pérdida de poder de compra porque, aunque la renta no ha variado de forma nominal, la capacidad adquisitiva del consumidor se ha reducido: antes del cambio el espacio presupuestario contenía combinaciones que ahora no son asequibles.

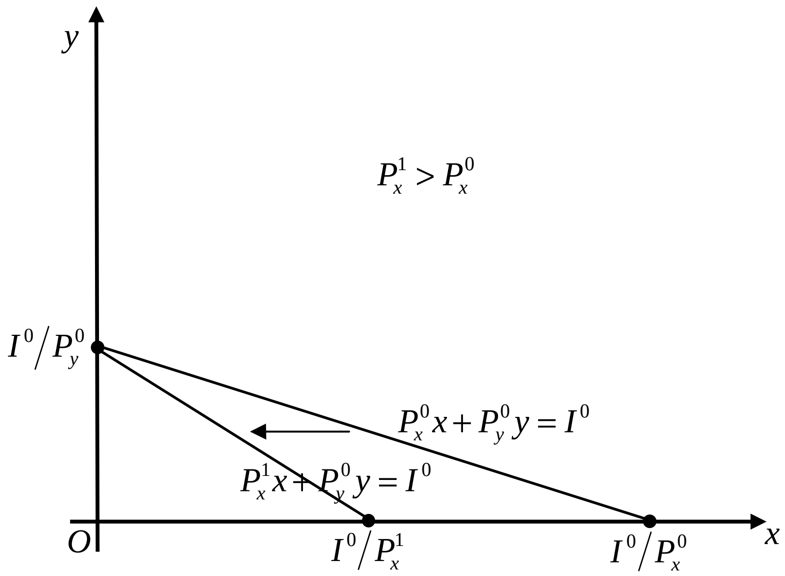

Figura 12: El efecto de un aumento en el precio del bien *x*

A continuación analizamos el efecto de una disminución del precio del bien *y*, *ceteris paribus*, es decir, sin que varíen el precio del bien *x* ni la renta, hace también que cambie la pendiente, pero lo que cambia ahora es el corte con el eje de ordenadas. Ahora, al tratarse de una disminución del precio de un bien, esto provoca un aumento de las posibilidades de consumo tal y como se aprecia en la figura 13.

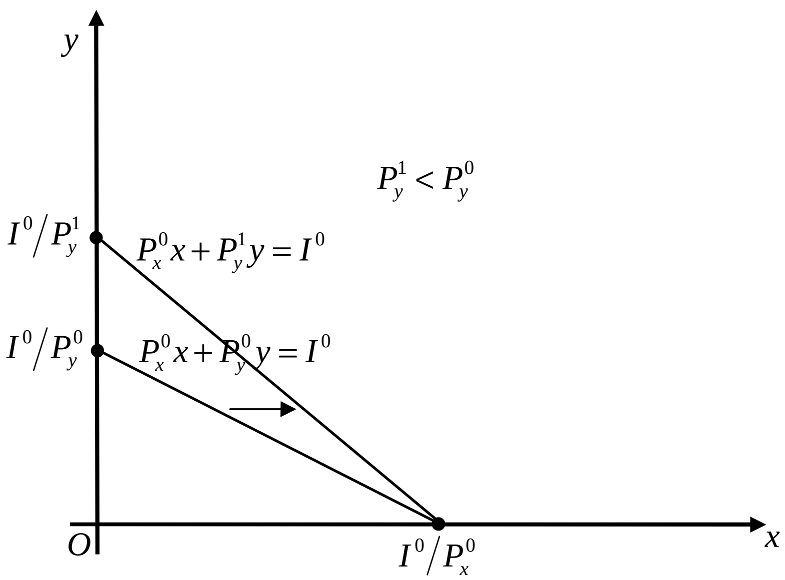

Figura 13: El efecto de una disminución del precio del bien *y*

En particular y dado que el nuevo precio del bien *y* es ahora P_y^1 con $P_y^1 < P_y^0$, ahora la recta presupuestaria para el vector de precios y renta $\left(P_x^0, P_y^1, I^0\right)$ es $P_x^0 x + P_y^1 y = I^0$. Este cambio supone una ampliación del espacio presupuestario, afectando tanto a la pendiente de la recta presupuestaria como al corte con el eje de ordenadas:

Pendiente: $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{I^0} = -\dfrac{P_x^0}{P_y^1}$

Cortes con los ejes:

Si $x=0 \Rightarrow y = \frac{I^0}{P_y^1} - \frac{P_x^0}{P_y^1}(0) \Rightarrow y = \frac{I^0}{P_y^1}$

Si $y=0 \Rightarrow 0 = \frac{I^0}{P_y^1} - \frac{P_x^0}{P_y^1} x \Rightarrow \frac{I^0}{P_y^1} = \frac{P_x^0}{P_y^1} x \Rightarrow x = \frac{I^0}{P_x^0}$

Finalmente y para concluir con el análisis de los cambios en el espacio presupuestario como consecuencia en cambios en los parámetros que lo definen, analicemos qué ocurre si los precios y la renta varían simultáneamente en la misma proporción *k*. Es decir, supongamos que el nuevo vector de precios y renta es $\left(P_x^1 = kP_x^0, P_y^1 = kP_y^0, I^1 = kI^0\right)$.Como puede comprobar, la nueva restricción $P_x^1 x + P_y^1 y = I^1$ tiene la misma pendiente y los mismos cortes que la restricción inicial, de forma que el espacio presupuestario permanece inalterado. Es decir, se dice que el consumidor no sufre de ilusión monetaria ya que al aumentar los precios y la renta en la misma proporción el consumidor sabe que las combinaciones asequibles son las mismas antes y después del cambio, de forma que este cambio no tiene porqué afectar a su decisión de consumo. Observe cómo la pendiente es $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{I^0} = -\frac{P_x^1}{P_y^1} = -\frac{kP_x^0}{kP_y^0} = -\frac{P_x^0}{P_y^0}$ y los cortes con los ejes son $y = \frac{I^1}{P_x^1} = \frac{kI^0}{kP_x^0} = \frac{I^0}{P_x^0}$ y $y = \frac{I^1}{P_y^1} = \frac{kI^0}{kP_y^0} = \frac{I^0}{P_y^0}$, respectivamente.

4.5. La solución del problema del consumidor

De lo ya apuntado, el problema del consumidor puede plantearse formalmente mediante el siguiente problema de optimización restringido, en el que el consumidor elige la combinación de bienes (variables de elección) que le permiten hacer máximo el valor de la función objetivo (de la función de utilidad), de entre aquellas que puede adquirir, dados los precios de los diferentes bienes y servicios y la renta de que dispone, es decir de entre aquéllas que satisfacen la restricción presupuestaria –aquéllas que son asequibles para el consumidor–.

$$\begin{aligned} &\underset{(x,y)}{Max}\ U(x,y) \\ &s.a.\ P_x^0 x + P_y^0 y \leq I^0 \\ &x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

siendo P_x^0, P_y^0, I^0 parámetros conocidos, esto es, datos del problema y *x* e *y*, las variables de elección, las cantidades que ha de demandar el consumidor de los bienes *x* e *y* para hacer máxima su satisfacción.

Como ya es bien sabido, a partir del análisis del tema de introducción, este problema de optimización condicionado puede resolverse a través de diferentes procedimientos: a través de un procedimiento gráfico-analítico, o bien a través de la maximización de la función de Lagrange. Resolvamos el problema aplicando estos diferentes métodos para que el lector aprecie la utilidad de los conocimientos aprendidos en el primer tema a la solución de los problemas microeconómicos.

4.5.1. La solución gráfico-analítica

La función objetivo en la formulación del problema del consumidor es la función de utilidad analizada anteriormente, y en la que sólo hemos incluido dos bienes. Se trata de una función de R^2 en R que asigna a cada combinación de bienes (x, y) un número que representa el nivel de utilidad alcanzado. Como ya hemos analizado, su representación en el plano *x*-*y* se lleva a cabo a través de sus curvas de nivel, esto es, el conjunto de combinaciones (x, y) que permiten al sujeto alcanzar un mismo nivel de satisfacción (un mismo valor de *u*). Estas curvas las hemos denominado curvas de indiferencia para reflejar el hecho de que las combinaciones pertenecientes a una curva de nivel arrojan la misma utilidad al consumidor, y por tanto, éste se muestra indiferente entre ellas. Formalmente, la curva de indiferencia correspondiente al nivel de satisfacción u_0 se puede representar como el conjunto de combinaciones de los dos bienes que hacen que la función de utilidad alcance ese valor u_0, es decir $C_{u_0} = \{(x, y) / U(x, y) = u_0\}$.

Para cada valor de la función de utilidad, u_0, u_1, u_2,...tendremos pues una curva de indiferencia que podemos representar en el plano de las variables de elección y que en conjunto conformarán el mapa de curvas de indiferencia. Recuerde de nuestra discusión anterior de los elementos del problema, que dado que la función de utilidad es creciente, las curvas de indiferencia más alejadas del origen han de corresponderse con niveles superiores de satisfacción –el consumidor prefiere más a menos–, de forma que, en la figura 14 a continuación, u_2 debe ser mayor que u_1, y u_1 debe ser mayor que u_0.

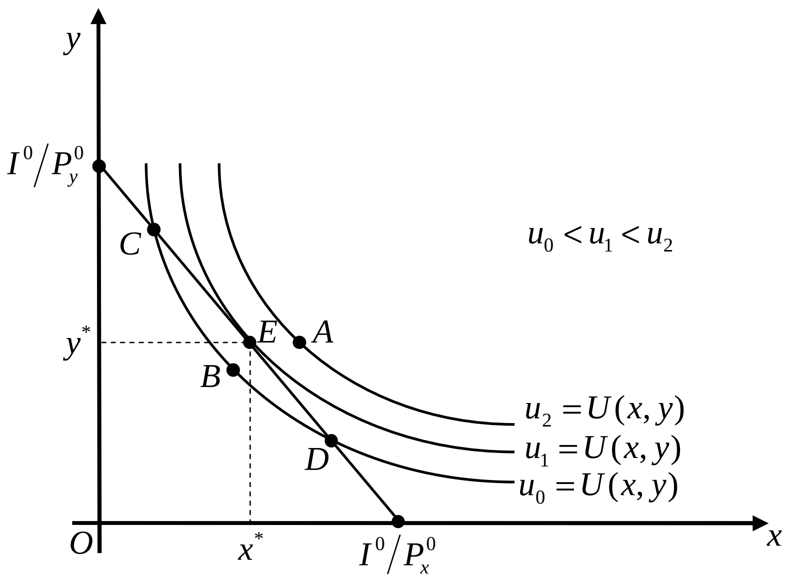

Figura 14: El equilibrio del consumidor

Si no existieran restricciones en el problema, y el consumidor pudiese escoger cualquier combinación de bienes, convendremos que la solución del problema sería trivial, en tanto en cuanto, el consumidor bajo el supuesto de que prefiere más a menos elegiría una cantidad infinita de ambos bienes.

Sin embargo, el consumidor no puede elegir cualquier combinación de bienes, sino una de entre aquéllas que son asequibles para él, dados los precios de los bienes y la renta de que dispone, es decir, sólo puede elegir combinaciones que se encuentren dentro o en los límites del área del triángulo de vértices $O, I^0/P_x^0, I^0/P_y^0$.

En efecto, la combinación *A*, se encuentra situada en la curva de indiferencia más alejada del origen, de entre las representadas en la figura, y por tanto ha de ser preferida a cualquier combinación situada en las curvas de indiferencia con niveles de utilidad u_1 y u_2. Es decir, la combinación *A* es preferida a las combinaciones *B*, *C*, *D* y *E*. Sin embargo, esta combinación no es asequible, no cumple la restricción, por lo que no puede ser solución del problema. Por su parte, las combinaciones *B*, *C* y *D*, siendo elegibles –ya que están situadas en el interior o en los límites del espacio presupuestario– sólo permiten alcanzar al consumidor un nivel de satisfacción u_0, mientras que la combinación *E*, siendo asequible le permite alcanzar un nivel de satisfacción superior, u_1. Así pues, la combinación *E* de coordenadas (x^*, y^*) es de entre las combinaciones elegibles, la que le permite alcanzar un mayor valor de la función objetivo, esto es, una mayor satisfacción, siendo, por tanto, la solución del problema y por ello las *cantidades demandadas* de bienes *x* e *y* por parte del consumidor cuando los precios y la renta son P_x^0, P_y^0, I^0. Llegados a este punto, y si queremos traducir esta solución gráfica en una la solución analítica, debemos preguntarnos qué elemento o elementos caracterizan a esta solución.

La característica más inmediata es que se trata de un punto en el que la recta presupuestaria –la restricción en condiciones de igualdad– es tangente a la curva de indiferencia.

Observe que los puntos *C* y *D* son intersecciones entre una curva de indiferencia y la recta presupuestaria, pero que en el caso de la solución, del punto *E*, se trata de una solución de tangencia. Cuando hay una intersección, para obtener el punto nos bastaría con resolver el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas formado por la restricción y la curva de indiferencia correspondiente. Sin embargo, en nuestro caso la recta presupuestaria y la curva de indiferencia son tangentes en la solución al problema, es decir, tienen la misma pendiente en el punto *E*.

Por tanto, la primera de las ecuaciones que ha de permitirnos caracterizar al punto *E* y, por tanto, obtener la solución del problema es que la pendiente de la curva de indiferencia y la pendiente de la recta presupuestaria han de ser iguales en el óptimo.

Para traducir a una condición matemática esta primera característica de la solución basta con calcular las pendientes respectivas de la curva de indiferencia y de la recta presupuestaria.

Como la recta presupuestaria quedaba descrita por la ecuación $P_x^0 x + P_y^0 y = I^0$, si diferenciamos por completo la expresión –recordando que P_x^0, P_y^0, I^0 son parámetros del problema, es decir constantes y que *x* e *y* son las variables– se tiene que:

$$dP_x^0 x + P_x^0 dx + dP_y^0 y + P_y^0 dy = dI^0 ,$$

y dado que $dP_x^0 = dP_y^0 = dI^0 = 0$ se tiene que:

$$P_x^0 dx + P_y^0 dy = 0$$

Por lo que la derivada de *y* con respecto a *x* en la recta presupuestaria, o lo que es lo mismo, su pendiente es:

$$-P_x^0 dx = P_y^0 dy \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{I^0} = -\frac{P_x^0}{P_y^0}$$

Procediendo de forma análoga con la curva de indiferencia y recordando que ahora el parámetro es u_1 que no varía, y por tanto $du_1 = 0$, se tiene que:

$$u_1 = U(x,y) \Rightarrow du_1 = dU(x,y) \Rightarrow 0 = dU(x,y)$$

Para diferenciar la función de utilidad recuerde que la variación de la utilidad se deberá en parte a la variación de la cantidad demandada de x $-dx-$ y en parte a la variación de la cantidad demandada de y $-dy-$. ¿Y cuánto varía la utilidad del consumidor al variar la cantidad demandada de x? ¿Y de y? Lo hará en el primer caso en $\partial U(x,y)/\partial x$ y en el segundo en $\partial U(x,y)/\partial y$. Por tanto, la expresión diferenciada de la función de utilidad será igual al producto del gradiente por el vector de diferenciales:

$$dU(x,y) = 0 \Rightarrow \frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy = 0$$

Operando tenemos que:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}dy = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}dx \Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{u_1} = -\frac{\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial x}}{\dfrac{\partial U(x,y)}{\partial y}}$$

Por tanto, la pendiente de la curva de indiferencia es igual al cociente de las utilidades marginales de ambos bienes con signo negativo.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{u_1} = -\frac{UMa_x}{UMa_y}$$

En consecuencia, la condición de tangencia, de igualación de pendientes de la curva de indiferencia y de la recta presupuestaria viene dada por la siguiente expresión:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{u_1} = -\dfrac{UMa_x}{UMa_y} \\ \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{I^0} = -\dfrac{P_x^0}{P_y^0} \end{array}\right\} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{u_1} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{I^0} \Rightarrow -\frac{UMa_x}{UMa_y} = -\frac{P_x^0}{P_y^0} \Rightarrow \frac{UMa_x}{UMa_y} = \frac{P_x^0}{P_y^0}$$

Sin embargo, con esta condición no nos bastará para caracterizar la solución del problema, ya que nuestro problema tiene dos variables de elección (dos incógnitas) y esta ecuación podrá ser verificada por otras tangencias entre otras curvas de indiferencia y otras restricciones paralelas a la inicial (de igual pendiente).

Es decir, en la figura siguiente, la expresión anterior es verificada por nuestro punto *E*, pero también por un punto como el *F*, en el que la curva de indiferencia es tangente a una restricción presupuestaria correspondiente a un nivel de renta superior I^1.

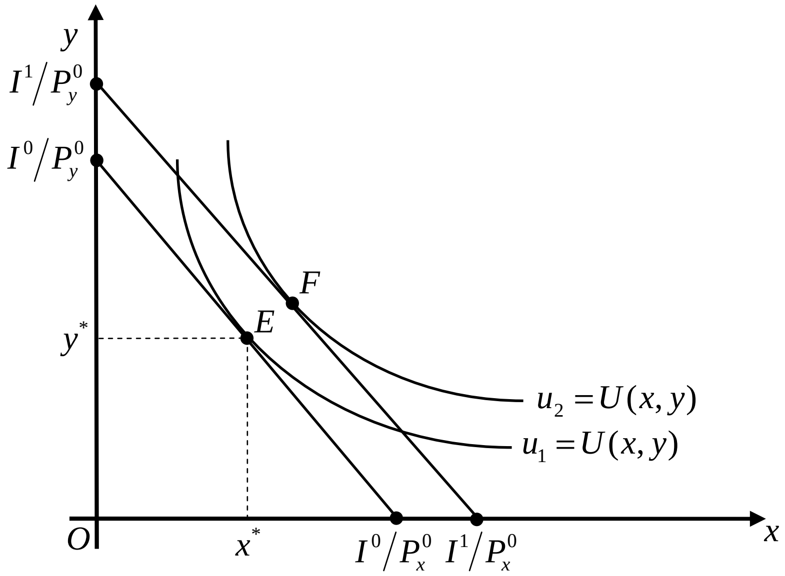

Figura 15: La caracterización del equilibrio

Por tanto, para caracterizar el punto *E*, junto a la condición de tangencia hemos de utilizar como segunda ecuación, la restricción presupuestaria a la que pertenece, de forma que será esta segunda ecuación del sistema la que nos permita obtener la solución del problema de optimización del consumidor. En otras palabras, la solución del problema se obtiene resolviendo el sistema compuesto por las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{u_1} = \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{I^0} \\ P_x^0 x + P_y^0 y = I^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{UMa_x}{UMa_y} = \dfrac{P_x^0}{P_y^0} \\ P_x^0 x + P_y^0 y = I^0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x^*, y^*)$$

Este sistema, y en particular, su primera ecuación puede ser reescrita de forma alternativa si atendemos a la definición de la relación marginal de sustitución, que no es otra cosa que la pendiente de la curva de indiferencia cambiada de signo.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{u_1} = -\frac{UMa_x}{UMa_y} \Rightarrow RMS_{y,x} = -\left.\frac{dy}{dx}\right|_{u_1} = \frac{UMa_x}{UMa_y}$$

Por tanto, el sistema que describe la solución del problema del consumidor se puede rescribir como:

$$\left.\begin{array}{l} RMS_{y,x} = \dfrac{P_x^0}{P_y^0} \\ P_x^0 x + P_y^0 y = I^0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x^*, y)$$

Por último, tanto la pendiente de la curva de indiferencia como la de la restricción presupuestaria podía haberse expresado en términos de $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{u_1} = -\dfrac{UMa_y}{UMa_x}$ y $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{I^0} = -\dfrac{P_y^0}{P_x^0}$, respectivamente. Por tanto, en términos de igualación de pendientes, el problema se puede expresar también como:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{u_1}=\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{I^0}\\ P_x^0x+P_y^0y=I^0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{UMa_y}{UMa_x}=\dfrac{P_y^0}{P_x^0}\\ P_x^0x+P_y^0y=I^0\end{array}\right\}\Rightarrow(x^*,y^*)$$

Y en términos de la relación marginal de sustitución, como:

$$\left.\begin{array}{l}RMS_{x,y}=\dfrac{P_y^0}{P_x^0}\\ P_x^0x+P_y^0y=I^0\end{array}\right\}\Rightarrow(x^*,y)$$

4.5.2. Un caso especial: soluciones de esquina

Si pensamos en el caso más general de combinaciones formadas por *n* bienes, lo más normal es que la combinación óptima no contenga cantidades positivas de todos los bienes, esto es, lo más normal es que haya bienes no demandados por el consumidor. A estos óptimos que no contienen cantidades positivas de todos los bienes les llamaremos *soluciones de esquina*.

En el caso de problemas del consumidor en los que las combinaciones óptimas sólo están formadas por dos bienes *x* e *y*, es decir, de tan solo dos variables de elección, las posibles soluciones de esquina vienen dadas por combinaciones óptimas en las que el consumidor decide gastar toda su renta o bien en el bien x o bien en el bien y. Las soluciones de esquina potenciales de nuestro problema de dos variables de elección serían soluciones del tipo $(0,y^*)$ o del tipo $(x^*,0)$. Ambas soluciones aparecen representadas en los paneles (a) y (b) de la figura 16 a continuación, en los que las preferencias de los consumidores son tales, que determinan soluciones que contienen cantidades nulas de uno de los bienes.

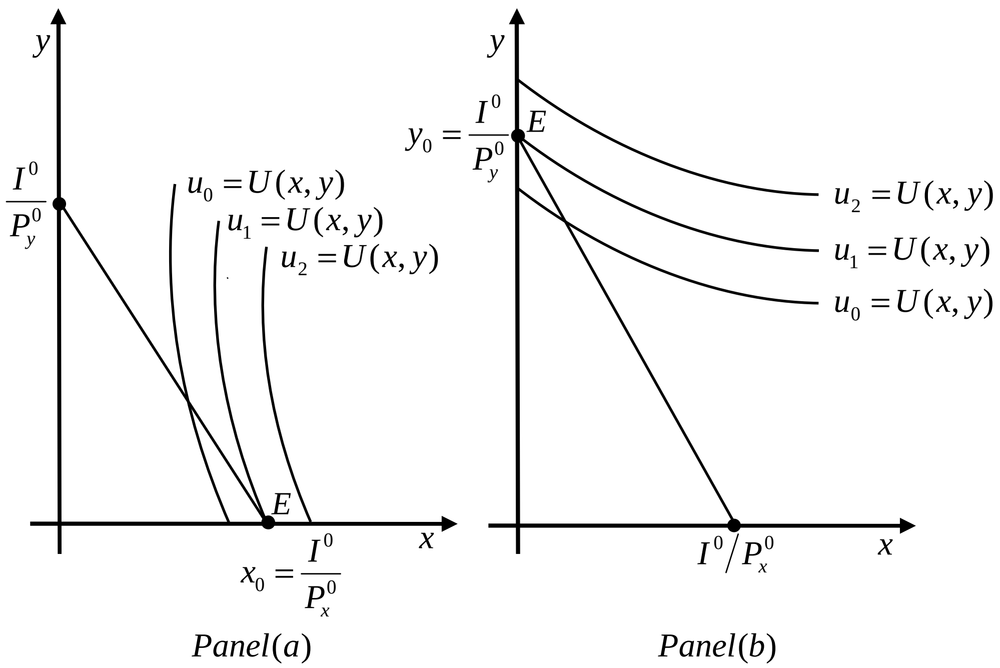

Figura 16: Soluciones de esquina

Es decir, en los dos casos los consumidores representados deciden gastar toda su renta en uno de los bienes. En el bien *x*, en el caso del consumidor representado en el panel (a) y en el bien *y*, en el caso del consumidor representado en el panel (b).

Como observará, lo que diferencia a cualquiera de las dos soluciones de esquina, con respecto a una solución de tangencia es que no se cumple la condición de igualación entre las pendientes de la curva de indiferencia y la pendiente de la restricción presupuestaria. Observe que cuando la solución del problema implica que el consumidor decide gastar toda su renta en el bien *x*, esto es, cuando la solución es del tipo $\left(I^0/P_x^0, 0\right)$ tal y como ocurre en el panel (a), la pendiente de la curva de indiferencia es mayor, en valor absoluto, que la pendiente de la restricción, o lo que es lo mismo, la relación marginal de sustitución en el punto es mayor que el cociente de precios.

Formalmente:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{u_0}\right| > \left|\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{I_0}\right| \Rightarrow y=0 \\ P_x^0 x + P_y^0 y = I^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} RMS_{y,x} > \dfrac{P_x^0}{P_y^0} \Rightarrow y=0 \\ P_x^0 x + P_y^0 y = I^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\dfrac{I^0}{P_x^0}, 0\right)$$

Por su parte, en el caso en el que la solución del problema del consumidor implicase gastar toda su renta en el bien *y*, es decir, una solución del tipo $\left(0, I^0/P_y^0\right)$ tal y como ocurre en el panel (b), la pendiente de la curva de indiferencia es menor, en valor absoluto, que la pendiente de la recta presupuestaria.

Formalmente:

$$\left.\begin{array}{l} \left|\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{u_0}\right| < \left|\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{I_0}\right| \Rightarrow y=0 \\ P_x^0 x + P_y^0 y = I^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} RMS_{y,x} < \dfrac{P_x^0}{P_y^0} \Rightarrow x=0 \\ P_x^0 x + P_y^0 y = I^0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left(0, \dfrac{I^0}{P_y^0}\right)$$

4.5.3. Solución del problema a través de la función de Lagrange

Dadas las características del problema, encontramos aquí la primera oportunidad de aplicar los conocimientos adquiridos en el tema dedicado al instrumental analítico, a la resolución de modelos microeconómicos. En particular, y dado que el problema del consumidor adopta la forma de un problema de optimización condicionado, para encontrar su solución nos bastará con buscar el máximo de la función de Lagrange.

$$\begin{array}{l} \underset{(x,y)}{Max}\ \ U(x,y) \\ s.a.\ \ P_x^0 x + P_y^0 y \le I^0 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}$$

En nuestro caso, la función de Lagrange del problema será una función de R^3 en R, ya que junto a las variables de elección debemos incluir una nueva variable por cada restricción del problema que denotaremos por λ, y que, como recordará del primer capítulo hemos llamado multiplicador de Lagrange.

La función de Lagrange del problema es:

$$\ell(x,y,\lambda)=U(x,y)-\lambda(P_x^0x+P_y^0y-I_0)$$

Dado que la búsqueda de un máximo de nuestro problema puede obtenerse buscando un máximo de la función de Lagrange, y dado que esta es una función de R^3 en R, las condiciones necesarias o de primer orden son simplemente que las derivadas parciales de la función de Lagrange con respecto a sus tres argumentos (x,y,λ) sean iguales a 0.

$$\frac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial x}=\underbrace{\frac{\partial U(x,y)}{\partial x}}_{UMa_x}-\lambda P_x^0=0$$
$$\frac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial y}=\underbrace{\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}}_{UMa_y}-\lambda P_y^0=0$$
$$\frac{\partial\ell(x,y,\lambda)}{\partial \lambda}=-(P_x^0x+P_y^0y-I_0)=0$$

Despejando λ en las dos primeras ecuaciones, se obtiene la condición de igualación de pendientes que obtuvimos a partir del procedimiento gráfico y que, junto a la recta presupuestaria, nos permite obtener el mismo sistema que obtuvimos a partir de la anterior aproximación.

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\lambda=-\dfrac{UMa_x}{P_x^0}\\ \lambda=-\dfrac{UMa_y}{P_y^0}\end{array}\right\}\Rightarrow-\dfrac{UMa_x}{P_x^0}=-\dfrac{UMa_y}{P_y^0}\\ -\left(P_x^0x+P_y^0y-I_0\right)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{UMa_x}{P_x^0}=\dfrac{UMa_y}{P_y^0}\\ P_x^0x+P_y^0y=I_0\end{array}\right\}$$

4.5.4. Interpretación del multiplicador en el problema de maximización de utilidad del consumidor

Resuelto a través de la maximización de la función de Lagrange, el problema del consumidor da como resultado las funciones de demanda de los dos bienes x e y más el óptimo del multiplicador de Lagrange ya que, como recordará, se trata de otra variable de elección más. Así, como resultado de la maximización de la función de Lagrange del problema tendremos que las cantidades demandadas y el multiplicador de Lagrange son funciones de los precios de los bienes y de la renta, es decir, de los parámetros del problema. Formalmente esta idea queda expresada en las siguientes expresiones:

$$x^*=f(P_x,P_y,I)$$
$$y^*=g(P_x,P_y,I)$$
$$\lambda^*=h(P_x,P_y,I)$$

Como recordará del tema 2, el valor del multiplicador de Lagrange del parámetro λ indica la tasa a la que la función objetivo (la función de utilidad) varía a medida que varía el parámetro de la restricción (es decir, la renta). Por tanto, en nuestro caso el multiplicador de Lagrange del problema es:

$$x^* = f(P_x, P_y, I)$$
$$y^* = g(P_x, P_y, I)$$
$$\lambda^* = h(P_x, P_y, I) = \frac{dU^*(x^*, y^*)}{dI} = \frac{dU^*\left(f(P_x, P_y, I), g(P_x, P_y, I)\right)}{dI} = UMa_I^*$$

ya que en nuestro caso la función objetivo es la función de utilidad y el parámetro de la restricción es la renta monetaria. Por tanto, el multiplicador de Lagrange del problema de maximización de utilidad por parte del consumidor no es otra cosa que la utilidad marginal de la renta, ya que nos indica cómo varía la satisfacción del consumidor ante una variación marginal de su renta.

4.5.5. La interpretación económica de la solución del problema del consumidor

Una vez caracterizada la solución a través de dos aproximaciones alternativas, deberíamos traducir la conducta que describen las ecuaciones anteriores a términos económicos. Evidentemente una de ellas es inmediata. En efecto, el hecho de que la solución haya de estar sobre la recta presupuestaria, es decir que el par (x^*, y^*) verifique que $P_x^0 x^* + P_y^0 y^* = I^0$ indica simplemente, que el gasto en las cantidades demandadas de ambos bienes ha de ser igual a la renta total de que dispone el consumidor, es decir, que el consumidor gasta toda su renta.

La otra condición, la determinada por la igualación de las pendientes de la curva de indiferencia y de la recta presupuestaria puede interpretarse realizando una mínima manipulación algebraica sobre la misma. Recuerde que esta condición se podía escribir como:

$$\frac{UMa_x}{UMa_y} = \frac{P_x^0}{P_y^0}$$

La expresión anterior se puede rescribir como:

$$\frac{1}{P_x^0} UMa_x = \frac{1}{P_y^0} UMa_y$$

donde $1/P_x^0$ y $1/P_y^0$ son las cantidades de los bienes *x* e *y*, respectivamente, que se pueden adquirir con una unidad monetaria. Como recordará la utilidad marginal de un bien expresa la satisfacción que reporta la última unidad consumida. Por tanto, el producto $(1/P_x^0)UMa_x$ puede interpretarse como la satisfacción que reporta la última unidad monetaria gastada en el bien *x*, mientras que $(1/P_y^0)UMa_y$ será la satisfacción proporcionada por la última unidad monetaria gastada en el bien *y*. Aplicando esta interpretación, la igualdad $(1/P_x^0)UMa_x = (1/P_y^0)UMa_y$ se puede leer como sigue: cuando el consumidor maximiza su utilidad, las cantidades demandadas de los dos bienes han de ser tales que la última unidad monetaria gastada en el bien *x*, ha de reportar la misma satisfacción que la última unidad monetaria gastada en el bien *y*. A esta expresión se la conoce con el nombre de *ley de igualdad de las utilidades marginales ponderadas por sus precios*.

Para afianzar más esta idea, suponga que el consumidor hubiese elegido consumir unas cantidades de los bienes *x* e *y* para las cuales, la satisfacción de la última unidad monetaria gastada en bien *x* reportase una mayor satisfacción que la última unidad monetaria gastada en bien *y*:

$$\frac{1}{P_x^0}UMa_x > \frac{1}{P_y^0}UMa_y$$

En este caso, el consumidor no puede estar maximizando su satisfacción o utilidad, ya que podría aumentarla reasignando su consumo: sustituyendo consumo de bien *y* por consumo de bien *x*, hasta que se verifique la ley de igualdad de las utilidades marginales ponderadas por sus precios.

Apéndice: Generalización para *n* bienes

El problema del consumidor en el caso general de combinaciones de bienes formadas por *n* bienes quedará formulado por el problema de maximización de utilidad:

$$\begin{aligned} &\underset{(x_1,\dots,x_n)}{Max} \quad U(x_1,\dots,x_n) \\ &s.a.\ P_{x_1}^0 x + \dots + P_{x_n}^0 x_n \le I^0 \\ &x_1 \ge 0,\dots,x_n \ge 0 \end{aligned}$$

cuya función de Lagrange del problema, será:

$$\ell(x_1,\dots,x_n,\lambda) = U(x_1,\dots,x_n) - \lambda\left(P_{x_1}^0 x_1 + \dots + P_{x_n}^0 x_n - I_0\right)$$

Las condiciones de primer orden del problema son:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \ell(x_1,\dots,x_n,\lambda)}{\partial x_1} = \frac{\partial U(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1} - \lambda P_{x_1}^0 = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\frac{\partial \ell(x_1,\dots,x_n,\lambda)}{\partial x_n} = \frac{\partial U(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_n} - \lambda P_{x_n}^0 = 0 \\ &\frac{\partial \ell(x_1,\dots,x_n,\lambda)}{\partial \lambda} = -\left(P_{x_1}^0 x_1 + \dots + P_{x_n}^0 x_n - I_0\right) = 0 \end{aligned}$$

En las que tras despejar λ en las *n* primeras ecuaciones, se obtiene la ley de igualdad de las utilidades marginales ponderadas junto a la condición de que el punto se encuentre sobre la recta presupuestaria (que el consumidor gaste toda su renta).

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\frac{\partial U(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_1}}{P_{x_1}^0} = \dots = \frac{\frac{\partial U(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_n}}{P_{x_n}^0} \\ &P_{x_1}^0 x_1 + \dots + P_{x_n}^0 x_n = I_0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\frac{UMa_{x_1}}{P_{x_1}^0} = \dots = \frac{UMa_{x_n}}{P_{x_n}^0} \\ &P_{x_1}^0 x_1 + \dots + P_{x_n}^0 x_n = I_0 \end{aligned}$$