11

Ecuaciones paramétricas y coordenadas polares

INTRODUCCIÓN En este capítulo estudiaremos nuevas formas para definir curvas en el plano. En vez de visualizar una curva como la gráfica de una función o de una ecuación, consideraremos un modo más general para representar una curva: como si se tratara de la trayectoria de una partícula en movimiento, cuya posición cambia con el tiempo. Así, cada una de las coordenadas x y y de la posición de la partícula se convierte en una función de una tercera variable t. También podemos cambiar la forma en que se describen los puntos en el plano usando *coordenadas polares*, en vez del sistema rectangular o cartesiano. Ambas herramientas son útiles para describir movimiento, como el de los planetas y satélites, o el de los proyectiles que se desplazan en el espacio o en un plano. Además, revisaremos las definiciones geométricas y las ecuaciones estándar de parábolas, elipses e hipérbolas. Estas curvas reciben el nombre de *secciones cónicas* o, simplemente, *cónicas* y describen las trayectorias que siguen los proyectiles, los planetas o cualquier otro objeto que se mueva bajo la sola influencia de una fuerza gravitacional o electromagnética.

11.1 Parametrización de curvas planas

En capítulos anteriores estudiamos las curvas como gráficas de funciones o de ecuaciones que incluyen a las dos variables x y y. Ahora presentaremos otra manera de describir una curva, al expresar ambas coordenadas como funciones de una tercera variable t.

Ecuaciones paramétricas

La figura 11.1 muestra la trayectoria de una partícula que se mueve en el plano xy. Observe que la trayectoria no pasa la prueba de la recta vertical, de manera que no se puede describir como la gráfica de una función de la variable x. Sin embargo, algunas veces la trayectoria se describe con un par de ecuaciones, $x = f(t)$ y $y = g(t)$, donde f y g son funciones continuas. Para estudiar el movimiento, t generalmente representa el tiempo. Ecuaciones como éstas describen curvas más generales que las descritas por una sola función y, además de la gráfica de la trayectoria recorrida, indican la posición $(x, y) = (f(t), g(t))$ de la partícula en cualquier tiempo t.

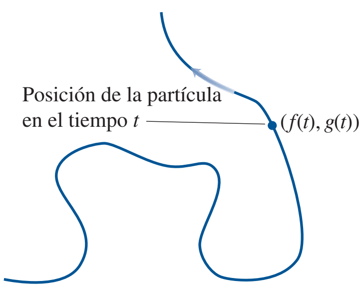


FIGURA 11.1 La curva o trayectoria trazada por una partícula que se mueve en el plano xy no siempre es la gráfica de una función o de una sola ecuación.

DEFINICIÓN Si x y y están expresadas como funciones

$$x = f(t), \qquad y = g(t)$$

en un intervalo I de valores t, entonces, el conjunto de puntos $(x, y) = (f(t), g(t))$ definido por estas ecuaciones es una **curva paramétrica**. Las ecuaciones son **ecuaciones paramétricas** de la curva.

La variable t es un **parámetro** de la curva y su dominio I es el **intervalo del parámetro**. Si I es un intervalo cerrado, $a \leq t \leq b$, el punto $(f(a), g(a))$ es el **punto inicial** de la curva, y

$(f(b), g(b))$ es el **punto final**. Cuando tenemos ecuaciones paramétricas y un intervalo para el parámetro de la curva, se dice que hemos **parametrizado** la curva. Las ecuaciones y el intervalo, en conjunto, constituyen la **parametrización** de la curva. Una curva determinada puede representarse mediante conjuntos diferentes de ecuaciones paramétricas. (Vea los ejercicios 19 y 20).

EJEMPLO 1 Dibuje la curva definida por las ecuaciones paramétricas

$$x = t^2, \qquad y = t + 1, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Solución Elaboramos una pequeña tabla de valores (tabla 11.1), graficamos los puntos (x, y) y trazamos una curva suave que pase por ellos (figura 11.2). A cada valor de t corresponde un punto (x, y) sobre la curva; por ejemplo, a $t = 1$ le corresponde el punto $(1, 2)$ registrado en la tabla 11.1. Si pensamos que la curva es la trayectoria de una partícula en movimiento, entonces, la partícula se desplaza a lo largo de la curva en la dirección de las flechas que se muestran en la figura 11.2. Si bien los intervalos de tiempo son iguales en la tabla, los puntos consecutivos trazados a lo largo de la curva no están a las mismas distancias sobre el arco de la curva. La razón es que la partícula reduce su velocidad mientras se aproxima al eje y a lo largo de la rama inferior de la curva conforme t aumenta, y luego acelera después de alcanzar el eje y en $(0, 1)$ desplazándose a lo largo de la rama superior. Como el intervalo de valores para t está compuesto por números reales, no existe un punto inicial ni uno final de la curva. ■

TABLA 11.1 Valores de $x = t^2$ y $y = t + 1$ para algunos valores seleccionados de t.

t	x	y
−3	9	−2
−2	4	−1
−1	1	0
0	0	1
1	1	2
2	4	3
3	9	4

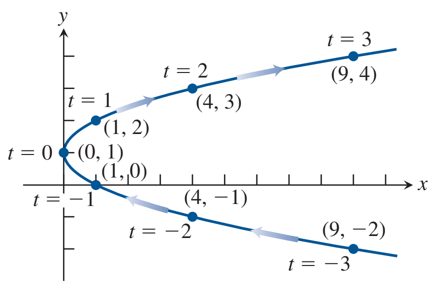


FIGURA 11.2 Curva representada por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$ y $y = t + 1$ (ejemplo 1).

EJEMPLO 2 Identifique geométricamente la curva del ejemplo 1 (figura 11.2) eliminando el parámetro t y obteniendo una ecuación algebraica en x y y.

Solución Resolvemos la ecuación $y = t + 1$ despejando el parámetro t y sustituyendo el resultado en la ecuación paramétrica de x. Esto da como resultado $t = y - 1$ y

$$x = t^2 = (y - 1)^2 = y^2 - 2y + 1.$$

La ecuación $x = y^2 - 2y + 1$ representa una parábola, como la mostrada en la figura 11.2. Algunas veces es muy difícil, o incluso imposible, eliminar el parámetro de un par de ecuaciones paramétricas como lo hicimos aquí. ■

EJEMPLO 3 Grafique las curvas paramétricas

a) $x = \cos t, \qquad y = \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$

b) $x = a \cos t, \qquad y = a \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$

Solución

a) Puesto que $x^2 + y^2 = \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, la curva paramétrica se encuentra en la circunferencia unitaria $x^2 + y^2 = 1$. Conforme t aumenta de 0 a 2π, el punto $(x, y) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$ inicia su recorrido en $(1, 0)$ y traza la circunferencia completa una sola vez en sentido opuesto al de las manecillas del reloj (figura 11.3).

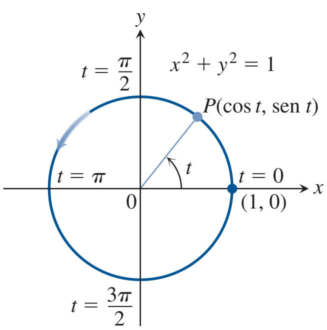


FIGURA 11.3 Las ecuaciones $x = \cos t$ y $y = \operatorname{sen} t$ describen el movimiento sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$. La flecha indica la dirección en la que aumenta t (ejemplo 3).

***b*)** Para $x = a \cos t$, $y = a \operatorname{sen} t$, $0 \leq t \leq 2\pi$, tenemos que $x^2 + y^2 = a^2 \cos^2 t + a^2 \operatorname{sen}^2 t = a^2$. La parametrización describe un movimiento que inicia en el punto $(a, 0)$, recorre una vez la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$ en sentido opuesto al de las manecillas del reloj y regresa a $(a, 0)$ en $t = 2\pi$. La gráfica es un círculo de radio $r = |a|$ con centro en el origen y cuyos puntos tienen coordenadas $(a \cos t, a \operatorname{sen} t)$. ■

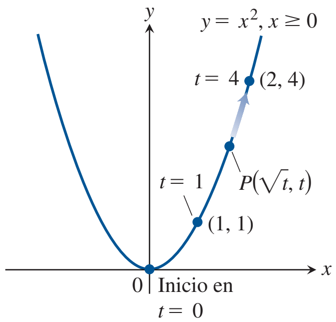


FIGURA 11.4 Las ecuaciones $x = \sqrt{t}$ y $y = t$ y el intervalo $t \geq 0$ describen el movimiento de una partícula que traza la mitad derecha de la parábola $y = x^2$ (ejemplo 4).

EJEMPLO 4 La posición $P(x, y)$ de una partícula que se mueve en el plano *xy* está dada por las ecuaciones y el intervalo del parámetro siguientes:

$$x = \sqrt{t}, \qquad y = t, \qquad t \geq 0.$$

Identifique la trayectoria trazada por la partícula y describa el movimiento.

Solución Intentamos identificar la trayectoria eliminando t de las ecuaciones $x = \sqrt{t}$ y $y = t$. Tal vez obtengamos una relación algebraica reconocible entre x y y. Encontramos que

$$y = t = \left(\sqrt{t}\right)^2 = x^2.$$

Las coordenadas de la posición de la partícula satisfacen la ecuación $y = x^2$; por lo tanto, la partícula se mueve a lo largo de la parábola $y = x^2$.

Sin embargo, sería un error concluir que la partícula recorre toda la parábola $y = x^2$ en su trayectoria; sólo recorre la mitad de la parábola. La coordenada x de la partícula nunca es negativa. La partícula inicia en $(0, 0)$ cuando $t = 0$ y sube en el primer cuadrante conforme t aumenta (figura 11.4). El intervalo del parámetro es $[0, \infty)$ y no hay punto final. ■

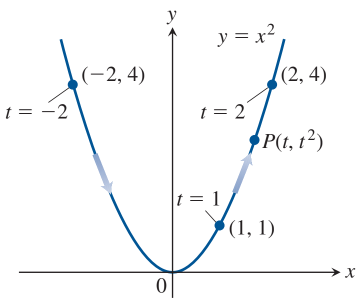


FIGURA 11.5 La trayectoria definida por $x = t$, $y = t^2$, $-\infty < t < \infty$ es la parábola completa $y = x^2$ (ejemplo 5).

La gráfica de cualquier función $y = f(x)$ se obtiene siempre mediante una **parametrización natural** $x = t$ y $y = f(t)$. El dominio del parámetro es, en este caso, el mismo que el dominio de la función f.

EJEMPLO 5 La parametrización de la gráfica de la función $f(x) = x^2$ está dada por

$$x = t, \qquad y = f(t) = t^2, \qquad -\infty < t < \infty.$$

Cuando $t \geq 0$, esta parametrización da como resultado la misma trayectoria en el plano *xy* que teníamos en el ejemplo 4. Sin embargo, como el parámetro t también puede ser negativo, obtenemos además la porción izquierda de la parábola; es decir, tenemos la curva parabólica completa. Para esta parametrización, no hay un punto inicial ni un punto final (figura 11.5). ■

Observe que una parametrización también especifica (mediante el valor del parámetro) *cuándo* la partícula que se mueve a lo largo de la curva *se ubica* en un punto específico de ésta. En el ejemplo 4, se llega al punto $(2, 4)$ cuando $t = 4$; en el ejemplo 5, el punto se alcanza "antes", cuando $t = 2$. Usted observará las implicaciones de este aspecto de la parametrización cuando considere la posibilidad de que dos objetos colisionen: deben estar exactamente en la misma posición $P(x, y)$ para algunos valores (posiblemente diferentes) de sus respectivos parámetros. Explicaremos más acerca de este aspecto de las parametrizaciones cuando estudiemos el concepto de movimiento en el capítulo 13.

EJEMPLO 6 Obtenga la parametrización de la recta que pasa por el punto (a, b) y que tiene una pendiente m.

Solución La ecuación cartesiana de la recta es $y - b = m(x - a)$. Si establecemos el parámetro $t = x - a$, encontramos que $x = a + t$ y $y - b = mt$. Es decir,

$$x = a + t, \qquad y = b + mt, \qquad -\infty < t < \infty$$

parametrizan la recta. Esta parametrización difiere de la que se obtendría usando la técnica de parametrización natural del ejemplo 5, cuando $t = x$. Sin embargo, ambas dan como resultado la misma recta. ■

TABLA 11.2 Valores de $x = t + (1/t)$ y $y = t - (1/t)$ para algunos valores seleccionados de t.

t	$1/t$	x	y
0.1	10.0	10.1	−9.9
0.2	5.0	5.2	−4.8
0.4	2.5	2.9	−2.1
1.0	1.0	2.0	0.0
2.0	0.5	2.5	1.5
5.0	0.2	5.2	4.8
10.0	0.1	10.1	9.9

EJEMPLO 7 Dibuje e identifique la trayectoria trazada por el punto $P(x, y)$ si

$$x = t + \frac{1}{t}, \qquad y = t - \frac{1}{t}, \qquad t > 0.$$

Solución Elaboramos una tabla de valores (tabla 11.2), graficamos los puntos y trazamos una curva suave que pase por ellos, como en el ejemplo 1. En seguida, eliminamos el parámetro t de las ecuaciones. El procedimiento es más complicado que el del ejemplo 2. Tomando las diferencias entre x y y dadas por las ecuaciones paramétricas, tenemos

$$x - y = \left(t + \frac{1}{t}\right) - \left(t - \frac{1}{t}\right) = \frac{2}{t}.$$

Si sumamos las dos ecuaciones paramétricas, entonces,

$$x + y = \left(t + \frac{1}{t}\right) + \left(t - \frac{1}{t}\right) = 2t.$$

Eliminamos el parámetro t multiplicando estas dos últimas ecuaciones:

$$(x - y)(x + y) = \left(\frac{2}{t}\right)(2t) = 4,$$

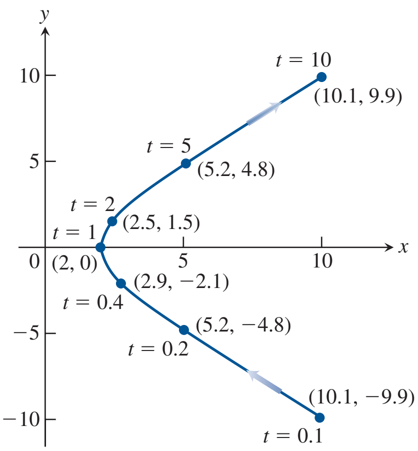


FIGURA 11.6 La curva de $x = t + (1/t)$, $y = t - (1/t)$, $t > 0$ del ejemplo 7. (La parte que se muestra es para $0.1 \leq t \leq 10$).

o, si multiplicamos los términos del lado izquierdo, obtenemos la ecuación estándar de una hipérbola (un tema que se revisará en la sección 11.6):

$$x^2 - y^2 = 4. \tag{1}$$

Por lo tanto, las coordenadas de todos los puntos $P(x, y)$ descritas por las ecuaciones paramétricas satisfacen la ecuación (1). Sin embargo, la ecuación (1) no requiere que la coordenada x sea positiva. Así que hay puntos (x, y) sobre la hipérbola que no satisfacen la ecuación paramétrica $x = t + (1/t)$, $t > 0$, para la cual x siempre es positiva. Esto es, las ecuaciones paramétricas no generan puntos sobre la rama izquierda de la hipérbola representada por la ecuación (1), es decir, puntos donde la coordenada x sería negativa. Para valores positivos pequeños de t, la trayectoria permanece en el cuarto cuadrante y sube hacia el primer cuadrante conforme t aumenta, cruzando el eje x cuando $t = 1$ (vea la figura 11.6). El dominio del parámetro es $(0, \infty)$ y no hay punto inicial ni punto final de la trayectoria. ■

Los ejemplos 4, 5 y 6 ilustran que una curva determinada, o una parte de ella, se representan usando diferentes parametrizaciones. En el caso del ejemplo 7, la rama derecha de la hipérbola también se representa mediante la parametrización

$$x = \sqrt{4 + t^2}, \qquad y = t, \qquad -\infty < t < \infty,$$

la cual se obtiene al resolver la ecuación (1) para $x \geq 0$ y dejando que y sea el parámetro. Otra parametrización de la rama derecha de la hipérbola representada por la ecuación 1 es

$$x = 2 \sec t, \qquad y = 2 \tan t, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}.$$

Esta parametrización se obtiene de la identidad trigonométrica $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$, de manera que

$$x^2 - y^2 = 4 \sec^2 t - 4 \tan^2 t = 4(\sec^2 t - \tan^2 t) = 4.$$

Conforme t varía entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, $x = \sec t$ se mantiene positiva y $y = \tan t$ varía entre $-\infty$ e ∞, por lo que P recorre la rama derecha de la hipérbola. Viene de la mitad inferior de la rama cuando t tiende a cero por la izquierda, llega a $(2, 0)$ cuando $t = 0$, y entra al primer cuadrante conforme t sigue aumentando hacia $\pi/2$. Ésta es la misma rama de la hipérbola de la cual se muestra una parte en la figura 11.6.

Cicloides

El problema con un reloj de péndulo cuya lenteja oscila en un arco circular es que la frecuencia de la oscilación depende de la amplitud de ésta. Cuanto más amplia sea la oscilación, más tardará la lenteja del péndulo en regresar al centro (su posición más baja).

Esto no sucede si la lenteja oscila siguiendo la trayectoria de una *cicloide*. En 1673 Christian Huygens diseñó un reloj de péndulo cuya lenteja oscilaba en una cicloide, curva que definiremos en el ejemplo 8. Huygens colgó la lenteja de un fino alambre restringido por topes en forma de arco que ocasionaban que ésta se ciñera a ellos cuando oscilaba alejándose del centro (figura 11.7). Describimos la trayectoria paramétrica correspondiente en el siguiente ejemplo.

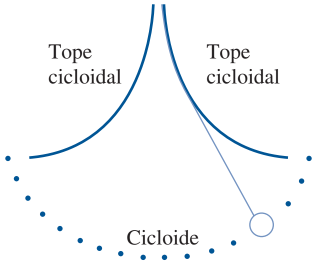


FIGURA 11.7 En el reloj de péndulo de Huygens, la lenteja oscila en una cicloide, de manera que la frecuencia es independiente de la amplitud.

EJEMPLO 8 Una rueda de radio a se mueve a lo largo de una recta horizontal. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la trayectoria que recorre un punto P localizado en la circunferencia de la rueda. La trayectoria se llama **cicloide**.

Solución Tomamos el eje x como la recta horizontal, marcamos un punto P en la rueda, empezamos a mover esta última con P en el origen y la hacemos girar hacia la derecha. Como parámetro, utilizamos el ángulo t que gira la rueda, medido en radianes. La figura 11.8 muestra la rueda un poco después, cuando su base se encuentra a at unidades del origen. El centro de la rueda C se encuentra en (at, a) y las coordenadas de P son

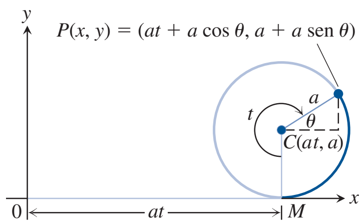


FIGURA 11.8 La posición de $P(x, y)$ en la rueda que gira un ángulo t (ejemplo 8).

$$x = at + a\cos\theta, \qquad y = a + a\,\text{sen}\,\theta.$$

Para expresar θ en términos de t, observamos en la figura que $t + \theta = 3\pi/2$, de manera que

$$\theta = \frac{3\pi}{2} - t.$$

Con esto se tiene

$$\cos\theta = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\text{sen}\,t, \qquad \text{sen}\,\theta = \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - t\right) = -\cos t.$$

Las ecuaciones que buscamos son

$$x = at - a\,\text{sen}\,t, \qquad y = a - a\cos t.$$

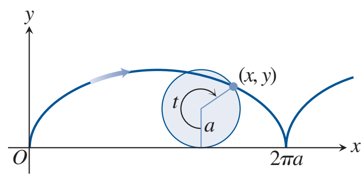


FIGURA 11.9 La curva cicloide $x = a(t - \text{sen}\,t)$, $y = a(1 - \cos t)$, para $t \geq 0$.

Por lo general, éstas se escriben factorizando a:

$$x = a(t - \text{sen}\,t), \qquad y = a(1 - \cos t). \tag{2}$$

La figura 11.9 muestra el primer arco de la cicloide y parte del siguiente. ■

Braquistocronas y tautocronas

Si volteamos de cabeza la figura 11.9, las ecuaciones (2) siguen siendo válidas y la curva resultante (figura 11.10) tiene dos propiedades físicas interesantes. La primera se relaciona con el origen O y el punto B en la parte inferior del primer arco. De todas las curvas suaves que unen estos puntos, la cicloide es la curva a lo largo de la cual una cuenta (como en un collar), sujeta sólo a la fuerza de la gravedad (sin fricción), se deslizará de O a B en el menor tiempo posible. Esto convierte a la cicloide en una **braquistocrona** o curva de tiempo más corto para estos puntos. La segunda propiedad es que, aunque la cuenta inicie su trayectoria hacia B desde un punto intermedio de la curva, necesitará la misma cantidad de tiempo para llegar a B. Esto hace a la cicloide una **tautocrona**, es decir, la curva con el mismo tiempo para O y B.

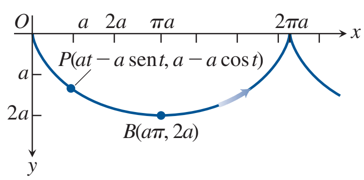


FIGURA 11.10 Al voltear de cabeza la figura 11.9, el eje y apunta en la dirección de la fuerza gravitacional. Las ecuaciones (2) también describen la curva en forma paramétrica.

¿Existen otras curvas braquistocronas que unan O y B, o la cicloide es la única? Podemos formular esta pregunta desde el punto de vista matemático de la siguiente manera. Al principio, la energía cinética de la cuenta es cero, puesto que su velocidad es cero. El trabajo que efectúa la gravedad cuando la cuenta se mueve de (0, 0) a cualquier otro punto (x, y) en el plano es mgy, y éste debe ser igual al cambio en la energía cinética. (Vea el ejercicio 23, sección 6.5). Es decir,

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m(0)^2.$$

Por lo tanto, cuando la cuenta llega a (x, y), su velocidad tiene que ser

$$v = \sqrt{2gy}.$$

Es decir,

$$\frac{ds}{dT} = \sqrt{2gy}$$

ds es la diferencial de longitud del arco a lo largo de la trayectoria de la cuenta, y *T* representa el tiempo.

o

$$dT = \frac{ds}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}\,dx}{\sqrt{2gy}}. \tag{3}$$

El tiempo T_f que tarda la cuenta en deslizarse a lo largo de una trayectoria particular $y = f(x)$ de O a $B(a\pi, 2a)$ es

$$T_f = \int_{x=0}^{x=a\pi} \sqrt{\frac{1 + (dy/dx)^2}{2gy}}\,dx. \tag{4}$$

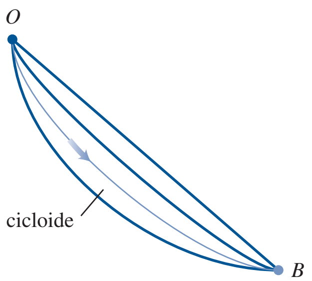


FIGURA 11.11 La cicloide es la única curva que minimiza el tiempo que tarda una cuenta sin fricción en ir del punto O al B.

¿Qué curvas $y = f(x)$, si las hay, minimizan el valor de esta integral?

A primera vista, podríamos suponer que la línea recta que une O y B daría el tiempo más breve, pero quizá no. Podría ser ventajoso que la cuenta cayera verticalmente al principio para incrementar su velocidad más rápido. Con una velocidad mayor, la cuenta podría recorrer una trayectoria más larga y, aún así, llegar primero a B. En realidad, esta idea es correcta. De acuerdo con una rama de las matemáticas conocida como *cálculo de variaciones*, la respuesta es que la cicloide original de O a B es la única braquistocrona para O y B (figura 11.11).

En la siguiente sección mostraremos cómo encontrar la diferencial de la longitud de arco ds para una curva parametrizada. Una vez que sabemos cómo encontrar ds, podemos calcular el tiempo dado por el lado derecho de la ecuación (4) para la cicloide. Este cálculo indica el tiempo que tarda una cuenta en deslizarse sin fricción por la cicloide hasta B, después que se ha liberado a partir del reposo en O. Este tiempo es $\pi\sqrt{a/g}$, donde a es el radio de la rueda que define la cicloide dada. Además, si el movimiento de la cuenta inicia en algún punto inferior en la cicloide correspondiente a un valor $t_0 > 0$ del parámetro, podemos integrar la forma paramétrica de $ds/\sqrt{2gy}$ en la ecuación (3) sobre el intervalo $[t_0, \pi]$, para encontrar el tiempo que le toma a la cuenta alcanzar el punto B. El cálculo da como resultado el mismo valor del tiempo $T = \pi\sqrt{a/g}$. La cuenta tarda el mismo tiempo para llegar a B, sin importar desde dónde inicie su desplazamiento, lo que convierte a la cicloide en una tautocrona. Las cuentas que inician simultáneamente desde O, A y C en la figura 11.12, por ejemplo, llegarán a B al mismo tiempo. Por esa razón, el movimiento del péndulo del reloj de Huygens, en la figura 11.7, es independiente de la amplitud de la oscilación.

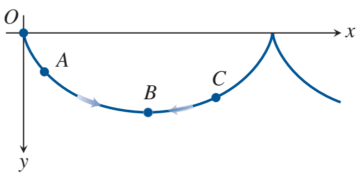


FIGURA 11.12 Las cuentas liberadas de manera simultánea en la cicloide en O, A y C llegarán a B al mismo tiempo.

Ejercicios 11.1

Obtención de ecuaciones cartesianas a partir de ecuaciones paramétricas

Los ejercicios 1 a 18 presentan ecuaciones paramétricas e intervalos de parámetros del movimiento de una partícula en el plano xy. Identifique la trayectoria de la partícula determinando una ecuación cartesiana para ello. Grafique la ecuación cartesiana. (La gráfica variará con la ecuación empleada). Indique la porción de la gráfica seguida por la partícula y la dirección del movimiento.

1. $x = 3t, \quad y = 9t^2, \quad -\infty < t < \infty$

2. $x = -\sqrt{t}, \quad y = t, \quad t \geq 0$

3. $x = 2t - 5, \quad y = 4t - 7, \quad -\infty < t < \infty$

4. $x = 3 - 3t, \quad y = 2t, \quad 0 \leq t \leq 1$

5. $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi$

6. $x = \cos(\pi - t), \quad y = \operatorname{sen}(\pi - t), \quad 0 \leq t \leq \pi$

7. $x = 4\cos t, \quad y = 2\operatorname{sen} t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

8. $x = 4\operatorname{sen} t, \quad y = 5\cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

9. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos 2t, \quad -\dfrac{\pi}{2} \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$

10. $x = 1 + \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t - 2, \quad 0 \leq t \leq \pi$

11. $x = t^2, \quad y = t^6 - 2t^4, \quad -\infty < t < \infty$

12. $x = \dfrac{t}{t-1}, \quad y = \dfrac{t-2}{t+1}, \quad -1 < t < 1$

13. $x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad -1 \leq t \leq 0$

14. $x = \sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{t}, \quad t \geq 0$

15. $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

16. $x = -\sec t, \quad y = \tan t, \quad -\pi/2 < t < \pi/2$

17. $x = -\cosh t, \quad y = \operatorname{senh} t, \quad -\infty < t < \infty$

18. $x = 2\operatorname{senh} t, \quad y = 2\cosh t, \quad -\infty < t < \infty$

Obtención de ecuaciones paramétricas

19. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula que inicia en $(a, 0)$ y sigue la circunferencia $x^2 + y^2 = a^2$

***a*)** una vez en el sentido de las manecillas del reloj.

***b*)** una vez en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

***c*)** dos veces en el sentido de las manecillas del reloj.

***d*)** dos veces en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

(Hay muchas maneras de lograrlo, de manera que sus respuestas tal vez sean diferentes de las que se presentan al final del libro).

20. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula que inicia en $(a, 0)$ y que traza la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$

***a*)** una vez en el sentido de las manecillas del reloj.

***b*)** una vez en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

***c*)** dos veces en el sentido de las manecillas del reloj.

***d*)** dos veces en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj.

(Al igual que en el ejercicio 19, hay muchas respuestas correctas).

En los ejercicios 21 a 26, determine la parametrización de la curva.

21. El segmento de recta con extremos en $(-1, -3)$ y $(4, 1)$

22. El segmento de recta con extremos en $(-1, 3)$ y $(3, -2)$

23. La mitad inferior de la parábola $x - 1 = y^2$

24. La mitad izquierda de la parábola $y = x^2 + 2x$

25. El rayo (“la mitad de la recta”) que inicia en el punto $(2, 3)$ y que pasa por el punto $(-1, -1)$

26. El rayo (“la semirrecta”) que inicia en el punto $(-1, 2)$ y que pasa por el punto $(0, 0)$

27. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula que inicia en $(2, 0)$ y que traza la mitad superior de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ cuatro veces.

28. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula que se desplaza a lo largo de la gráfica $y = x^2$ del siguiente modo: inicia en $(0, 0)$, se dirige hacia $(3, 9)$ y luego viaja de ida y vuelta de $(3, 9)$ a $(-3, 9)$ una infinidad de veces.

29. Obtenga las ecuaciones paramétricas del semicírculo

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad y > 0,$$

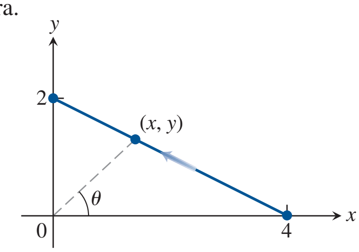
usando como parámetro la pendiente $t = dy/dx$ de la tangente a la curva en (x, y).

30. Obtenga las ecuaciones paramétricas de la circunferencia

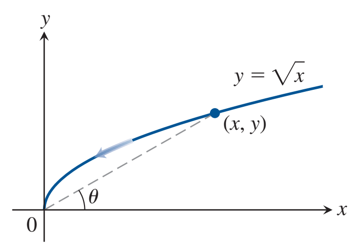
$$x^2 + y^2 = a^2,$$

usando como parámetro la longitud del arco s medida en sentido opuesto al de las manecillas del reloj del punto $(a, 0)$ al punto (x, y).

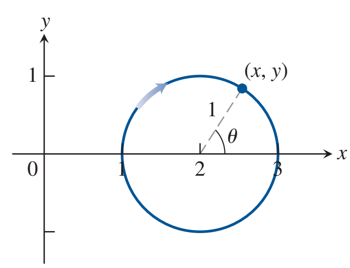
31. Obtenga la parametrización del segmento de recta que une los puntos $(0, 2)$ y $(4, 0)$ usando como parámetro el ángulo θ de la siguiente figura.



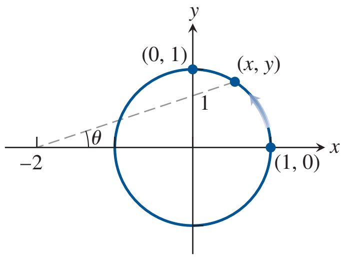
32. Obtenga la parametrización de la curva $y = \sqrt{x}$ con punto final en $(0, 0)$ usando como parámetro el ángulo θ de la siguiente figura.



33. Obtenga la parametrización de la circunferencia $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ que inicia en $(1, 0)$ y se mueve una vez en el sentido de las manecillas del reloj, usando como parámetro el ángulo central θ de la siguiente figura.



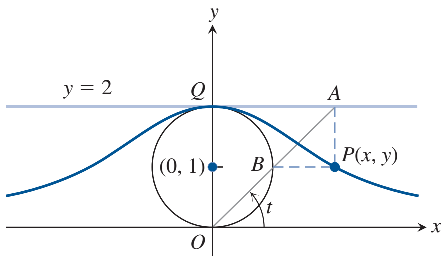
34. Obtenga la parametrización de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ que inicia en (1, 0) y se mueve al punto final (0, 1) en el sentido opuesto al de las manecillas del reloj, usando como parámetro el ángulo θ de la siguiente figura.



35. La bruja de María Agnesi La forma de campana de la curva conocida como bruja de María Agnesi se puede construir del siguiente modo. Inicie con un círculo de radio 1, con centro en el punto (0, 1), como se muestra en la figura. Seleccione un punto A sobre la recta $y = 2$ y únalo con el origen mediante un segmento de recta. Llame B al punto donde el segmento cruza a la circunferencia. Haga que P sea el punto donde la recta vertical que pasa por A cruce la recta horizontal que pasa por B. La bruja es la curva trazada por P conforme A se mueve a lo largo de la recta $y = 2$. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro de la bruja, expresando las coordenadas de P en términos de t, el ángulo, medido en radianes, que forma el segmento OA con la parte positiva del eje x. Las siguientes igualdades (que usted debe considerar) serán de gran ayuda.

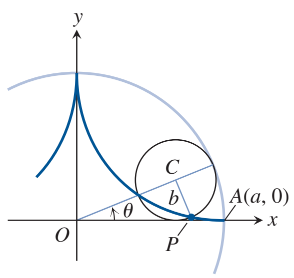
a) $x = AQ$ ***b***) $y = 2 - AB \operatorname{sen} t$

c) $AB \cdot OA = (AQ)^2$

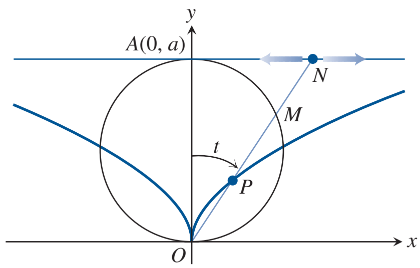


36. Hipocicloide Cuando un círculo rueda dentro de una circunferencia fija, cualquier punto P sobre la circunferencia del círculo que rueda describe una *hipocicloide*. Sea $x^2 + y^2 = a^2$, la circunferencia fija, b el radio del círculo que rueda, y $A(a, 0)$ la posición inicial del punto P que trazará la curva. Obtenga ecuaciones paramétricas para la hipocicloide, usando como parámetro el ángulo θ formado por la parte positiva del eje x y la recta que une los centros de las circunferencias. En particular, si $b = a/4$, como se observa en la figura, demuestre que la hipocicloide es la astroide

$$x = a \cos^3 \theta, \quad y = a \operatorname{sen}^3 \theta.$$



37. A medida que el punto N se mueve a lo largo de la recta $y = a$ en la siguiente figura, P se mueve de tal manera que $OP = MN$. Obtenga las ecuaciones paramétricas para las coordenadas de P como funciones del ángulo t que forma la recta ON con la parte positiva del eje y.



38. Trocoides Una rueda de radio a gira sin patinarse a lo largo de una recta horizontal. Determine ecuaciones paramétricas para la curva que describe el punto P ubicado sobre un rayo de la rueda a b unidades del centro. Como parámetro, utilice el ángulo θ que gira la rueda. La curva se denomina *trocoide* y es una cicloide cuando $b = a$.

Cálculo de distancia mediante ecuaciones paramétricas

39. Determine el punto en la parábola $x = t$, $y = t^2$, $-\infty < t < \infty$, más cercano al punto (2, 1/2). (*Sugerencia:* Minimice el cuadrado de la distancia como una función de t).

40. Encuentre el punto sobre la elipse $x = 2 \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $0 \le t \le 2\pi$ más cercano al punto (3/4, 0). (*Sugerencia:* Minimice el cuadrado de la distancia como una función de t).

T EXPLORACIONES GRÁFICAS

Si tiene un graficador de ecuaciones paramétricas, en los ejercicios 41 a 48, grafique las siguientes ecuaciones en los intervalos indicados.

41. Elipse $x = 4 \cos t, \quad y = 2 \operatorname{sen} t,$ en

a) $0 \le t \le 2\pi$

b) $0 \le t \le \pi$

c) $-\pi/2 \le t \le \pi/2$.

42. Rama de una hipérbola $x = \sec t$ [introdúzcala como $1/\cos(t)$], $y = \tan t$ [introdúzcala como $\operatorname{sen}(t)/\cos(t)$], en

a) $-1.5 \le t \le 1.5$

b) $-0.5 \le t \le 0.5$

c) $-0.1 \le t \le 0.1$.

43. Parábola $x = 2t + 3, \quad y = t^2 - 1, \quad -2 \le t \le 2$

44. Cicloide $x = t - \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t,$ en

a) $0 \le t \le 2\pi$

b) $0 \le t \le 4\pi$

c) $\pi \le t \le 3\pi$.

45. Deltoide

$$x = 2 \cos t + \cos 2t, \quad y = 2 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

¿Qué ocurre si sustituye 2 por −2 en las ecuaciones de x y y? Grafique las nuevas ecuaciones y averígüelo.

46. Una curva bonita

$$x = 3 \cos t + \cos 3t, \quad y = 3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t; \quad 0 \le t \le 2\pi$$

¿Qué pasa si sustituye 3 por −3 en las ecuaciones de x y y? Grafique las nuevas ecuaciones y averígüelo.

47. ***a*) Epicicloide**

$x = 9\cos t - \cos 9t, \quad y = 9\,\text{sen}\, t - \text{sen}\, 9t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

***b*) Hipocicloide**

$x = 8\cos t + 2\cos 4t, \quad y = 8\,\text{sen}\, t - 2\,\text{sen}\, 4t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

***c*) Hipotrocoide**

$x = \cos t + 5\cos 3t, \quad y = 6\cos t - 5\,\text{sen}\, 3t; \quad 0 \le t \le 2\pi$

48. ***a*)** $x = 6\cos t + 5\cos 3t,\ y = 6\,\text{sen}\, t - 5\,\text{sen}\, 3t;\ 0 \le t \le 2\pi$

***b*)** $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t,\ y = 6\,\text{sen}\, 2t - 5\,\text{sen}\, 6t;\ 0 \le t \le \pi$

***c*)** $x = 6\cos t + 5\cos 3t,\ y = 6\,\text{sen}\, 2t - 5\,\text{sen}\, 3t;\ 0 \le t \le 2\pi$

***d*)** $x = 6\cos 2t + 5\cos 6t,\ y = 6\,\text{sen}\, 4t - 5\,\text{sen}\, 6t;\ 0 \le t \le \pi$

11.2 Cálculo con curvas paramétricas

En esta sección aplicaremos el cálculo a curvas paramétricas. Específicamente, obtendremos pendientes, longitudes y áreas asociadas con curvas parametrizadas.

Tangentes y áreas

La curva parametrizada $x = f(t)$ y $y = g(t)$ es **derivable** en t si f y g son derivables en t. En un punto de una curva parametrizada derivable donde y también es una función derivable de x, las derivadas dy/dt, dx/dt y dy/dx están relacionadas por la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}.$$

Si $dx/dt \neq 0$, podemos dividir ambos lados de esta ecuación entre dx/dt y despejar dy/dx.

Fórmula paramétrica de dy/dx

Si existen las tres derivadas y $dx/dt \neq 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}. \qquad (1)$$

Si las ecuaciones paramétricas definen a y como una función dos veces derivable de x, podemos aplicar la ecuación (1) de la función $dy/dx = y'$ para calcular d^2y/dx^2 como una función de t:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dy'/dt}{dx/dt}. \qquad \text{Ecuación (1) con } y' \text{ en vez de } y$$

Fórmula paramétrica de d^2y/dx^2

Si las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$ definen y como una función dos veces diferenciable de x, entonces, en cualquier punto donde $dx/dt \neq 0$ y $y' = dy/dx$,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}. \qquad (2)$$

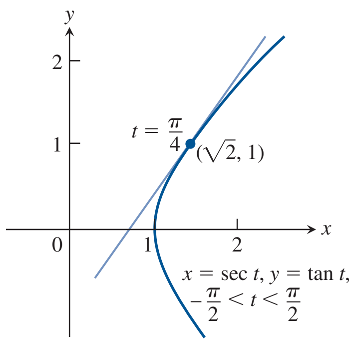


FIGURA 11.13 La curva del ejemplo 1 es la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$.

EJEMPLO 1 Obtenga la tangente a la curva

$$x = \sec t, \qquad y = \tan t, \qquad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2},$$

en el punto $(\sqrt{2}, 1)$, donde $t = \pi/4$ (figura 11.13).

Solución La pendiente de la curva en t es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sec^2 t}{\sec t \tan t} = \frac{\sec t}{\tan t}. \qquad \text{Ecuación (1)}$$

Al igualar t a $\pi/4$, obtenemos

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi/4} = \frac{\sec(\pi/4)}{\tan(\pi/4)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}.$$

La recta tangente es

$$\begin{aligned} y - 1 &= \sqrt{2}\left(x - \sqrt{2}\right) \\ y &= \sqrt{2}\,x - 2 + 1 \\ y &= \sqrt{2}\,x - 1. \end{aligned}$$

Obtención de d^2y/dx^2 en términos de t

1. Exprese $y' = dy/dx$ en términos de t.
2. Obtenga dy'/dt.
3. Divida dy'/dt entre dx/dt.

EJEMPLO 2 Obtenga d^2y/dx^2 como una función de t si $x = t - t^2$ y $y = t - t^3$.

Solución

1. Exprese $y' = dy/dx$ en términos de t.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}$$

2. Derive y' con respecto a t.

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1 - 3t^2}{1 - 2t}\right) = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^2} \qquad \text{Regla de la derivada del cociente}$$

3. Divida dy'/dt entre dx/dt.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{(2 - 6t + 6t^2)/(1 - 2t)^2}{1 - 2t} = \frac{2 - 6t + 6t^2}{(1 - 2t)^3} \qquad \text{Ecuación (2)}$$

EJEMPLO 3 Obtenga el área encerrada por la astroide (figura 11.14)

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \operatorname{sen}^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

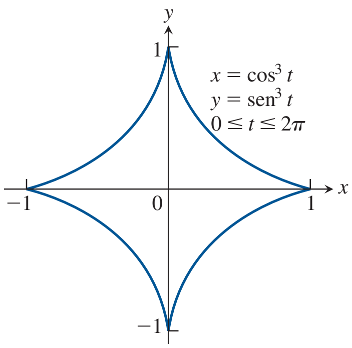


FIGURA 11.14 La astroide del ejemplo 3.

Solución Por simetría, el área interior es 4 veces el área bajo la curva en el primer cuadrante, donde $0 \le t \le \pi/2$. Podemos aplicar la fórmula de la integral definida para área del capítulo 5, usando sustitución para expresar la curva y la diferencial dx en términos del parámetro t. Así,

$$
\begin{aligned}
A &= 4\int_0^1 y\,dx \\
&= 4\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \cdot 3\cos^2 t \operatorname{sen} t\,dt && \text{Sustituya } y \text{ y } dx \\
&= 12\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 \left(\frac{1+\cos 2t}{2}\right) dt && \operatorname{sen}^4 t = \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - 2\cos 2t + \cos^2 2t)(1+\cos 2t)\,dt && \text{Desarrolle el término al cuadrado.} \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} (1 - \cos 2t - \cos^2 2t + \cos^3 2t)\,dt && \text{Multiplique los términos.} \\
&= \frac{3}{2}\left[\int_0^{\pi/2} (1-\cos 2t)\,dt - \int_0^{\pi/2} \cos^2 2t\,dt + \int_0^{\pi/2} \cos^3 2t\,dt\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[\left(t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t\right) - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2t\right) + \frac{1}{2}\left(\operatorname{sen} 2t - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 2t\right)\right]_0^{\pi/2} && \text{Ejemplo 3, sección 8.3} \\
&= \frac{3}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 - 0 - 0\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0 - 0 - 0\right) + \frac{1}{2}(0 - 0 - 0 + 0)\right] && \text{Evalúe.} \\
&= \frac{3\pi}{8}.
\end{aligned}
$$

■

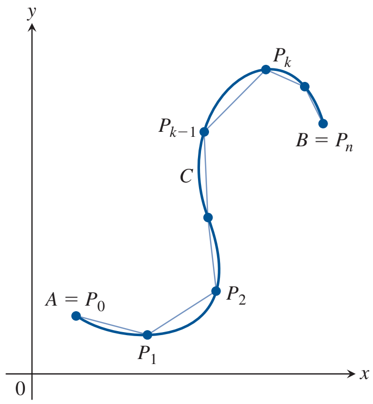


FIGURA 11.15 La longitud de la curva suave C, que va de A a B, es aproximada por la suma de las longitudes de la trayectoria poligonal (segmentos de línea recta) que inicia en $A = P_0$, sigue a P_1 y así sucesivamente, hasta finalizar en $B = P_n$.

Longitud de una curva definida en forma paramétrica

Sea C una curva definida en forma paramétrica por medio de las ecuaciones

$$x = f(t) \qquad \text{y} \qquad y = g(t), \qquad a \le t \le b.$$

Suponemos que las funciones f y g son **continuamente derivables** (es decir, que tienen primeras derivadas continuas) en el intervalo $[a, b]$. También suponemos que las derivadas $f'(t)$ y $g'(t)$ no son simultáneamente iguales a cero, lo cual evita que la curva C tenga esquinas o picos. Una curva como ésta se denomina **curva suave**. Subdividimos la trayectoria (o arco) AB en n partes en los puntos $A = P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$ (figura 11.15). Estos puntos corresponden a una partición del intervalo $[a, b]$ en $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$, donde $P_k = (f(t_k), g(t_k))$. Se unen los puntos sucesivos de esta subdivisión mediante segmentos de recta (figura 11.15). Un segmento representativo tiene longitud

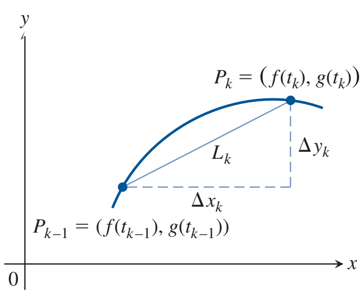


FIGURA 11.16 El arco $P_{k-1}P_k$ se aproxima por el segmento de recta que se muestra aquí, con una longitud de $L_k = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2}$.

$$
\begin{aligned}
L_k &= \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\
&= \sqrt{[f(t_k) - f(t_{k-1})]^2 + [g(t_k) - g(t_{k-1})]^2}
\end{aligned}
$$

(vea la figura 11.16). Si Δt_k es pequeña, la longitud L_k es aproximadamente igual a la longitud del arco $P_{k-1}P_k$. De acuerdo con el teorema del valor medio, sabemos que existen números t_k^* y t_k^{**} en $[t_{k-1}, t_k]$ tales que

$$
\begin{aligned}
\Delta x_k &= f(t_k) - f(t_{k-1}) = f'(t_k^*)\,\Delta t_k, \\
\Delta y_k &= g(t_k) - g(t_{k-1}) = g'(t_k^{**})\,\Delta t_k.
\end{aligned}
$$

Suponiendo que la trayectoria de A a B se recorre exactamente una vez cuando t aumenta de $t = a$ a $t = b$, sin invertir el sentido del movimiento ni pasar dos veces por el mismo punto, una aproximación a la "longitud" (aún por definir) de la curva AB es igual a la suma de todas las longitudes L_k:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} L_k &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[\, f'(t_k^{\,*})\,]^2 + [\, g'(t_k^{\,**})\,]^2}\; \Delta t_k .\end{aligned}$$

Aunque la última suma de la derecha no es exactamente una suma de Riemann (ya que f' y g' se evalúan en diferentes puntos), es posible demostrar que su límite, conforme la norma de la partición tiende a cero y el número de segmentos $n \to \infty$, es la integral definida

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{[\, f'(t_k^{\,*})\,]^2 + [\, g'(t_k^{\,**})\,]^2}\; \Delta t_k = \int_a^b \sqrt{[\, f'(t)\,]^2 + [\, g'(t)\,]^2}\; dt.$$

Por lo tanto, es razonable definir la longitud de la curva de A a B como esta integral.

> **DEFINICIÓN** Si una curva C está definida en forma paramétrica por $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \le t \le b$, donde f' y g' son continuas y no simultáneamente iguales a cero en $[a, b]$, y C se recorre sólo una vez conforme t aumenta de $t = a$ a $t = b$, entonces, la **longitud de C** es la integral definida
>
> $$L = \int_a^b \sqrt{[\, f'(t)\,]^2 + [\, g'(t)\,]^2}\; dt.$$

Una curva suave C no pasa dos veces por el mismo lugar ni invierte el sentido del movimiento durante el intervalo de tiempo $[a, b]$, puesto que $(f')^2 + (g')^2 > 0$ en todo el intervalo. En un punto donde una curva regresa sobre sí misma, la curva no es derivable, o ambas derivadas deben ser simultáneamente iguales a cero. Examinaremos este fenómeno en el capítulo 13, donde estudiaremos vectores tangentes a las curvas.

Si $x = f(t)$ y $y = g(t)$, y utilizamos la notación de Leibnitz, obtenemos el siguiente resultado para la longitud del arco:

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\; dt. \tag{3}$$

Si existen dos parametrizaciones diferentes para una curva C cuya longitud queremos determinar, no tiene importancia cuál utilicemos. Sin embargo, la parametrización que seleccionemos deberá cumplir con las condiciones establecidas en la definición de la longitud de C (vea el ejercicio 41 como ejemplo).

EJEMPLO 4 Con base en la definición, determine la longitud de la circunferencia de radio r definida en forma paramétrica por

$$x = r\cos t \qquad \text{y} \qquad y = r \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Solución A medida que t varía de 0 a 2π, la circunferencia se recorre exactamente una vez; así, el perímetro es

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\; dt.$$

Encontramos que

$$\frac{dx}{dt} = -r \operatorname{sen} t, \qquad \frac{dy}{dt} = r \cos t$$

y

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = r^2(\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t) = r^2.$$

Entonces,

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2}\, dt = r\Big[\, t\,\Big]_0^{2\pi} = 2\pi r. \qquad \blacksquare$$

EJEMPLO 5 Obtenga la longitud de la astroide (figura 11.14)

$$x = \cos^3 t, \qquad y = \operatorname{sen}^3 t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Solución En virtud de la simetría de la curva en relación con los ejes de coordenadas, su longitud es cuatro veces la longitud de la parte en el primer cuadrante. Tenemos

$$x = \cos^3 t, \qquad\qquad y = \operatorname{sen}^3 t$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = [3\cos^2 t(-\operatorname{sen} t)]^2 = 9\cos^4 t \operatorname{sen}^2 t$$

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = [3\operatorname{sen}^2 t(\cos t)]^2 = 9\operatorname{sen}^4 t \cos^2 t$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} &= \sqrt{9\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t\underbrace{(\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}_{1}} \\
&= \sqrt{9\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t} \\
&= 3|\cos t \operatorname{sen} t| \qquad \begin{array}{l}\cos t \operatorname{sen} t \ge 0 \text{ para} \\ 0 \le t \le \pi/2\end{array} \\
&= 3\cos t \operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\text{Longitud de la parte en el primer cuadrante} &= \int_0^{\pi/2} 3\cos t \operatorname{sen} t\, dt \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t\, dt \qquad \begin{array}{l}\cos t \operatorname{sen} t = \\ (1/2) \operatorname{sen} 2t\end{array} \\
&= -\frac{3}{4}\cos 2t\Big]_0^{\pi/2} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

La longitud de la astroide es cuatro veces esto: $4(3/2) = 6$. $\blacksquare$

EJEMPLO 6 Determine el perímetro de la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Solución En forma paramétrica, representamos a la elipse con las ecuaciones $x = a \operatorname{sen} t$ y $y = b\cos t$, $a > b$ y $0 \le t \le 2\pi$. Entonces,

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= a^2\cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t \\ &= a^2 - (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^2 t \\ &= a^2[1 - e^2 \operatorname{sen}^2 t] \qquad e = 1 - \frac{b^2}{a^2}, \text{ no el número } 2.71828\ldots\end{aligned}$$

A partir de la ecuación (3), el perímetro se obtiene mediante

$$P = 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2 t}\, dt.$$

(Investigaremos el significado de e en la sección 11.7). La integral de P es no elemental y se conoce como la *integral elíptica completa de segunda clase*. Podemos calcular su valor con cualquier grado de precisión usando series infinitas de la siguiente manera. A partir del desarrollo binomial para $\sqrt{1-x}$ en la sección 10.10, tenemos

$$\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2 t} = 1 - \frac{1}{2}e^2\operatorname{sen}^2 t - \frac{1}{2\cdot 4}e^4\operatorname{sen}^4 t - \cdots, \qquad |e\operatorname{sen} t| \le e < 1$$

Luego, en cada término de esta última expresión, aplicamos la fórmula integral 157 (que se incluye al final del libro) para $\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^n t\, dt$, con lo que se obtiene el perímetro

$$\begin{aligned}P &= 4a\int_0^{\pi/2}\sqrt{1 - e^2\operatorname{sen}^2 t}\, dt \\ &= 4a\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2}e^2\right)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1}{2\cdot 4}e^4\right)\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}e^6\right)\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\pi}{2}\right) - \cdots\right] \\ &= 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\frac{e^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\frac{e^6}{5} - \cdots\right].\end{aligned}$$

Como $e < 1$, la serie del lado derecho converge por comparación con la serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty}(e^2)^n$. ■

Longitud de una curva $y = f(x)$

La fórmula de la longitud en la sección 6.3 es un caso especial de la ecuación 3. Dada una función continuamente derivable $y = f(x)$, $a \le x \le b$, podemos asignar $x = t$ como un parámetro. Entonces, la gráfica de la función f es la curva C definida paramétricamente por

$$x = t \qquad \text{y} \qquad f(t), \qquad a \le t \le b,$$

un caso especial de lo que consideramos antes. Así,

$$\frac{dx}{dt} = 1 \qquad \text{y} \qquad \frac{dy}{dt} = f'(t).$$

De la ecuación (1), tenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = f'(t),$$

de lo cual obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 1 + [f'(t)]^2 \\ &= 1 + [f'(x)]^2. \qquad t = x\end{aligned}$$

Al sustituir en la ecuación (3), obtenemos la fórmula de la longitud de arco para la gráfica de $y = f(x)$, lo cual es congruente con la ecuación (3) de la sección 6.3.

Diferencial de longitud de arco

De acuerdo con la sección 6.3, podemos definir la función de la longitud del arco de una curva definida paramétricamente $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, como

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[f'(z)]^2 + [g'(z)]^2}\, dz.$$

Así, por el teorema fundamental del cálculo,

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

La diferencial de la longitud del arco es

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt. \tag{4}$$

La ecuación (4) a menudo se abrevia como

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Al igual que en la sección 6.3, podemos integrar la diferencial ds entre los límites adecuados para obtener la longitud total de una curva.

He aquí un ejemplo donde usamos la fórmula de la longitud del arco para obtener el centroide de un arco.

EJEMPLO 7 Obtenga el centroide del arco en el primer cuadrante de la astroide del ejemplo 5.

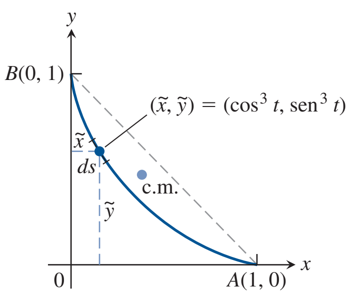


FIGURA 11.17 El centroide (centro de masa, c.m.) del arco de astroide del ejemplo 7.

Solución Suponemos que la densidad de la curva es $\delta = 1$, y calculamos la masa y los momentos de la curva alrededor de los ejes de coordenadas como lo hicimos en la sección 6.6.

La distribución de masa es simétrica con respecto a la recta $y = x$, de manera que $\bar{x} = \bar{y}$. Un segmento típico de la curva (figura 11.17) tiene masa

$$dm = 1 \cdot ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = 3 \cos t \operatorname{sen} t\, dt. \qquad \text{Del ejemplo 5}$$

La masa de la curva es

$$M = \int_0^{\pi/2} dm = \int_0^{\pi/2} 3 \cos t \operatorname{sen} t\, dt = \frac{3}{2}. \qquad \text{Otra vez del ejemplo 5}$$

El momento de la curva alrededor del eje x es

$$M_x = \int \tilde{y}\, dm = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3 t \cdot 3 \cos t \operatorname{sen} t\, dt$$

$$= 3 \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 t \cos t\, dt = 3 \cdot \frac{\operatorname{sen}^5 t}{5}\bigg]_0^{\pi/2} = \frac{3}{5}.$$

Así, concluimos que

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{3/5}{3/2} = \frac{2}{5}.$$

El centroide es el punto $(2/5, 2/5)$. ■

EJEMPLO 8 Encuentre el tiempo T_c que le toma a una cuenta sin fricción deslizarse a lo largo de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$ de $t = 0$ a $t = \pi$ (vea la figura 11.12).

Solución Con la ecuación (3) en la sección 11.1, obtenemos el tiempo

$$T_c = \int_{t=0}^{t=\pi} \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

para ds y y, expresadas en forma paramétrica en términos del parámetro t. Para la cicloide, $dx/dt = a(1 - \cos t)$ y $dy/dt = a \operatorname{sen} t$, de manera que

$$\begin{aligned} ds &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \sqrt{a^2\,(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t)}\, dt \\ &= \sqrt{a^2\,(2 - 2\cos t)}\, dt. \end{aligned}$$

Al sustituir ds y y en el integrando, se tiene que

$$\begin{aligned} T_c &= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a^2(2 - 2\cos t)}{2ga\,(1 - \cos t)}}\, dt && y = a(1 - \cos t) \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{a}{g}}\, dt = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}, \end{aligned}$$

que es el tiempo que tarda la cuenta sin fricción en deslizarse por la cicloide a B, después de que ha partido del reposo en O (vea la figura 11.12). ■

Áreas de superficies de rotación

En la sección 6.4 obtuvimos fórmulas de integrales para el área de una superficie cuando una curva gira alrededor de un eje de coordenadas. Específicamente, encontramos que el área de la superficie es $S = \int 2\pi y\, ds$ cuando la rotación es en torno al eje x, y $S = \int 2\pi x\, ds$ cuando la rotación se efectúa alrededor del eje y. Si la curva está parametrizada por las ecuaciones $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \le t \le b$, donde f y g son derivables continuamente y $(f')^2 + (g')^2 > 0$ para $[a, b]$, entonces, la diferencial de longitud de arco ds está dada por la ecuación (4). Esta observación conduce a las siguientes fórmulas para el área de superficies de rotación de curvas parametrizadas suaves.

Áreas de superficies de rotación de curvas parametrizadas

Si una curva suave $x = f(t)$ y $y = g(t)$, $a \le t \le b$, se recorre una sola vez a medida que t aumenta de a a b, entonces, las áreas de las superficies generadas al hacer girar la curva alrededor de los ejes de coordenadas son las siguientes.

1. Rotación alrededor del eje x ($y \ge 0$):

$$S = \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{5}$$

2. Rotación alrededor del eje y ($x \ge 0$):

$$S = \int_a^b 2\pi x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \tag{6}$$

Al igual que con la longitud, podemos calcular el área de la superficie a partir de cualquier parametrización que cumpla con los criterios establecidos.

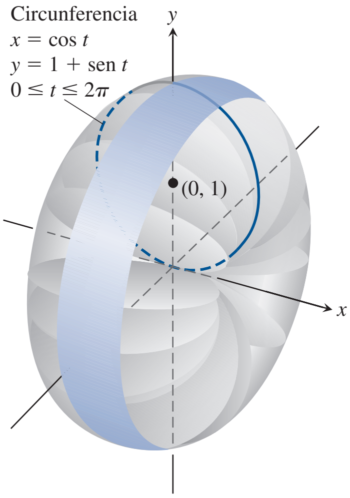


FIGURA 11.18 En el ejemplo 9 se calcula el área de la superficie de revolución barrida por esta curva parametrizada.

EJEMPLO 9 La parametrización estándar de la circunferencia de radio 1, con centro en el punto (0, 1) en el plano xy, es

$$x = \cos t, \qquad y = 1 + \operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Utilice esta parametrización para obtener el área de la superficie barrida al hacer girar la circunferencia alrededor del eje x (figura 11.18).

Solución Evaluamos la fórmula

$$\begin{aligned} S &= \int_a^b 2\pi y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2\pi(1 + \operatorname{sen} t)\, \underbrace{\sqrt{(-\operatorname{sen} t)^2 + (\cos t)^2}}_{1}\, dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} (1 + \operatorname{sen} t)\, dt \\ &= 2\pi \Big[t - \cos t \Big]_0^{2\pi} = 4\pi^2. \end{aligned}$$

La ecuación (5) para rotación alrededor del eje x; $y = 1 + \operatorname{sen} t \ge 0$

■

Ejercicios 11.2

Tangentes a curvas parametrizadas

En los ejercicios 1 a 14, determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto definido por el valor dado de t. Además, determine el valor de d^2y/dx^2 en este punto.

1. $x = 2\cos t, \quad y = 2\operatorname{sen} t, \quad t = \pi/4$
2. $x = \operatorname{sen} 2\pi t, \quad y = \cos 2\pi t, \quad t = -1/6$
3. $x = 4\operatorname{sen} t, \quad y = 2\cos t, \quad t = \pi/4$
4. $x = \cos t, \quad y = \sqrt{3}\cos t, \quad t = 2\pi/3$
5. $x = t, \quad y = \sqrt{t}, \quad t = 1/4$
6. $x = \sec^2 t - 1, \quad y = \tan t, \quad t = -\pi/4$
7. $x = \sec t, \quad y = \tan t, \quad t = \pi/6$
8. $x = -\sqrt{t+1}, \quad y = \sqrt{3t}, \quad t = 3$
9. $x = 2t^2 + 3, \quad y = t^4, \quad t = -1$
10. $x = 1/t, \quad y = -2 + \ln t, \quad t = 1$
11. $x = t - \operatorname{sen} t, \quad y = 1 - \cos t, \quad t = \pi/3$
12. $x = \cos t, \quad y = 1 + \operatorname{sen} t, \quad t = \pi/2$
13. $x = \dfrac{1}{t+1}, \quad y = \dfrac{t}{t-1}, \quad t = 2$
14. $x = t + e^t, \quad y = 1 - e^t, \quad t = 0$

Parametrizaciones definidas implícitamente

Suponiendo que las ecuaciones de los ejercicios 15 a 20 definen a x y y implícitamente como funciones derivables $x = f(t)$ y $y = g(t)$, determine la pendiente de la curva $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para el valor dado de t.

15. $x^3 + 2t^2 = 9, \quad 2y^3 - 3t^2 = 4, \quad t = 2$
16. $x = \sqrt{5 - \sqrt{t}}, \quad y(t-1) = \sqrt{t}, \quad t = 4$
17. $x + 2x^{3/2} = t^2 + t, \quad y\sqrt{t+1} + 2t\sqrt{y} = 4, \quad t = 0$
18. $x\operatorname{sen} t + 2x = t, \quad t\operatorname{sen} t - 2t = y, \quad t = \pi$
19. $x = t^3 + t, \quad y + 2t^3 = 2x + t^2, \quad t = 1$
20. $t = \ln(x - t), \quad y = te^t, \quad t = 0$

Área

21. Obtenga el área bajo un arco de la cicloide
$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$
22. Obtenga el área acotada por el eje y y la curva
$$x = t - t^2, \qquad y = 1 - e^{-t}.$$
23. Obtenga el área encerrada por la elipse
$$x = a\cos t, \qquad y = b\operatorname{sen} t, \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$
24. Obtenga el área debajo de $y = x^3$ sobre [0, 1], usando las siguientes parametrizaciones.

 a) $x = t^2, \quad y = t^6$ **b)** $x = t^3, \quad y = t^9$

Longitudes de curvas

Obtenga las longitudes de las curvas de los ejercicios 25 a 30.

25. $x = \cos t, \quad y = t + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi$
26. $x = t^3, \quad y = 3t^2/2, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}$
27. $x = t^2/2, \quad y = (2t+1)^{3/2}/3, \quad 0 \le t \le 4$
28. $x = (2t+3)^{3/2}/3, \quad y = t + t^2/2, \quad 0 \le t \le 3$
29. $x = 8\cos t + 8t\operatorname{sen} t$
 $y = 8\operatorname{sen} t - 8t\cos t,$
 $0 \le t \le \pi/2$
30. $x = \ln(\sec t + \tan t) - \operatorname{sen} t$
 $y = \cos t, \quad 0 \le t \le \pi/3$

Área de superficies

En los ejercicios 31 a 34, encuentre las áreas de las superficies generadas por la rotación de las curvas alrededor de los ejes indicados.

31. $x = \cos t, \quad y = 2 + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le 2p$; eje x

32. $x = (2/3)t^{3/2}, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad 0 \le t \le \sqrt{3};$ eje y

33. $x = t + \sqrt{2}, \quad y = (t^2/2) + \sqrt{2}t, \quad -\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2};$ eje y

34. $x = \ln(\sec t + \tan t) - \operatorname{sen} t,\ y = \cos t,\ 0 \le t \le \pi/3;$ eje x

35. Cono truncado El segmento de recta que une los puntos (0, 1) y (2, 2) se hace girar alrededor del eje x para generar un cono truncado. Determine el área de la superficie del cono truncado por medio de la parametrización $x = 2t,\ y = t + 1,\ 0 \le t \le 1$. Verifique su resultado con la fórmula geométrica: Área $= \pi(r_1 + r_2)$ (longitud de la generatriz).

36. Un cono El segmento de recta que une el origen con el punto (h, r) se hace girar alrededor del eje x para generar un cono de altura h y y radio de la base r. Encuentre el área de la superficie del cono con las ecuaciones paramétricas $x = ht,\ y = rt,\ 0 \le t \le 1$. Compruebe su respuesta con la fórmula geométrica: Área $= \pi r$ (longitud de la generatriz).

Centroides

37. Obtenga las coordenadas del centroide de la curva

$$x = \cos t + t \operatorname{sen} t, \quad y = \operatorname{sen} t - t\cos t, \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

38. Obtenga las coordenadas del centroide de la curva

$$x = e^t \cos t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

39. Obtenga las coordenadas del centroide de la curva

$$x = \cos t, \quad y = t + \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi.$$

T **40.** La mayoría de los cálculos de centroides para curvas se efectúan con la ayuda de una calculadora o computadora que permitan calcular integrales. Como ejemplo, determine, con precisión de centésimas, las coordenadas del centroide de la curva

$$x = t^3, \quad y = 3t^2/2, \quad 0 \le t \le \sqrt{3}.$$

Teoría y ejemplos

41. La longitud es independiente de la parametrización Para ilustrar el hecho de que los números que obtenemos para la longitud son independientes de la manera en que parametrizamos las curvas (excepto por restricciones menores que evitan el regreso mencionado anteriormente), calcule la longitud del semicírculo $y = \sqrt{1 - x^2}$ con estas dos parametrizaciones diferentes:

a) $x = \cos 2t, \quad y = \operatorname{sen} 2t,\ 0 \le t \le \pi/2.$

b) $x = \operatorname{sen} \pi t, \quad y = \cos \pi t,\ -1/2 \le t \le 1/2.$

42. ***a***) Demuestre que la fórmula cartesiana

$$L = \int_c^d \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$$

para la longitud de la curva $x = g(y),\ c \le y \le d$ (sección 6.3, ecuación 4), es un caso especial de la fórmula paramétrica de longitud

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

Emplee este resultado para obtener la longitud de cada curva.

b) $x = y^{3/2},\ 0 \le y \le 4/3$

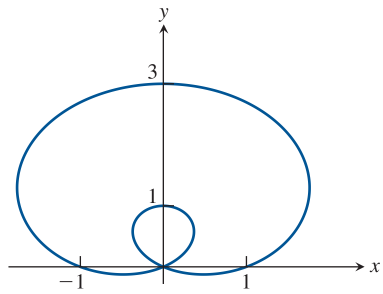
c) $x = \frac{3}{2}y^{2/3},\ 0 \le y \le 1$

43. La curva con ecuaciones paramétricas

$$x = (1 + 2 \operatorname{sen} \theta)\cos\theta, \quad y = (1 + 2\operatorname{sen}\theta)\operatorname{sen}\theta$$

se llama *limaçon* (del francés, caracol) y se muestra en la siguiente figura. Determine los puntos (x, y) y las pendientes de las rectas tangentes a estos puntos para

a) $\theta = 0$. ***b***) $\theta = \pi/2$. ***c***) $\theta = 4\pi/3$.

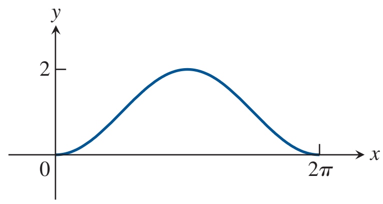


44. La curva con ecuaciones paramétricas

$$x = t, \quad y = 1 - \cos t, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

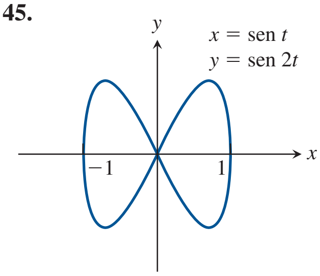
se llama *sinusoide* y se muestra en la siguiente figura. Obtenga el punto (x, y), donde la pendiente de la recta tangente es

a) la más grande. ***b***) la más pequeña.

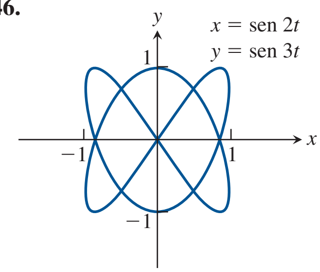


T Las curvas de los ejercicios 45 y 46 se llaman *curvas de Bowditch* o *figuras de Lissajous*. En cada caso, determine el punto en el interior del primer cuadrante donde la tangente a la curva es horizontal, así como la ecuación para las dos tangentes en el origen.

45.



46.



47. Cicloide

a) Obtenga la longitud de un arco de la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

b) Obtenga el área de la superficie generada al hacer girar un arco de la cicloide del inciso *a*) alrededor del eje x para $a = 1$.

48. Volumen Obtenga el volumen generado al hacer girar la región acotada por el eje x y un arco de la cicloide

$$x = t - \operatorname{sen} t, \qquad y = 1 - \cos t$$

alrededor del eje x.

EXPLORACIONES CON COMPUTADORA

En los ejercicios 49 a 52, utilice un software matemático y realice los siguientes pasos para la curva y el intervalo cerrado dados.

a) Grafique la curva junto con las poligonales que la aproximan cuando se consideran puntos de partición $n = 2, 4, 8$ en el intervalo. (Vea la figura 11.15).

***b*)** Obtenga la aproximación correspondiente a la longitud de la curva sumando las longitudes de los segmentos de recta.

***c*)** Calcule la longitud de la curva usando una integral. Compare sus aproximaciones para $n = 2, 4, 8$ con el valor real de la longitud dado por la integral. ¿Cómo se compara la longitud real con las aproximaciones cuando n aumenta? Explique su respuesta.

49. $x = \frac{1}{3}t^3, \quad y = \frac{1}{2}t^2, \quad 0 \le t \le 1$

50. $x = 2t^3 - 16t^2 + 25t + 5, \quad y = t^2 + t - 3, \quad 0 \le t \le 6$

51. $x = t - \cos t, \quad y = 1 + \operatorname{sen} t, \quad -\pi \le t \le \pi$

52. $x = e^t \cos t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad 0 \le t \le \pi$

11.3 Coordenadas polares

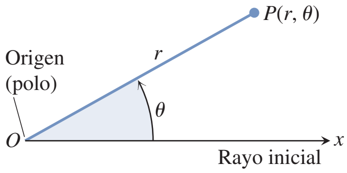


FIGURA 11.19 Para definir las coordenadas polares en el plano, iniciamos con un origen, llamado polo, y un rayo inicial.

En esta sección estudiaremos las coordenadas polares y su relación con las coordenadas cartesianas. Verá que las coordenadas polares son muy útiles cuando se calculan muchas de las integrales múltiples que se estudiarán en el capítulo 15.

Definición de las coordenadas polares

Para definir las coordenadas polares, primero fijamos un **origen** O (llamado **polo**) y un **rayo inicial** desde O (figura 11.19). Por lo regular, se elige el eje positivo x como el rayo inicial. Luego, se puede localizar cada punto P asignándole un **par de coordenadas polares** (r, θ), donde r es la distancia dirigida de O a P, y θ es el ángulo dirigido del rayo inicial al rayo OP. Así, el punto P se representa como

$$P(r, \theta)$$

Distancia dirigida de O a P — Ángulo dirigido del rayo inicial a OP

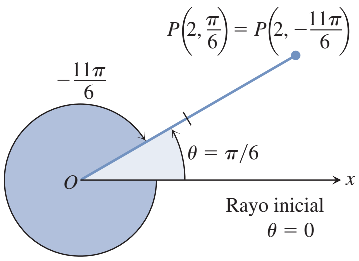


FIGURA 11.20 Las coordenadas polares no son únicas.

Al igual que en trigonometría, θ es positivo cuando se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj, y negativo cuando se mide en el sentido en que se mueven éstas. El ángulo asociado con un punto dado no es único. Mientras que un punto en el plano se identifica solamente con un par de coordenadas cartesianas, tiene un número infinito de pares de coordenadas polares. Por ejemplo, el punto a 2 unidades del origen a lo largo del rayo $\theta = \pi/6$ tiene coordenadas polares $r = 2, \theta = \pi/6$, pero también tiene coordenadas $r = 2$, $\theta = -11\pi/6$ (figura 11.20). En algunas situaciones permitimos que r sea negativa. Por esta razón, usamos la distancia dirigida en la definición de $P(r, \theta)$. El punto $P(2, 7\pi/6)$ puede obtenerse girando $7\pi/6$ radianes en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del rayo inicial y dos unidades hacia delante (figura 11.21). También puede alcanzarse girando $\pi/6$ radianes en sentido contrario al de las manecillas del reloj a partir del rayo inicial y *retrocediendo* dos unidades. Así, el punto también tiene coordenadas polares $r = -2, \theta = \pi/6$.

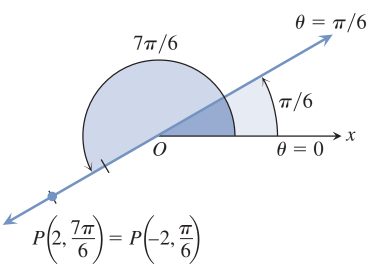


FIGURA 11.21 Las coordenadas polares pueden tener valores de r negativos.

EJEMPLO 1 Obtenga todas las coordenadas polares del punto $P(2, \pi/6)$.

Solución Trazamos el rayo inicial del sistema de coordenadas, dibujamos el rayo desde el origen que forma un ángulo de $\pi/6$ radianes con el rayo inicial, y marcamos el punto $(2, \pi/6)$ (figura 11.22). Después, encontramos los ángulos para los otros pares de coordenadas de P en los cuales $r = 2$ y $r = -2$.

Para $r = 2$, la lista completa de los ángulos es

$$\frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6} \pm 2\pi, \quad \frac{\pi}{6} \pm 4\pi, \quad \frac{\pi}{6} \pm 6\pi, \ldots$$

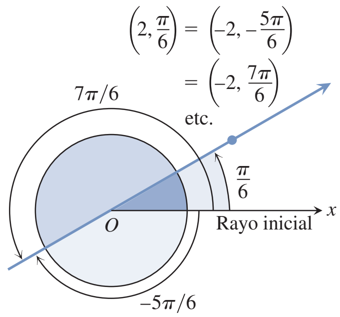


FIGURA 11.22 El punto $P(2, \pi/6)$ tiene un número infinito de pares de coordenadas polares (ejemplo 1).

Para $r = -2$, la lista de ángulos es

$$-\frac{5\pi}{6}, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 2\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 4\pi, \quad -\frac{5\pi}{6} \pm 6\pi, \ldots$$

Los correspondientes pares de coordenadas de P son

$$\left(2, \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

y

$$\left(-2, -\frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right), \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Cuando $n = 0$, las fórmulas dan $(2, \pi/6)$ y $(-2, -5\pi/6)$. Cuando $n = 1$, dan $(2, 13\pi/6)$ y $(-2, 7\pi/6)$, y así sucesivamente. ■

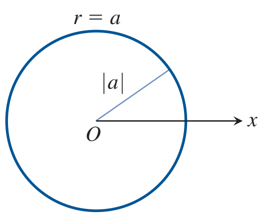


FIGURA 11.23 La ecuación polar de una circunferencia es $r = a$.

Ecuaciones polares y gráficas

Si se mantiene r fija en un valor constante $r = a \neq 0$, el punto $P(r, \theta)$ permanecerá a $|a|$ unidades del origen O. Como θ varía sobre cualquier intervalo de longitud 2π, P describe una circunferencia de radio $|a|$ con centro en O (figura 11.23).

Si mantenemos θ fijo en un valor constante $\theta = \theta_0$ y dejamos que r varíe entre $-\infty$ y ∞, el punto $P(r, \theta)$ describe una recta que pasa por O y que forma un ángulo de magnitud θ_0 con el rayo inicial. (Vea un ejemplo en la figura 11.21).

EJEMPLO 2 Una circunferencia o una recta pueden tener más de una ecuación polar.

a) $r = 1$ y $r = -1$ son las ecuaciones para la circunferencia de radio 1 centrada en O.

b) $\theta = \pi/6$, $\theta = 7\pi/6$ y $\theta = -5\pi/6$ son ecuaciones para la recta de la figura 11.22. ■

Las ecuaciones de la forma $r = a$ y $\theta = \theta_0$ pueden combinarse para definir regiones, segmentos y rayos.

EJEMPLO 3 Grafique los conjuntos de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las siguientes condiciones.

a) $1 \leq r \leq 2 \quad$ y $\quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

b) $-3 \leq r \leq 2 \quad$ y $\quad \theta = \frac{\pi}{4}$

c) $\frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6} \quad$ (no hay restricción sobre r)

Solución Las gráficas se presentan en la figura 11.24. ■

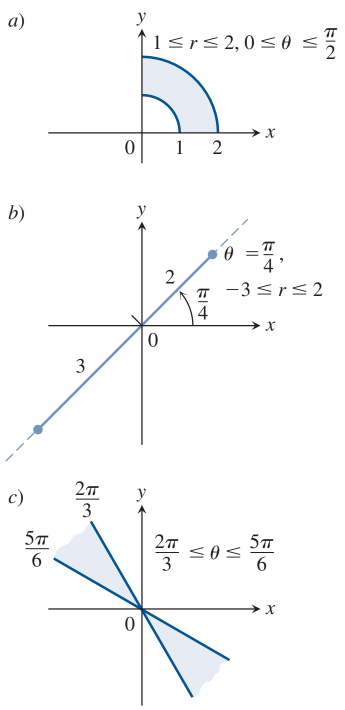


FIGURA 11.24 Las gráficas de desigualdades típicas en r y θ (ejemplo 3).

Relación entre coordenadas polares y cartesianas

Cuando usamos tanto el sistema de coordenadas polares como el de coordenadas cartesianas en un plano, colocamos los dos orígenes juntos y tomamos el rayo polar inicial como el eje x positivo. El rayo $\theta = \pi/2$, $r > 0$, se convierte en la parte positiva del eje y (figura

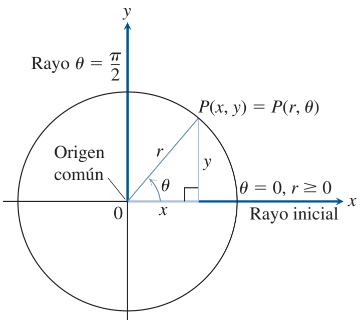


FIGURA 11.25 La manera usual de relacionar coordenadas polares y cartesianas.

11.25). Entonces, los dos sistemas de coordenadas están relacionados por las siguientes ecuaciones.

Ecuaciones que relacionan las coordenadas polares y cartesianas

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r \operatorname{sen}\theta, \qquad r^2 = x^2 + y^2, \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

Las primeras dos ecuaciones determinan unívocamente las coordenadas cartesianas x y y dadas las coordenadas polares r y θ. Por otro lado, si se conocen x y y, la tercera ecuación da dos posibles elecciones de r (un valor positivo y otro negativo). Para cada $(x, y) \neq (0, 0)$, existe un único $\theta \in [0, 2\pi)$ que satisface las dos primeras ecuaciones, cada una de las cuales da una representación en coordenadas polares del punto cartesiano (x, y). Las otras representaciones en coordenadas polares para el punto pueden determinarse a partir de estas dos, como en el ejemplo 1.

EJEMPLO 4 He aquí algunas curvas expresadas en términos tanto de coordenadas polares como cartesianas.

Ecuación polar	Equivalente cartesiano
$r\cos\theta = 2$	$x = 2$
$r^2\cos\theta\operatorname{sen}\theta = 4$	$xy = 4$
$r^2\cos^2\theta - r^2\operatorname{sen}^2\theta = 1$	$x^2 - y^2 = 1$
$r = 1 + 2r\cos\theta$	$y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$
$r = 1 - \cos\theta$	$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$

Algunas curvas se expresan mejor en coordenadas polares; otras no. ■

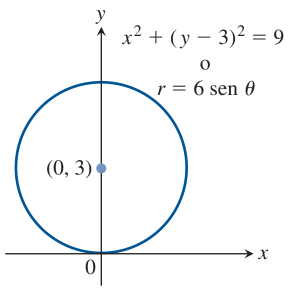


FIGURA 11.26 La circunferencia del ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Determine la ecuación polar para la circunferencia $x^2 + (y - 3)^2 = 9$ (figura 11.26).

Solución Aplicamos las ecuaciones que relacionan las coordenadas polares con las cartesianas:

$$\begin{aligned}
x^2 + (y-3)^2 &= 9 \\
x^2 + y^2 - 6y + 9 &= 9 && \text{Desarrolle } (y-3)^2. \\
x^2 + y^2 - 6y &= 0 && \text{Cancelación} \\
r^2 - 6r\operatorname{sen}\theta &= 0 && x^2 + y^2 = r^2,\ y = r\operatorname{sen}\theta \\
r = 0 \quad \text{o} \quad r - 6r\operatorname{sen}\theta &= 0 \\
r &= 6\operatorname{sen}\theta && \text{Incluye ambas posibilidades.}
\end{aligned}$$

■

EJEMPLO 6 Sustituya las siguientes ecuaciones polares por ecuaciones cartesianas equivalentes e identifique sus gráficas.

a) $r\cos\theta = -4$

b) $r^2 = 4r\cos\theta$

c) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

Solución Usamos las sustituciones $r\cos\theta = x$, $r\operatorname{sen}\theta = y$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

a) $r\cos\theta = -4$

La ecuación cartesiana es: $\quad r\cos\theta = -4$

$x = -4 \quad$ Sustitución

La gráfica es: Recta vertical que pasa por $x = -4$ en el eje x

b) $r^2 = 4r\cos\theta$

La ecuación cartesiana es:

$$\begin{aligned} r^2 &= 4r\cos\theta & & \\ x^2 + y^2 &= 4x & & \text{Sustitución} \\ x^2 - 4x + y^2 &= 0 & & \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 &= 4 & & \text{Complete el cuadrado} \\ (x-2)^2 + y^2 &= 4 & & \text{Factorice} \end{aligned}$$

La gráfica es: Circunferencia, radio 2, centro $(h, k) = (2, 0)$

c) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta}$

La ecuación cartesiana es:

$$\begin{aligned} r(2\cos\theta - \operatorname{sen}\theta) &= 4 & & \\ 2r\cos\theta - r\operatorname{sen}\theta &= 4 & & \text{Multiplique por } r \\ 2x - y &= 4 & & \text{Sustitución} \\ y &= 2x - 4 & & \text{Despeje } y. \end{aligned}$$

La gráfica es: Recta, pendiente $m = 2$, intersección en y, $b = -4$ ■

Ejercicios 11.3

Coordenadas polares

1. ¿Cuáles pares de coordenadas polares representan el mismo punto?

a) $(3, 0)$ ***b)*** $(-3, 0)$ ***c)*** $(2, 2\pi/3)$

d) $(2, 7\pi/3)$ ***e)*** $(-3, \pi)$ ***f)*** $(2, \pi/3)$

g) $(-3, 2\pi)$ ***h)*** $(-2, -\pi/3)$

2. ¿Cuáles pares de coordenadas polares representan el mismo punto?

a) $(-2, \pi/3)$ ***b)*** $(2, -\pi/3)$ ***c)*** (r, θ)

d) $(r, \theta + \pi)$ ***e)*** $(-r, \theta)$ ***f)*** $(2, -2\pi/3)$

g) $(-r, \theta + \pi)$ ***h)*** $(-2, 2\pi/3)$

3. Grafique los siguientes puntos (dados en coordenadas polares). Luego, determine todas las coordenadas polares de cada punto.

a) $(2, \pi/2)$ ***b)*** $(2, 0)$

c) $(-2, \pi\ \ 2)$ ***d)*** $(-2, 0)$

4. Grafique los siguientes puntos (dados en coordenadas polares). Luego, determine todas las coordenadas polares de cada punto.

a) $(3, \pi/4)$ ***b)*** $(-3, \pi/4)$

c) $(3, -\pi/4)$ ***d)*** $(-3, -\pi/4)$

Conversión de coordenadas polares a cartesianas

5. Encuentre las coordenadas cartesianas de los puntos del ejercicio 1.

6. Obtenga las coordenadas cartesianas de los siguientes puntos (identificados con coordenadas polares).

a) $\left(\sqrt{2}, \pi/4\right)$ ***b)*** $(1, 0)$

c) $(0, \pi/2)$ ***d)*** $\left(-\sqrt{2}, \pi/4\right)$

e) $(-3, 5\pi/6)$ ***f)*** $(5, \tan^{-1}(4/3))$

g) $(-1, 7\pi)$ ***h)*** $\left(2\sqrt{3}, 2\pi/3\right)$

Conversión de coordenadas cartesianas a polares

7. Obtenga las coordenadas polares, $0 \le \theta < 2\pi$ y $r \ge 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

a) $(1, 1)$ ***b)*** $(-3, 0)$

c) $\left(\sqrt{3}, -1\right)$ ***d)*** $(-3, 4)$

8. Obtenga las coordenadas polares, $-\pi \le \theta < \pi$ y $r \ge 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

a) $(-2, -2)$ ***b)*** $(0, 3)$

c) $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$ ***d)*** $(5, -12)$

9. Determine las coordenadas polares, $0 \le \theta < 2\pi$ y $r \le 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

a) $(3, 3)$ ***b)*** $(-1, 0)$

c) $\left(-1, \sqrt{3}\right)$ ***d)*** $(4, -3)$

10. Obtenga las coordenadas polares, $-\pi \le \theta < 2\pi$ y $r \le 0$, de los siguientes puntos dados en coordenadas cartesianas.

a) $(-2, 0)$ ***b)*** $(1, 0)$

c) $(0, -3)$ ***d)*** $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

Gráficas de puntos en coordenadas polares

Grafique los conjuntos de puntos cuyas coordenadas polares satisfacen las ecuaciones y desigualdades de los ejercicios 11 a 26.

11. $r = 2$ **12.** $0 \le r \le 2$

13. $r \ge 1$ **14.** $1 \le r \le 2$

15. $0 \le \theta \le \pi/6, \quad r \ge 0$

16. $\theta = 2\pi/3, \quad r \le -2$

17. $\theta = \pi/3, \quad -1 \le r \le 3$

18. $\theta = 11\pi/4, \quad r \ge -1$

19. $\theta = \pi/2, \quad r \ge 0$

20. $\theta = \pi/2, \quad r \le 0$

21. $0 \le \theta \le \pi, \quad r = 1$

22. $0 \le \theta \le \pi, \quad r = -1$

23. $\pi/4 \le \theta \le 3\pi/4, \quad 0 \le r \le 1$

24. $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4, \quad -1 \le r \le 1$

25. $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2, \quad 1 \le r \le 2$

26. $0 \le \theta \le \pi/2, \quad 1 \le |r| \le 2$

Conversión de ecuaciones polares a cartesianas

Sustituya las ecuaciones polares de los ejercicios 27 a 52 por las ecuaciones cartesianas equivalentes. Luego, describa o identifique la gráfica.

27. $r \cos \theta = 2$

28. $r \operatorname{sen} \theta = -1$

29. $r \operatorname{sen} \theta = 0$

30. $r \cos \theta = 0$

31. $r = 4 \csc \theta$

32. $r = -3 \sec \theta$

33. $r \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta = 1$

34. $r \operatorname{sen} \theta = r \cos \theta$

35. $r^2 = 1$

36. $r^2 = 4r \operatorname{sen} \theta$

37. $r = \dfrac{5}{\operatorname{sen} \theta - 2 \cos \theta}$

38. $r^2 \operatorname{sen} 2\theta = 2$

39. $r = \cot \theta \csc \theta$

40. $r = 4 \tan \theta \sec \theta$

41. $r = \csc \theta \, e^{r \cos \theta}$

42. $r \operatorname{sen} \theta = \ln r + \ln \cos \theta$

43. $r^2 + 2r^2 \cos \theta \operatorname{sen} \theta = 1$

44. $\cos^2 \theta = \operatorname{sen}^2 \theta$

45. $r^2 = -4r \cos \theta$

46. $r^2 = -6r \operatorname{sen} \theta$

47. $r = 8 \operatorname{sen} \theta$

48. $r = 3 \cos \theta$

49. $r = 2 \cos \theta + 2 \operatorname{sen} \theta$

50. $r = 2 \cos \theta - \operatorname{sen} \theta$

51. $r \operatorname{sen} \left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right) = 2$

52. $r \operatorname{sen} \left(\dfrac{2\pi}{3} - \theta\right) = 5$

Conversión de ecuaciones cartesianas a polares

Sustituya las ecuaciones cartesianas de los ejercicios 53 a 66 por las ecuaciones polares equivalentes.

53. $x = 7$

54. $y = 1$

55. $x = y$

56. $x - y = 3$

57. $x^2 + y^2 = 4$

58. $x^2 - y^2 = 1$

59. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

60. $xy = 2$

61. $y^2 = 4x$

62. $x^2 + xy + y^2 = 1$

63. $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

64. $(x - 5)^2 + y^2 = 25$

65. $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$

66. $(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 16$

67. Obtenga todas las coordenadas polares del origen.

68. Rectas verticales y horizontales

a) Demuestre que toda recta vertical en el plano xy tiene una ecuación polar de la forma $r = a \sec \theta$.

b) Determine la ecuación polar análoga de las rectas horizontales en el plano xy.

11.4 Gráficas de ecuaciones en coordenadas polares

Con frecuencia es útil graficar una ecuación, expresada en coordenadas polares, en el plano cartesiano xy. Esta sección describe algunas técnicas para graficar estas ecuaciones usando simetrías y tangentes a la gráfica.

Simetría

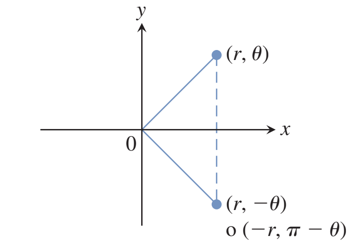
La figura 11.27 ilustra las pruebas estándar de simetría para coordenadas polares. El siguiente resumen señala cómo se relacionan los puntos simétricos.

Pruebas de simetría para gráficas polares en el plano cartesiano *xy*

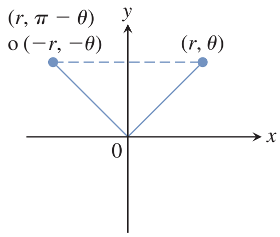
1. *Simetría con respecto al eje x:* Si el punto (r, θ) está en la gráfica, entonces, el punto $(r, -\theta)$ o $(-r, \pi - \theta)$ se halla sobre la gráfica (figura 11.27*a*).

2. *Simetría con respecto al eje y:* Si el punto (r, θ) se encuentra sobre la gráfica, entonces, el punto $(r, \pi - \theta)$ o $(-r, -\theta)$ se halla sobre la gráfica (figura 11.27*b*).

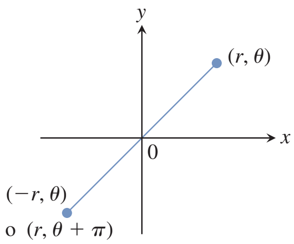
3. *Simetría con respecto al origen:* Si el punto (r, θ) se encuentra sobre la gráfica, entonces, el punto $(-r, \theta)$ o $(r, \theta + \pi)$ se halla sobre la gráfica (figura 11.27*c*).



a) Con respecto al eje x



b) Con respecto al eje y



c) Con respecto al origen

FIGURA 11.27 Tres pruebas para la simetría en coordenadas polares.

Pendiente

La pendiente de una curva polar $r = f(\theta)$ en el plano xy está dada por dy/dx, que no es $r' = df/d\theta$. Para entender por qué, piense en la gráfica de f como la gráfica de las ecuaciones paramétricas

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta.$$

Si f es una función derivable de θ, entonces, también lo son x y y, y cuando $dx/d\theta \neq 0$, podemos calcular dy/dx con la fórmula paramétrica

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} \qquad \text{Sección 11.2, ecuación (1) con } t = \theta$$

$$= \frac{\dfrac{d}{d\theta}(f(\theta)\cdot \text{sen}\,\theta)}{\dfrac{d}{d\theta}(f(\theta)\cdot \cos\theta)}$$

$$= \frac{\dfrac{df}{d\theta}\text{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta}{\dfrac{df}{d\theta}\cos\theta - f(\theta)\,\text{sen}\,\theta} \qquad \text{Regla de productos para derivadas}$$

Así, vemos que dy/dx no es lo mismo que $df/d\theta$.

> **Pendiente de la curva $r = f(\theta)$ en el plano cartesiano xy**
>
> $$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(r,\,\theta)} = \frac{f'(\theta)\,\text{sen}\,\theta + f(\theta)\cos\theta}{f'(\theta)\cos\theta - f(\theta)\,\text{sen}\,\theta}$$
>
> siempre y cuando $dx/d\theta \neq 0$ en (r, θ).

Si la curva $r = f(\theta)$ pasa por el origen cuando $\theta = \theta_0$, entonces, $f(\theta_0) = 0$, y la ecuación para la pendiente da

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(0,\,\theta_0)} = \frac{f'(\theta_0)\,\text{sen}\,\theta_0}{f'(\theta_0)\cos\theta_0} = \tan\theta_0.$$

Si la gráfica de $r = f(\theta)$ pasa por el origen cuando $\theta = \theta_0$, la pendiente de la curva ahí es $\tan\theta_0$. La razón por la que decimos "pendiente en $(0, \theta_0)$" y no sólo "pendiente en el origen" es que una curva polar puede pasar por el origen (o cualquier punto) más de una vez, con pendientes diferentes para distintos valores de θ. Sin embargo, éste no es el caso de nuestro primer ejemplo.

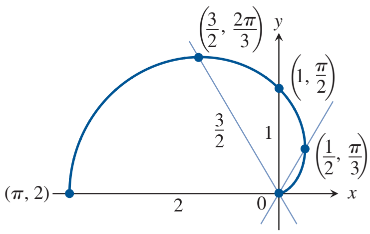
EJEMPLO 1 Grafique la curva $r = 1 - \cos\theta$ en el plano cartesiano xy.

Solución La curva es simétrica con respecto al eje x porque

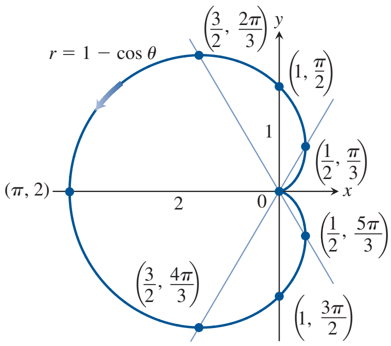
$$\begin{aligned}(r, \theta) \text{ en la gráfica}, &\Rightarrow r = 1 - \cos\theta \\ &\Rightarrow r = 1 - \cos(-\theta) \qquad \cos\theta = \cos(-\theta) \\ &\Rightarrow (r, -\theta) \text{ en la gráfica.}\end{aligned}$$

θ	$r = 1 - \cos\theta$
0	0
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3}{2}$
π	2

a)



b)



c)

FIGURA 11.28 Los pasos al graficar la cardioide $r = 1 - \cos\theta$ (ejemplo 1). La flecha señala la dirección de aumento de θ.

A medida que θ aumenta de 0 a π, $\cos\theta$ disminuye de 1 a -1, y $r = 1 - \cos\theta$ aumenta de un valor mínimo de 0 a un valor máximo de 2. Conforme θ se incrementa de π a 2π, $\cos\theta$ aumenta de -1 a 1 y r decrece de 2 a 0. La curva comienza a repetirse cuando $\theta = 2\pi$ porque el coseno tiene un periodo de 2π.

La curva deja el origen con pendiente $\tan(0) = 0$ y regresa al origen con pendiente $\tan(2\pi) = 0$.

Elaboramos una tabla de valores de $\theta = 0$ a $\theta = \pi$, graficamos los puntos, trazamos una curva suave que pase por ellos con una tangente horizontal en el origen, y reflejamos la curva con respecto al eje x para completar la gráfica (figura 11.28). La curva se llama *cardioide* debido a su forma de corazón. ■

EJEMPLO 2 Grafique la curva $r^2 = 4\cos\theta$ en el plano cartesiano xy.

Solución La ecuación $r^2 = 4\cos\theta$ requiere que $\cos\theta \geq 0$, de manera que obtenemos toda la gráfica completa variando θ de $-\pi/2$ a $\pi/2$. La curva es simétrica con respecto al eje x porque

$$\begin{aligned} (r, \theta) \text{ en la gráfica} &\Rightarrow r^2 = 4\cos\theta \\ &\Rightarrow r^2 = 4\cos(-\theta) \qquad \cos\theta = \cos(-\theta) \\ &\Rightarrow (r, -\theta) \text{ en la gráfica.} \end{aligned}$$

La curva también es simétrica con respecto al origen porque

$$\begin{aligned} (r, \theta) \text{ en la gráfica} &\Rightarrow r^2 = 4\cos\theta \\ &\Rightarrow (-r)^2 = 4\cos\theta \\ &\Rightarrow (-r, \theta) \text{ en la gráfica.} \end{aligned}$$

Estas dos simetrías juntas implican simetría con respecto al eje y.

La curva pasa por el origen cuando $\theta = -\pi/2$ y $\theta = \pi/2$. Tiene una tangente vertical en ambos casos porque $\tan\theta$ es infinita.

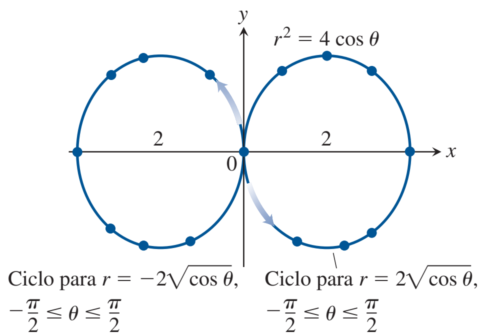
Para cada valor de θ en el intervalo entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, la fórmula $r^2 = 4\cos\theta$ da dos valores para r:

$$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}.$$

Elaboramos una pequeña tabla de valores, graficamos los puntos correspondientes y usamos como guía la información acerca de la simetría y las tangentes para unir los puntos mediante una curva suave (figura 11.29).

θ	$\cos\theta$	$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}$
0	1	± 2
$\pm\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\approx \pm 1.9$
$\pm\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\approx \pm 1.7$
$\pm\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\approx \pm 1.4$
$\pm\frac{\pi}{2}$	0	0

a)



b)

FIGURA 11.29 La gráfica de $r^2 = 4\cos\theta$. Las flechas indican la dirección de aumento de θ. Los valores de r en la tabla están redondeados (ejemplo 2). ■

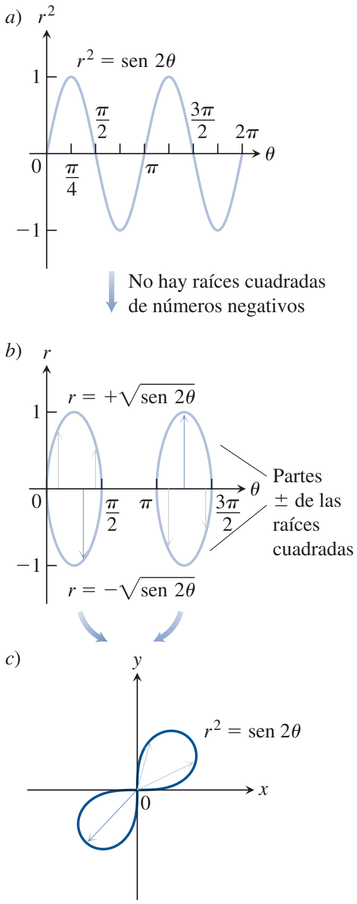


FIGURA 11.30 Para trazar $r = f(\theta)$ en el plano cartesiano $r\theta$ en *b*), primero trazamos $r^2 = \text{sen } 2\theta$ en el plano $r^2\theta$ en *a*) y, luego, ignoramos los valores de θ para los cuales sen 2θ es negativo. Los radios del dibujo en *b*) cubren la gráfica polar de la lemniscata en *c*) dos veces (ejemplo 3).

Convertir una gráfica del plano $r\theta$ al xy

Una manera de graficar una ecuación polar $r = f(\theta)$ en el plano xy consiste en elaborar una tabla de valores (r, θ), graficar los puntos correspondientes y unirlos en orden creciente de θ. Esto puede funcionar bien si hay suficientes puntos para revelar todos los lazos y las depresiones en la gráfica. Otro método de graficación es el siguiente:

1. Primero, grafique $r = f(\theta)$ en el plano *cartesiano* $r\theta$.
2. Luego, use la gráfica cartesiana como una "tabla" y guía para bosquejar la gráfica en coordenadas *polares* en el plano xy.

En ocasiones, este método es mejor que graficar primero los puntos, porque la gráfica cartesiana, aunque se dibuje de prisa, revela de inmediato dónde r es positiva, negativa y dónde no existe, así como dónde r es creciente o decreciente. He aquí un ejemplo.

EJEMPLO 3 Grafique la curva *lemniscata* $r^2 = \text{sen } 2\theta$ en el plano cartesiano xy.

Solución Empezamos por graficar r^2 (no r) como una función de θ en el plano cartesiano $r^2\theta$. Observe la figura 11.30*a*). Pasamos de allí a la gráfica de $r = \pm\sqrt{\text{sen } 2\theta}$ en el plano $r\theta$ (figura 11.30*b*), y luego trazamos la gráfica polar (figura 11.30*c*). La gráfica en la figura 11.30*b*) "cubre" dos veces la gráfica polar final de la figura 11.30*c*). Podríamos haber usado cualquier ciclo, o bien, las dos mitades superiores o las dos mitades inferiores de la gráfica. Sin embargo, la cobertura doble no está de más al graficar y, de este modo, aprendemos un poco más acerca del comportamiento de la función. ■

USO DE LA TECNOLOGÍA Graficación de curvas polares en forma paramétrica
En el caso de curvas polares complicadas, sería recomendable utilizar una calculadora graficadora o una computadora para obtener la curva. Si el dispositivo no traza gráficas polares directamente, podemos convertir $r = f(\theta)$ a la forma paramétrica usando las ecuaciones

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta.$$

Luego, usamos el dispositivo para obtener una curva parametrizada en el plano cartesiano xy. Tal vez sea necesario usar el parámetro t en vez de θ para el dispositivo de graficación.

Ejercicios 11.4

Simetrías y gráficas polares

Identifique las simetrías de las curvas en los ejercicios 1 a 12. Luego, trace las curvas.

1. $r = 1 + \cos\theta$
2. $r = 2 - 2\cos\theta$
3. $r = 1 - \text{sen }\theta$
4. $r = 1 + \text{sen }\theta$
5. $r = 2 + \text{sen }\theta$
6. $r = 1 + 2\,\text{sen }\theta$
7. $r = \text{sen}\,(\theta/2)$
8. $r = \cos(\theta/2)$
9. $r^2 = \cos\theta$
10. $r^2 = \text{sen }\theta$
11. $r^2 = -\text{sen }\theta$
12. $r^2 = -\cos\theta$

Grafique las lemniscatas de los ejercicios 13 a 16. ¿Qué simetrías tienen estas curvas?

13. $r^2 = 4\cos 2\theta$
14. $r^2 = 4\,\text{sen } 2\theta$
15. $r^2 = -\text{sen } 2\theta$
16. $r^2 = -\cos 2\theta$

Pendientes de curvas polares en el plano xy

Obtenga las pendientes de las curvas de los ejercicios 17 a 20 en los puntos dados. Trace las curvas con sus tangentes en estos puntos.

17. Cardioide $r = -1 + \cos\theta$; $\theta = \pm\,\pi/2$
18. Cardioide $r = -1 + \text{sen }\theta$; $\theta = 0, \pi$
19. Rosa de cuatro pétalos $r = \text{sen } 2\theta$; $\theta = \pm\,\pi/4, \pm 3\pi/4$
20. Rosa de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$; $\theta = 0, \pm\pi/2, \pi$

Gráficas de limaçones

Grafique los limaçones de los ejercicios 21 a 24. Limaçon (la **ç** se pronuncia como *s*) es un arcaísmo francés que quiere decir caracol. Usted entenderá el motivo del nombre cuando grafique los limaçones del ejercicio 21. Las ecuaciones para los limaçones tienen la forma $r = a \pm b \cos \theta$ o $r = a \pm b \operatorname{sen} \theta$. Hay cuatro formas básicas.

21. Limaçones con un lazo interior

a) $r = \frac{1}{2} + \cos \theta$ ***b)*** $r = \frac{1}{2} + \operatorname{sen} \theta$

22. Cardioides

a) $r = 1 - \cos \theta$ ***b)*** $r = -1 + \operatorname{sen} \theta$

23. Limaçones con concavidades

a) $r = \frac{3}{2} + \cos \theta$ ***b)*** $r = \frac{3}{2} - \operatorname{sen} \theta$

24. Limaçones ovalados

a) $r = 2 + \cos \theta$ ***b)*** $r = -2 + \operatorname{sen} \theta$

Gráficas de curvas y regiones polares en el plano *xy*

25. Trace la región definida por las desigualdades $-1 \le r \le 2$ y $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$.

26. Trace la región definida por las desigualdades $0 \le r \le 2 \sec \theta$ y $-\pi/4 \le \theta \le \pi/4$.

En los ejercicios 27 y 28, bosqueje la región definida por la desigualdad.

27. $0 \le r \le 2 - 2\cos \theta$ **28.** $0 \le r^2 \le \cos \theta$

T **29.** ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene la misma gráfica que $r = 1 - \cos \theta$?

a) $r = -1 - \cos \theta$ ***b)*** $r = 1 + \cos \theta$

Confirme su respuesta algebraicamente.

T **30.** ¿Cuál de las siguientes ecuaciones tiene la misma gráfica que $r = \cos 2\theta$?

a) $r = -\operatorname{sen}(2\theta + \pi/2)$ ***b)*** $r = -\cos(\theta/2)$

Confirme su respuesta algebraicamente.

T **31. Una rosa dentro de una rosa** Grafique la ecuación $r = 1 - 2 \operatorname{sen} 3\theta$.

T **32. La nefroide de Freeth** Grafique la nefroide de Freeth:

$$r = 1 + 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}.$$

T **33. Rosas** Grafique las rosas $r = \cos m\theta$ para $m = 1/3$, 2, 3 y 7.

T **34. Espirales** Las coordenadas polares son ideales para definir las espirales. Grafique las siguientes espirales.

a) $r = \theta$

b) $r = -\theta$

c) *Una espiral logarítmica*: $r = e^{\theta/10}$

d) *Una espiral hiperbólica*: $r = 8/\theta$

e) *Una hipérbola equilátera*: $r = \pm 10/\sqrt{\theta}$

(Use diferentes colores para las dos ramas).

T **35.** Grafique la ecuación $r = \operatorname{sen}\left(\frac{8}{7}\theta\right)$ para $0 \le \theta \le 14\pi$.

T **36.** Grafique la ecuación

$$r = \operatorname{sen}^2(2.3\theta) + \cos^4(2.3\theta)$$

para $0 \le \theta \le 10\pi$.

11.5 Áreas y longitudes en coordenadas polares

Esta sección muestra cómo calcular el área de regiones planas y longitudes de curvas en coordenadas polares. Las ideas detrás de las definiciones son las mismas que antes, pero las fórmulas son diferentes para coordenadas polares y para coordenadas cartesianas.

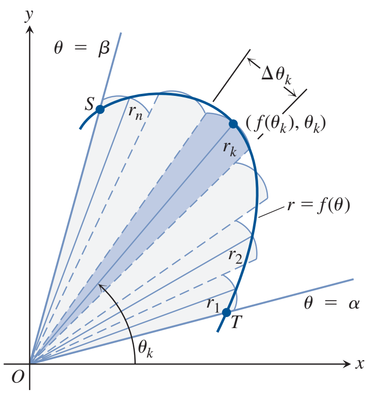


FIGURA 11.31 Para deducir una fórmula para el área de la región *OTS*, aproximamos la región con sectores circulares en forma de abanico.

Área en el plano

La región *OTS* de la figura 11.31 está acotada por los rayos $\theta = \alpha$ y $\theta = \beta$ y la curva $r = f(\theta)$. Aproximamos la región con n sectores circulares en forma de abanico y que no se traslapan, con base en una partición P del ángulo *TOS*. El sector típico tiene un radio $r_k = f(\theta_k)$ y un ángulo central de $\Delta\theta_k$ radianes. Su área es $\Delta\theta_k/2\pi$ veces el área de una circunferencia de radio r_k, o

$$A_k = \frac{1}{2} r_k{}^2 \, \Delta\theta_k = \frac{1}{2}\left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k.$$

El área de la región *OTS* es aproximadamente

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(f(\theta_k)\right)^2 \Delta\theta_k.$$

Si f es continua, esperamos que las aproximaciones mejoren conforme la norma de la partición P tiende a cero, donde la norma de P es el valor más grande de $\Delta\theta_k$. Esto nos lleva a la siguiente fórmula que define el área de la región:

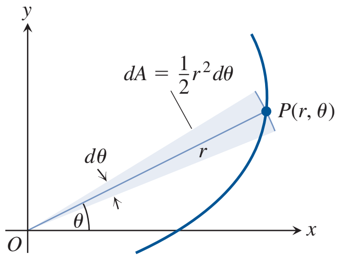


FIGURA 11.32 La diferencial del área dA para la curva $r = f(\theta)$.

$$A = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\big(f(\theta_k)\big)^2 \,\Delta\theta_k$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\big(f(\theta)\big)^2 \,d\theta.$$

Área de la región en forma de abanico entre el origen y la curva $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \,d\theta$$

Ésta es la integral de la **diferencial del área** (figura 11.32)

$$dA = \frac{1}{2} r^2 \,d\theta = \frac{1}{2}\big(f(\theta)\big)^2 d\theta.$$

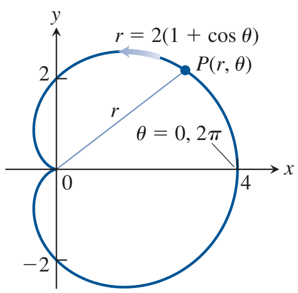


FIGURA 11.33 La cardioide del ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Encuentre el área de la región en el plano xy, acotada por la cardioide $r = 2(1 + \cos\theta)$.

Solución Graficamos la cardioide (figura 11.33) y determinamos que el radio OP barre la región exactamente una vez cuando θ varía de 0 a 2π. Por lo tanto, el área es

$$\begin{aligned}
\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{1}{2} r^2 \,d\theta &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cdot 4(1 + \cos\theta)^2 \,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} 2(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \left(2 + 4\cos\theta + 2\cdot\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \left[3\theta + 4\,\mathrm{sen}\,\theta + \frac{\mathrm{sen}\,2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 6\pi - 0 = 6\pi.
\end{aligned}$$

■

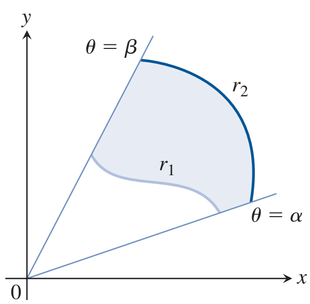


FIGURA 11.34 El área de la región sombreada se calcula restando el área de la región entre r_1 y el origen del área de la región entre r_2 y el origen.

Para hallar el área de la región como la de la figura 11.34, la cual se encuentra entre dos curvas polares $r_1 = r_1(\theta)$ y $r_2 = r_2(\theta)$ desde $\theta = \alpha$ hasta $\theta = \beta$, restamos la integral de $(1/2)r_1^2\,d\theta$ de la integral $(1/2)r_2^2\,d\theta$. Esto conduce a la siguiente fórmula.

Área de la región $0 \le r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_2^{\,2}\,d\theta - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r_1^{\,2}\,d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}\left(r_2^{\,2} - r_1^{\,2}\right) d\theta \qquad (1)$$

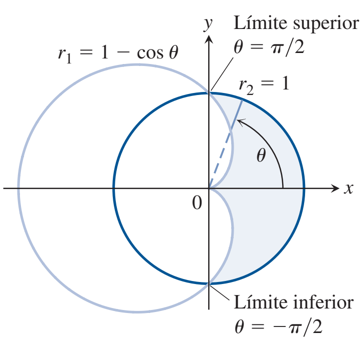


FIGURA 11.35 La región y los límites de integración del ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Obtenga el área de la región que se encuentra dentro de la circunferencia $r = 1$ y fuera de la cardioide $r = 1 - \cos\theta$.

Solución Trazamos la región para determinar sus fronteras y obtener los límites de integración (figura 11.35). La curva exterior es $r_2 = 1$, la curva interior es $r_1 = 1 - \cos\theta$, y θ varía de $-\pi/2$ a $\pi/2$. El área, a partir de la ecuación (1), es

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(r_2{}^2 - r_1{}^2\right) d\theta \\
&= 2\int_{0}^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(r_2{}^2 - r_1{}^2\right) d\theta && \text{Simetría} \\
&= \int_{0}^{\pi/2} (1 - (1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta))\, d\theta && \text{Cuadrado de } r_1. \\
&= \int_{0}^{\pi/2} (2\cos\theta - \cos^2\theta)\, d\theta = \int_{0}^{\pi/2} \left(2\cos\theta - \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \left[2\,\text{sen}\,\theta - \frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen}\,2\theta}{4}\right]_0^{\pi/2} = 2 - \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}
$$

■

El hecho de que podamos representar un punto de diferentes maneras en coordenadas polares demanda mayor cuidado para identificar cuando un punto está en la gráfica de una ecuación polar, y para determinar los puntos en los cuales las gráficas polares se intersecan. (En el ejemplo 2 necesitamos los puntos de intersección). En coordenadas cartesianas, siempre podemos obtener los puntos donde dos curvas se cruzan resolviendo simultáneamente sus ecuaciones. En el caso de las coordenadas polares, es diferente. Las soluciones simultáneas pueden revelar algunos puntos de intersección y otros no, de manera que algunas veces es difícil obtener todos los puntos de intersección de dos curvas polares. Una manera de identificar todos ellos es graficar las ecuaciones.

Longitud de una curva polar

Podemos obtener una fórmula en coordenadas polares para la longitud de una curva $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, parametrizando la curva como

$$x = r\cos\theta = f(\theta)\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta = f(\theta)\,\text{sen}\,\theta, \qquad \alpha \leq \theta \leq \beta. \tag{2}$$

La fórmula paramétrica de longitud, la ecuación (3) de la sección 11.2, da entonces la longitud como

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

Esta ecuación se convierte en

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

cuando x y y se sustituyen por las ecuaciones (2) (ejercicio 29).

Longitud de una curva polar

Si $r = f(\theta)$ tiene una primera derivada continua para $\alpha \leq \theta \leq \beta$ y si el punto $P(r, \theta)$ traza la curva $r = f(\theta)$ exactamente una sola vez al variar θ de α a β, entonces, la longitud de la curva es

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta. \tag{3}$$

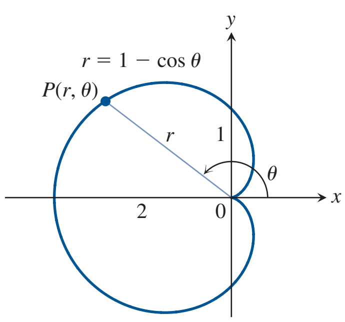


FIGURA 11.36 Cálculo de la longitud de una cardioide (ejemplo 3).

EJEMPLO 3 Obtenga la longitud de la cardioide $r = 1 - \cos\theta$.

Solución Dibujamos la cardioide para determinar los límites de integración (figura 11.36). El punto $P(r, \theta)$ traza la curva una sola vez, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, conforme θ va de 0 a 2π, de manera que éstos son los valores que tomamos para α y β.

Con

$$r = 1 - \cos\theta, \qquad \frac{dr}{d\theta} = \operatorname{sen}\theta,$$

tenemos

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = (1 - \cos\theta)^2 + (\operatorname{sen}\theta)^2$$
$$= 1 - 2\cos\theta + \underbrace{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}_{1} = 2 - 2\cos\theta$$

y

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos\theta}\, d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \qquad 1 - \cos\theta = 2\operatorname{sen}^2(\theta/2)$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\left|\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\right| d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\, d\theta \qquad \operatorname{sen}(\theta/2) \ge 0 \quad \text{para} \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$= \left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 4 + 4 = 8.$$

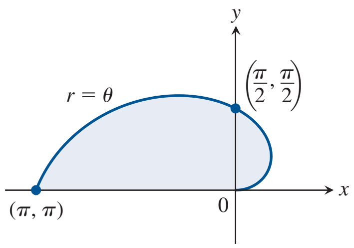
■

Ejercicios 11.5

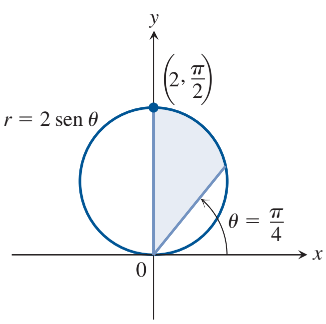
Obtención de áreas polares

Obtenga las áreas de las regiones de los ejercicios 1 a 8.

1. Región limitada por la espiral $r = \theta$ para $0 \le \theta \le \pi$



2. Región limitada por la circunferencia $r = 2\operatorname{sen}\theta$ para $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$

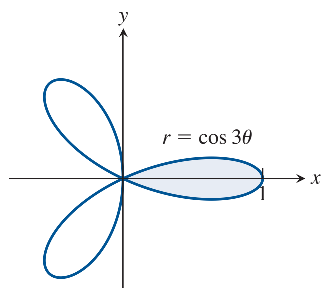


3. Región dentro del óvalo del limaçon $r = 4 + 2\cos\theta$

4. Región dentro de la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, $a > 0$

5. Región dentro de un pétalo de una rosa de cuatro pétalos $r = \cos 2\theta$

6. Región dentro de un pétalo de una rosa de tres pétalos $r = \cos 3\theta$



7. Región dentro de un lazo de la lemniscata $r^2 = 4\operatorname{sen}2\theta$

8. Región dentro de una rosa de seis pétalos $r^2 = 2\operatorname{sen}3\theta$

Obtenga las áreas de las regiones en los ejercicios 9 a 18.

9. Región compartida por las circunferencias $r = 2\cos\theta$ y $r = 2\operatorname{sen}\theta$

10. Región compartida por las circunferencias $r = 1$ y $r = 2\operatorname{sen}\theta$

11. Región compartida por la circunferencia $r = 2$ y la cardioide $r = 2(1 - \cos\theta)$

12. Región compartida por las cardioides $r = 2(1 + \cos\theta)$ y $r = 2(1 - \cos\theta)$

13. Región dentro de la lemniscata $r^2 = 6\cos 2\theta$ y fuera de la circunferencia $r = \sqrt{3}$

14. Región dentro de la circunferencia $r = 3a \cos \theta$ y fuera de la cardioide $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$

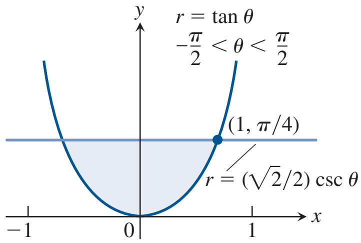
15. Región dentro de la circunferencia $r = -2 \cos \theta$ y fuera de la circunferencia $r = 1$

16. Región dentro de la circunferencia $r = 6$ y sobre la recta $r = 3 \csc \theta$

17. Región dentro de la circunferencia $r = 4 \cos \theta$ y a la derecha de la recta vertical $r = \sec \theta$

18. Región dentro de la circunferencia $r = 4$ sen θ y debajo de la recta horizontal $r = 3 \csc \theta$

19. ***a***) Obtenga el área de la región sombreada en la siguiente figura.



b) Parece que la gráfica de $r = \tan \theta$, $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ es asintótica a las rectas $x = 1$ y $x = -1$. ¿Es así? Explique las razones de su respuesta.

20. El área de la región que se encuentra dentro de la curva cardioide de $r = \cos \theta + 1$ y fuera de la circunferencia $r = \cos \theta$ no es

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left[(\cos \theta + 1)^2 - \cos^2 \theta \right] d\theta = \pi.$$

¿Por qué no? ¿Cuál *es* el área? Fundamente sus respuestas.

Obtención de longitudes de curvas polares

Determine las longitudes de las curvas de los ejercicios 21 a 28.

21. La espiral $r = \theta^2$, $\quad 0 \le \theta \le \sqrt{5}$

22. La espiral $r = e^{\theta}/\sqrt{2}$, $\quad 0 \le \theta \le \pi$

23. La cardioide $r = 1 + \cos \theta$

24. La curva $r = a$ sen$^2(\theta/2)$, $\quad 0 \le \theta \le \pi$, $\quad a > 0$

25. El segmento parabólico $r = 6/(1 + \cos \theta)$, $\quad 0 \le \theta \le \pi/2$

26. El segmento parabólico $r = 2/(1 - \cos \theta)$, $\quad \pi/2 \le \theta \le \pi$

27. La curva $r = \cos^3(\theta/3)$, $\quad 0 \le \theta \le \pi/4$

28. La curva $r = \sqrt{1 + \text{sen } 2\theta}$, $\quad 0 \le \theta \le \pi\sqrt{2}$

29. Longitud de la curva $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$ Suponiendo que las derivadas que sean necesarias son continuas, demuestre cómo las sustituciones

$$x = f(\theta) \cos \theta, \quad y = f(\theta) \text{ sen } \theta$$

(ecuaciones 2 en el texto) transforman

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

en

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta.$$

30. Perímetros de círculos Como es usual, cuando vemos una nueva fórmula, es buena idea aplicarla a objetos familiares para asegurarnos de que produce resultados congruentes con la experiencia. Emplee la fórmula de la longitud de la ecuación (3) para calcular el perímetro de los siguientes círculos ($a > 0$).

a) $r = a$ ***b***) $r = a \cos \theta$ ***c***) $r = a$ sen θ

Teoría y ejemplos

31. Valor promedio Si f es continua, el valor promedio de la coordenada polar r sobre la curva $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, con respecto a θ está dado por la fórmula

$$r_{\text{prom}} = \frac{1}{\beta - \alpha}\int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)\, d\theta.$$

Use esta fórmula para encontrar el valor promedio de r con respecto a θ sobre las siguientes curvas ($a > 0$).

a) La cardioide $r = a(1 - \cos \theta)$

b) La circunferencia $r = a$

c) La circunferencia $r = a \cos \theta$, $\quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

32. $r = f(\theta)$ *versus* $r = 2f(\theta)$ ¿Es posible establecer alguna relación entre las longitudes de las curvas $r = f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$, y $r = 2f(\theta)$, $\alpha \le \theta \le \beta$? Fundamente su respuesta.

11.6 Secciones cónicas

En esta sección revisaremos y definiremos geométricamente las parábolas, las elipses y las hipérbolas, y deduciremos sus ecuaciones cartesianas estándar. Estas curvas se llaman *secciones cónicas*, o simplemente *cónicas*, porque se forman al cortar un cono doble con un plano (figura 11.37). Este método geométrico era la única manera que tenían los matemáticos griegos para describirlas, pues no contaban con nuestras herramientas de coordenadas cartesianas o polares. En la siguiente sección expresaremos las cónicas en coordenadas polares.

Parábolas

DEFINICIONES El conjunto formado por todos los puntos en un plano que equidistan de un punto fijo y de una recta fija, dados en el plano, es una **parábola**. El punto fijo es el **foco** de la parábola. La recta fija es la **directriz**.

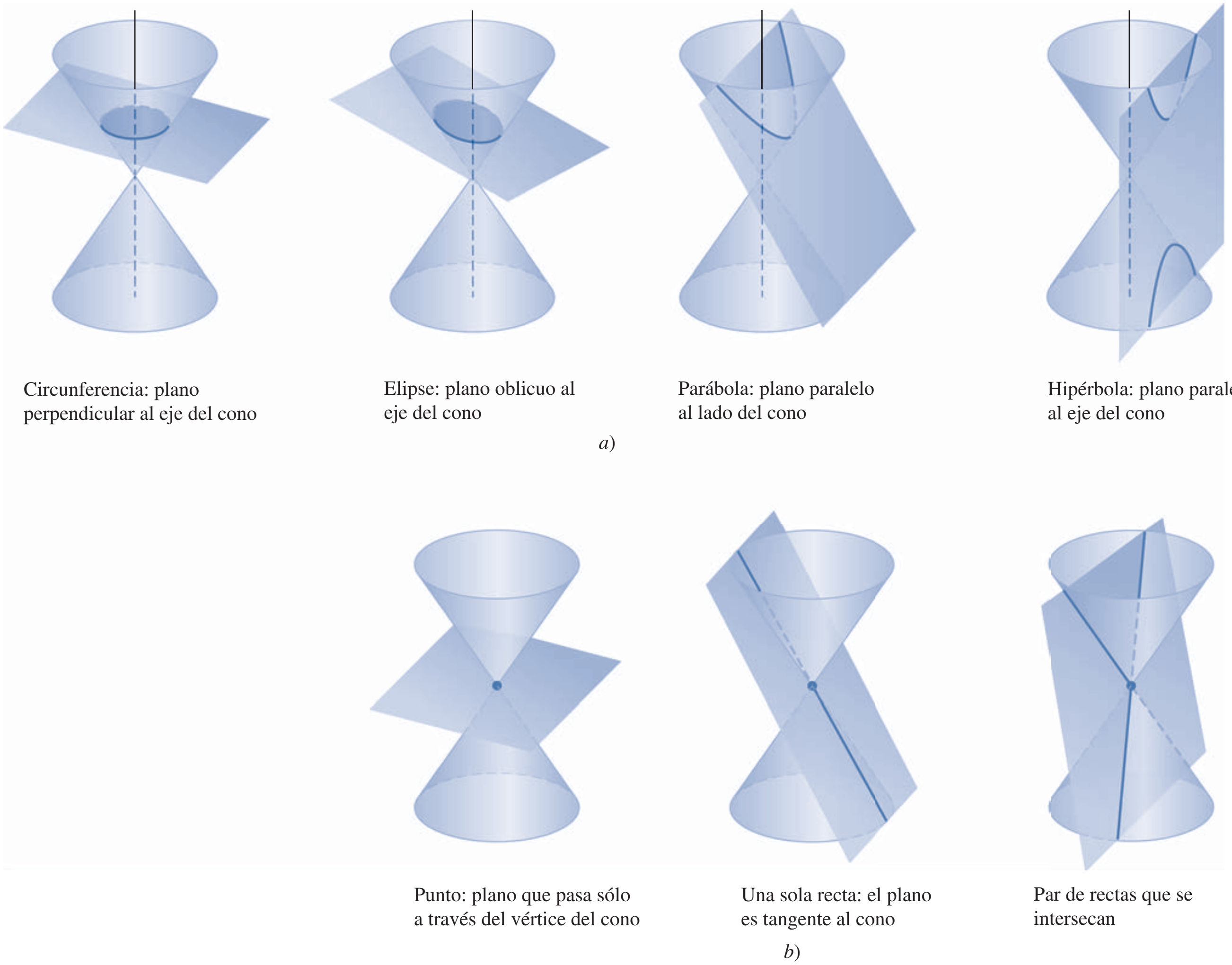


FIGURA 11.37 Las secciones cónicas estándar *a*) son las curvas en las cuales un plano corta un cono *doble*. Las hipérbolas constan de dos partes, llamadas *ramas*. El punto y las rectas que se obtienen al hacer pasar el plano por el vértice del cono *b*) son secciones cónicas *degeneradas*.

Si el foco F está en la directriz L, la parábola es la recta que pasa por F y es perpendicular a L. Esto se considera un caso degenerado y, de aquí en adelante, se supondrá que F no está en L.

La ecuación más sencilla para una parábola se obtiene cuando su foco se encuentra en uno de los ejes y su directriz es perpendicular a éste. Por ejemplo, suponga que el foco se localiza en el punto $F(0, p)$ en la parte positiva del eje y, y que la directriz es la recta $y = -p$ (figura 11.38). En la notación de la figura, un punto $P(x, y)$ está en la parábola si y sólo si $PF = PQ$. A partir de la fórmula de la distancia,

$$PF = \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{x^2 + (y-p)^2}$$

$$PQ = \sqrt{(x-x)^2 + (y-(-p))^2} = \sqrt{(y+p)^2}.$$

Cuando igualamos estas expresiones, elevamos al cuadrado y simplificamos, obtenemos

$$y = \frac{x^2}{4p} \qquad \text{o} \qquad x^2 = 4py. \qquad \text{Forma estándar} \qquad (1)$$

Estas ecuaciones revelan la simetría de la parábola con respecto al eje y. A este último lo llamamos **eje** de la parábola (una forma abreviada de "eje de simetría").

El punto donde una parábola cruza su eje es el **vértice**. El vértice de la parábola $x^2 = 4py$ está en el origen (figura 11.38). El número positivo p es la **distancia focal** de la parábola.

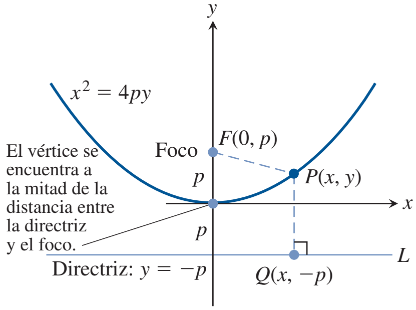


FIGURA 11.38 Forma estándar de la parábola $x^2 = 4py$, $p > 0$.

Si la parábola abre hacia abajo, con su foco en $(0, -p)$ y con directriz en la recta $y = p$, entonces, las ecuaciones (1) se convierten en

$$y = -\frac{x^2}{4p} \qquad \text{y} \qquad x^2 = -4py.$$

Intercambiando las variables x y y, obtenemos ecuaciones similares para parábolas que se abren a la derecha o a la izquierda (figura 11.39).

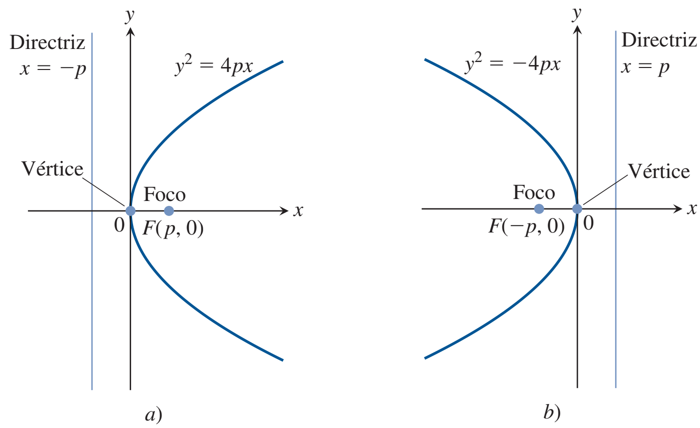


FIGURA 11.39 *a*) La parábola $y^2 = 4px$. *b*) La parábola $y^2 = -4px$.

EJEMPLO 1 Obtenga el foco y la directriz de la parábola $y^2 = 10x$.

Solución Determinamos el valor de p en la ecuación estándar de la parábola $y^2 = 4px$:

$$4p = 10, \qquad \text{de manera que} \qquad p = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Luego, determinamos el foco y la directriz para este valor de p:

$$\text{Foco:} \qquad (p, 0) = \left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$\text{Directriz:} \qquad x = -p \qquad \text{o} \qquad x = -\frac{5}{2}.$$ ■

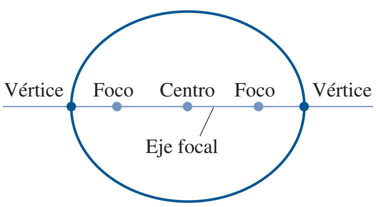


FIGURA 11.40 Puntos en el eje focal de una elipse.

Elipses

DEFINICIONES Una **elipse** es el conjunto de puntos en un plano cuyas distancias a dos puntos fijos en el plano tienen una suma constante. Los dos puntos fijos son los **focos** de la elipse.

La recta que pasa por los focos de una elipse es el **eje focal**. El punto que se localiza en el eje a la mitad de la distancia entre los focos es el **centro**. Los puntos donde el eje focal y la elipse se cruzan son los **vértices** de la elipse (figura 11.40).

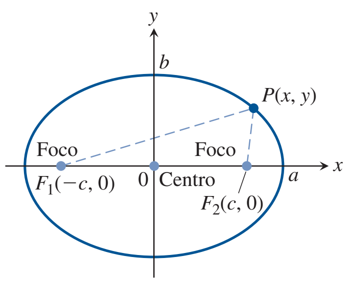


FIGURA 11.41 La elipse definida por la ecuación $PF_1 + PF_2 = 2a$ es la gráfica de la ecuación $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, donde $b^2 = a^2 - c^2$.

Si los focos son $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ (figura 11.41), y $PF_1 + PF_2$ se denota con $2a$, entonces, las coordenadas de un punto P sobre la elipse satisfacen la ecuación

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = 2a.$$

Para simplificar esta ecuación, movemos el segundo radical al lado derecho, elevamos al cuadrado, despejamos el radical que queda y elevamos otra vez al cuadrado para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{2}$$

Puesto que $PF_1 + PF_2$ es mayor que la longitud F_1F_2 (por la desigualdad del triángulo para el triángulo PF_1F_2), el número $2a$ es mayor que $2c$. De acuerdo con esto, $a > c$ y el número $a^2 - c^2$ en la ecuación (2) es positivo.

Los pasos algebraicos que conducen a la ecuación (2) se pueden revertir para demostrar que todos los puntos P cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de esta forma con $0 < c < a$ también satisfacen la ecuación $PF_1 + PF_2 = 2a$. Por lo tanto, un punto se encuentra en la elipse si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación (2).

Si

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \tag{3}$$

entonces, $a^2 - c^2 = b^2$ y la ecuación (2) toma la forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{4}$$

La ecuación (4) indica que esta elipse es simétrica con respecto al origen y a ambos ejes de coordenadas. Además, permanece dentro del rectángulo acotado por las rectas $x = \pm a$ y $y = \pm b$. La elipse cruza los ejes en los puntos $(\pm a, 0)$ y $(0, \pm b)$. Las tangentes en estos puntos son perpendiculares a los ejes porque

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \qquad \text{Obtenida de la ecuación (4) por medio de la derivación implícita}$$

es cero si $x = 0$, e infinita si $y = 0$.

El **eje mayor** de la elipse en la ecuación (4) es el segmento de recta de longitud $2a$ que une los puntos $(\pm a, 0)$. El **eje menor** es el segmento de recta de longitud $2b$ que une los puntos $(0, \pm b)$. El mismo número a es el **semieje mayor**, y el número b es el **semieje menor**. El número c, obtenido de la ecuación (3) como

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

es la **distancia del centro al foco** de la elipse. Si $a = b$, la elipse en realidad no es tal, sino se trata de una circunferencia.

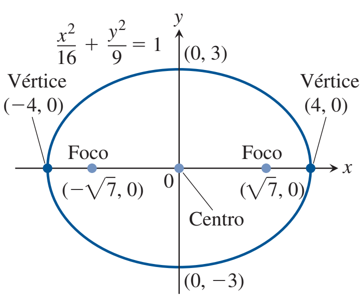


FIGURA 11.42 Una elipse con su eje mayor horizontal (ejemplo 2).

EJEMPLO 2 La elipse

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \tag{5}$$

(figura 11.42) tiene

Semieje mayor: $a = \sqrt{16} = 4$, Semieje menor: $b = \sqrt{9} = 3$

Distancia del centro al foco: $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

Focos: $(\pm c, 0) = (\pm\sqrt{7}, 0)$

Vértices: $(\pm a, 0) = (\pm 4, 0)$

Centro: $(0, 0)$. ■

Si intercambiamos x y y en la ecuación (5), tenemos la ecuación

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1. \tag{6}$$

El eje mayor de esta elipse es ahora vertical en vez de horizontal, con los focos y vértices en el eje y. No hay confusión en el análisis de las ecuaciones (5) y (6). Si encontramos las intersecciones en los ejes de coordenadas, sabremos cuál es el eje mayor porque es el más grande de los dos.

Ecuaciones en forma estándar para las elipses con centro en el origen

Focos sobre el eje x: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b)$

Distancia del centro al foco: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Focos: $(\pm c, 0)$

Vértices: $(\pm a, 0)$

Focos sobre el eje y: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad (a > b)$

Distancia del centro al foco: $c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Focos: $(0, \pm c)$

Vértices: $(0, \pm a)$

En cada caso, a es el semieje mayor y b es el semieje menor.

Hipérbolas

DEFINICIONES Una **hipérbola** es el conjunto de puntos en un plano, cuyas distancias a dos puntos fijos del plano tienen diferencia constante. Los dos puntos fijos son los **focos** de la hipérbola.

La recta que pasa por los focos de una hipérbola es el **eje focal**. El punto que está en el eje focal a la mitad de la distancia entre los focos es el **centro** de la hipérbola. Los puntos donde el eje focal y la hipérbola se cruzan son los **vértices** (figura 11.43).

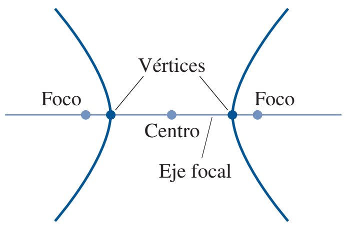


FIGURA 11.43 Puntos en el eje focal de una hipérbola.

Si los focos son $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ (figura 11.44) y la diferencia constante es $2a$, entonces, el punto (x, y) se localiza en la hipérbola si y sólo si

$$\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{7}$$

Para simplificar esta ecuación, movemos el segundo radical al lado derecho, elevamos al cuadrado, despejamos el radical que queda y elevamos otra vez al cuadrado, para obtener

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1. \tag{8}$$

Hasta el momento, esta ecuación se parece a la de la elipse. Pero ahora $a^2 - c^2$ es negativa porque $2a$, al ser la diferencia de dos lados del triángulo PF_1F_2, es menor que $2c$, el tercer lado.

Los pasos algebraicos que conducen a la ecuación (8) se pueden revertir para demostrar que todo punto P cuyas coordenadas satisfacen una ecuación de esta forma con $0 < a < c$ también satisfacen la ecuación (7). Por lo tanto, un punto está en la hipérbola si y sólo si sus coordenadas satisfacen la ecuación (8).

Si denotamos con b a la raíz cuadrada positiva de $c^2 - a^2$,

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \tag{9}$$

entonces, $a^2 - c^2 = -b^2$ y la ecuación (8) se escribiría en forma compacta como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

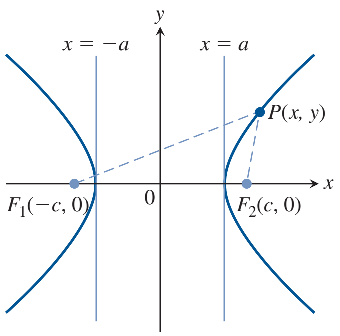


FIGURA 11.44 Las hipérbolas tienen dos ramas. Para puntos en la rama derecha de la hipérbola mostrada aquí, $PF_1 - PF_2 = 2a$. Para los puntos en la rama izquierda de la hipérbola mostrada aquí, $PF_2 - PF_1 = 2a$. Entonces, consideramos $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

Las diferencias entre la ecuación (10) y la ecuación de una elipse (ecuación 4) son el signo menos y la nueva relación

$$c^2 = a^2 + b^2. \qquad \text{De la ecuación (9)}$$

Al igual que la elipse, la hipérbola es simétrica con respecto al origen y a los ejes de coordenadas. Cruza el eje x en los puntos $(\pm a, 0)$. Las tangentes en estos puntos son verticales porque

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2x}{a^2y} \qquad \text{Obtenida de la ecuación (10) por medio de derivación implícita}$$

es infinita cuando $y = 0$. La hipérbola no tiene intersecciones con el eje y; de hecho, ninguna parte de la curva se encuentra entre las rectas $x = -a$ y $x = a$.

Las rectas

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

son las dos **asíntotas** de la hipérbola definida por la ecuación (10). La manera más rápida de determinar las ecuaciones de las asíntotas es sustituir el 1 en la ecuación (10) por 0, y despejar y en la nueva ecuación:

$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}_{\text{hipérbola}} \rightarrow \underbrace{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0}_{\text{0 para 1}} \rightarrow \underbrace{y = \pm\frac{b}{a}x.}_{\text{asíntotas}}$$

EJEMPLO 3 La ecuación

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 \tag{11}$$

es la ecuación (10) con $a^2 = 4$ y $b^2 = 5$ (figura 11.45). Tenemos

Distancia entre el centro y el foco: $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4 + 5} = 3$

Focos: $(\pm c, 0) = (\pm 3, 0)$, Vértices: $(\pm a, 0) = (\pm 2, 0)$

Centro: $(0, 0)$

Asíntotas: $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 0 \quad \text{o} \quad y = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}x.$ ■

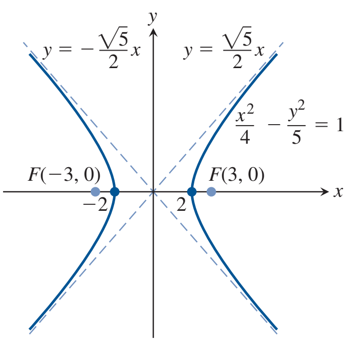


FIGURA 11.45 La hipérbola del ejemplo 3 y sus asíntotas.

Si intercambiamos x y y en la ecuación (11), los focos y los vértices de la hipérbola resultante estarán en el eje y. Encontraremos las asíntotas del mismo modo que antes, pero ahora sus ecuaciones serán $y = \pm 2x/\sqrt{5}$.

Ecuaciones en forma estándar para las hipérbolas con centro en el origen

Focos en el eje x: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

Distancia entre el centro y el foco: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Focos: $(\pm c, 0)$

Vértices: $(\pm a, 0)$

Asíntotas: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{o} \quad y = \pm\dfrac{b}{a}x$

Focos en el eje y: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

Distancia entre el centro y el foco: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Focos: $(0, \pm c)$

Vértices: $(0, \pm a)$

Asíntotas: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 0 \quad \text{o} \quad y = \pm\dfrac{a}{b}x$

Observe la diferencia en las ecuaciones para las asíntotas (b/a en la primera, a/b en la segunda).

Cambiamos las cónicas usando los principios revisados en la sección 1.2, sustituyendo x por $x + h$ y y por $y + k$.

EJEMPLO 4 Demuestre que la ecuación $x^2 - 4y^2 + 2x + 8y - 7 = 0$ representa una hipérbola. Encuentre su centro, asíntotas y focos.

Solución Reducimos la ecuación a la forma estándar completando el cuadrado en x y y como sigue:

$$(x^2 + 2x) - 4(y^2 - 2y) = 7$$

$$(x^2 + 2x + 1) - 4(y^2 - 2y + 1) = 7 + 1 - 4$$

$$\frac{(x + 1)^2}{4} - (y - 1)^2 = 1.$$

Ésta es la forma estándar de la ecuación (10) de una hipérbola con x sustituida por $x + 1$ y y reemplazada por $y - 1$. La hipérbola se desplaza una unidad a la izquierda y una unidad hacia arriba, y tiene su centro en $x + 1 = 0$ y $y - 1 = 0$, o $x = -1$ y $y = 1$. Aún más,

$$a^2 = 4, \qquad b^2 = 1, \qquad c^2 = a^2 + b^2 = 5,$$

de manera que las asíntotas son las dos rectas

$$\frac{x + 1}{2} - (y - 1) = 0 \qquad \text{y} \qquad \frac{x + 1}{2} + (y - 1) = 0,$$

o bien,

$$y - 1 = \pm\frac{1}{2}(x + 1).$$

Los focos trasladados tienen coordenadas $\left(-1 \pm \sqrt{5}, 1\right)$. ■

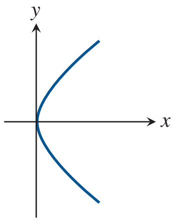
Ejercicios 11.6

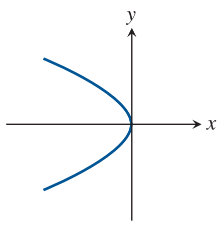
Identificación de gráficas

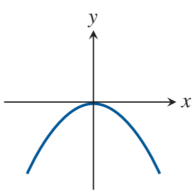
Relacione las parábolas de los ejercicios 1 a 4 con las siguientes ecuaciones:

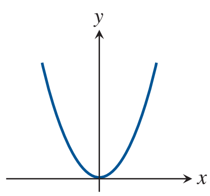
$$x^2 = 2y, \quad x^2 = -6y, \quad y^2 = 8x, \quad y^2 = -4x.$$

Luego, determine el foco y la directriz de cada parábola.

1.


2.


3.


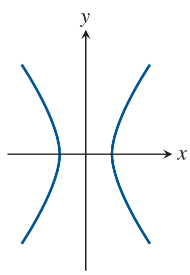
4.


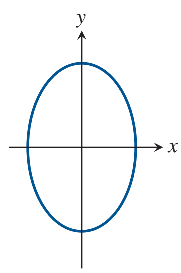
Relacione cada una de las secciones cónicas de los ejercicios 5 a 8 con una de las siguientes ecuaciones:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1, \qquad \frac{x^2}{2} + y^2 = 1,$$

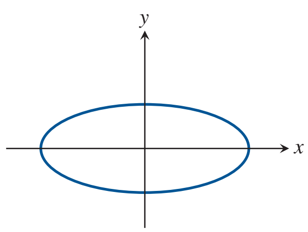
$$\frac{y^2}{4} - x^2 = 1, \qquad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Luego, determine los focos y vértices de las secciones cónicas. Si la sección cónica es una hipérbola, determine también sus asíntotas.

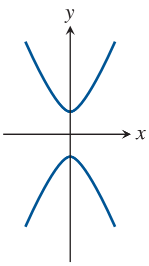
5.


6.


7.



8.



Parábolas

En los ejercicios 9 a 16 se presentan ecuaciones de parábolas. Obtenga el foco y la directriz de cada parábola. Luego, dibuje la gráfica correspondiente, incluyendo el foco y la directriz.

9. $y^2 = 12x$ **10.** $x^2 = 6y$ **11.** $x^2 = -8y$

12. $y^2 = -2x$ **13.** $y = 4x^2$ **14.** $y = -8x^2$

15. $x = -3y^2$ **16.** $x = 2y^2$

Elipses

Los ejercicios 17 a 24 presentan ecuaciones de elipses. Exprese cada ecuación en su forma estándar. Luego, dibuje la elipse, incluyendo los focos.

17. $16x^2 + 25y^2 = 400$ **18.** $7x^2 + 16y^2 = 112$

19. $2x^2 + y^2 = 2$ **20.** $2x^2 + y^2 = 4$

21. $3x^2 + 2y^2 = 6$ **22.** $9x^2 + 10y^2 = 90$

23. $6x^2 + 9y^2 = 54$ **24.** $169x^2 + 25y^2 = 4225$

Los ejercicios 25 y 26 dan información acerca de los focos y vértices de elipses con centro en el origen del plano xy. En cada caso, determine la ecuación en la forma estándar a partir de la información disponible.

25. Focos: $(\pm\sqrt{2}, 0)$ Vértices: $(\pm 2, 0)$

26. Focos: $(0, \pm 4)$ Vértices: $(0, \pm 5)$

Hipérbolas

Los ejercicios 27 a 34 presentan ecuaciones de hipérbolas. Exprese cada ecuación en su forma estándar y determine las asíntotas de las hipérbolas. Luego, dibuje la hipérbola, incluyendo sus asíntotas y focos.

27. $x^2 - y^2 = 1$ **28.** $9x^2 - 16y^2 = 144$

29. $y^2 - x^2 = 8$ **30.** $y^2 - x^2 = 4$

31. $8x^2 - 2y^2 = 16$ **32.** $y^2 - 3x^2 = 3$

33. $8y^2 - 2x^2 = 16$ **34.** $64x^2 - 36y^2 = 2304$

Los ejercicios 35 a 38 dan información acerca de los focos, los vértices y las asíntotas de hipérbolas con centro en el origen del plano xy. En todos los casos, determine la ecuación en forma estándar de la hipérbola a partir de la información disponible.

35. Focos: $\left(0, \pm\sqrt{2}\right)$
Asíntonas: $y = \pm x$

36. Focos: $(\pm 2, 0)$
Asíntonas: $y = \pm \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$

37. Vértices: $(\pm 3, 0)$
Asíntonas: $y = \pm \dfrac{4}{3}x$

38. Vértices: $(0, \pm 2)$
Asíntonas: $y = \pm \dfrac{1}{2}x$

Desplazamiento de secciones cónicas

Sería útil que revisara la sección 1.2 antes de resolver los ejercicios 39 a 56.

39. La parábola $y^2 = 8x$ se desplaza 2 unidades hacia abajo y 1 unidad a la derecha para generar la parábola $(y + 2)^2 = 8(x - 1)$.

a) Obtenga el vértice, el foco y la directriz de la nueva parábola.

b) Grafique el vértice, el foco y la directriz nuevos, y bosqueje la parábola.

40. La parábola $x^2 = -4y$ se desplaza 1 unidad hacia la izquierda y 3 unidades hacia arriba para generar la parábola $(x + 1)^2 = -4(y - 3)$.

a) Determine el vértice, el foco y la directriz de la nueva parábola.

b) Trace el vértice, el foco y la directriz nuevos, y bosqueje la parábola.

41. La elipse $(x^2/16) + (y^2/9) = 1$ se desplaza 4 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba para generar la elipse

$$\frac{(x-4)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1.$$

a) Obtenga los focos, los vértices y el centro de la nueva elipse.

b) Trace los nuevos focos y vértices, y bosqueje la elipse.

42. La elipse $(x^2/9) + (y^2/25) = 1$ se desplaza 3 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia abajo para generar la elipse

$$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1.$$

a) Obtenga los focos, los vértices y el centro de la nueva elipse.

b) Trace los focos, los vértices y el centro nuevos, y bosqueje la elipse.

43. La hipérbola $(x^2/16) - (y^2/9) = 1$ se desplaza 2 unidades hacia la derecha para generar la hipérbola

$$\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

a) Determine el centro, los focos, los vértices y las asíntotas de la nueva hipérbola.

b) Grafique el centro, los focos, los vértices y las asíntotas nuevos, y bosqueje la hipérbola.

44. La hipérbola $(y^2/4) - (x^2/5) = 1$ se desplaza 2 unidades hacia abajo para generar la hipérbola

$$\frac{(y+2)^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1.$$

a) Obtenga el centro, los focos, los vértices y las asíntotas de la nueva hipérbola.

b) Trace el centro, los focos, los vértices y las asíntotas nuevos, y bosqueje la hipérbola.

Los ejercicios 45 a 48 incluyen ecuaciones de parábolas e indican cuántas unidades hacia arriba o hacia abajo y a la derecha o a la izquierda se desplaza cada parábola. Determine la ecuación para la parábola nueva y encuentre el vértice, el foco y la directriz nuevos.

45. $y^2 = 4x$, izquierda 2, abajo 3

46. $y^2 = -12x$, derecha 4, arriba 3

47. $x^2 = 8y$, derecha 1, abajo 7

48. $x^2 = 6y$, izquierda 3, abajo 2

Los ejercicios 49 a 52 presentan ecuaciones de elipses e indican cuántas unidades hacia arriba o hacia abajo y a la derecha o a la izquierda se desplaza cada elipse. Determine una ecuación para la nueva elipse y encuentre los focos, los vértices y el centro nuevos.

49. $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{9} = 1$, izquierda 2, abajo 1

50. $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$, derecha 3, arriba 4

51. $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$, derecha 2, arriba 3

52. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$, izquierda 4, abajo 5

Los ejercicios 53 a 56 presentan ecuaciones de hipérbolas e indican cuántas unidades hacia arriba o hacia abajo y a la derecha o a la izquierda se desplaza cada hipérbola. Determine una ecuación para la hipérbola nueva y encuentre el centro, los focos, los vértices y las asíntotas nuevos.

53. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$, derecha 2, arriba 2

54. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$, izquierda 2, abajo 1

55. $y^2 - x^2 = 1$, izquierda 1, abajo 1

56. $\frac{y^2}{3} - x^2 = 1$, derecha 1, arriba 3

Obtenga el centro, los focos, los vértices, las asíntotas y el radio, según proceda, de las secciones cónicas de los ejercicios 57 a 68.

57. $x^2 + 4x + y^2 = 12$

58. $2x^2 + 2y^2 - 28x + 12y + 114 = 0$

59. $x^2 + 2x + 4y - 3 = 0$

60. $y^2 - 4y - 8x - 12 = 0$

61. $x^2 + 5y^2 + 4x = 1$

62. $9x^2 + 6y^2 + 36y = 0$

63. $x^2 + 2y^2 - 2x - 4y = -1$

64. $4x^2 + y^2 + 8x - 2y = -1$

65. $x^2 - y^2 - 2x + 4y = 4$

66. $x^2 - y^2 + 4x - 6y = 6$

67. $2x^2 - y^2 + 6y = 3$

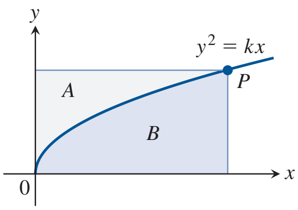
68. $y^2 - 4x^2 + 16x = 24$

Teoría y ejemplos

69. Si se dibujan rectas paralelas a los ejes de coordenadas que pasen por un punto P sobre la parábola $y^2 = kx$, $k > 0$, la parábola divide la región rectangular acotada por estas rectas y los ejes en dos pequeñas regiones, A y B.

a) Si las dos regiones más pequeñas giran alrededor del eje y, demuestre que generan sólidos cuyos volúmenes tienen una proporción de 4:1.

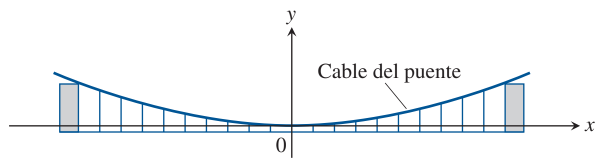
b) ¿Cuál es la razón de los volúmenes generados cuando las regiones giran alrededor del eje x?



70. Los cables de los puentes colgantes describen parábolas El cable del puente colgante ilustrado en la figura soporta una carga uniforme de w libras por pie horizontal. Es posible demostrar que si H es la tensión horizontal del cable en el origen, entonces, la curva del cable satisface la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{w}{H}x.$$

Demuestre que el cable cuelga en forma de parábola, resolviendo esta ecuación diferencial sujeta a la condición inicial $y = 0$ cuando $x = 0$.



71. Anchura de una parábola en el foco Demuestre que el número $4p$ es el *ancho* de la parábola $x^2 = 4py$ $(p > 0)$ en el foco, comprobando que la recta $y = p$ corta la parábola en puntos que están separados $4p$ unidades.

72. Las asíntotas de $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ Demuestre que la distancia vertical entre la recta $y = (b/a)x$ y la mitad superior de la rama derecha $y = (b/a)\sqrt{x^2 - a^2}$ de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ tiende a cero, comprobando que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = 0.$$

Resultados análogos se obtienen para las partes restantes de la hipérbola y las rectas $y = \pm(b/a)x$.

73. Área Obtenga las dimensiones del rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ con sus lados paralelos a los ejes de coordenadas. ¿Cuál es el área del rectángulo?

74. Volumen Obtenga el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ alrededor de ***a***) el eje x, ***b***) el eje y.

75. Volumen La región "triangular" en el primer cuadrante acotada por el eje x, la recta $x = 4$ y la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ gira alrededor del eje x para generar un sólido. Determine el volumen de ese sólido.

76. Tangentes Demuestre que las tangentes a la curva $y^2 = 4px$ desde cualquier punto de la recta $x = -p$ son perpendiculares.

77. Tangentes Determine las ecuaciones para las tangentes a la circunferencia $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$ en los puntos donde la circunferencia cruza los ejes de coordenadas.

78. Volumen La región acotada a la izquierda por el eje y, a la derecha por la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$, y arriba y abajo por las rectas $y = \pm 3$ gira alrededor del eje x para generar un sólido. Obtenga el volumen del sólido.

79. Centroide Determine el centroide de la región acotada por abajo por el eje x y por arriba por la elipse $(x^2/9) + (y^2/16) = 1$.

80. Área de superficies La curva $y = \sqrt{x^2 + 1}$, $0 \le x \le \sqrt{2}$, que es parte de la rama superior de la hipérbola $y^2 - x^2 = 1$, se hace girar alrededor del eje x para generar una superficie. Obtenga el área de la superficie.

81. Propiedad de reflexión de las parábolas En la figura se muestra un punto típico $P(x_0, y_0)$ en la parábola $y_z = 4px$. La recta L es tangente a la parábola en P. El foco de la parábola es $F(p, 0)$. El rayo L' que se extiende de P hacia la derecha es paralelo al eje x. Para comprobar que la luz que va de F a P se reflejará a lo largo de L', hay que demostrar que β es igual a α. Establezca esta igualdad realizando los siguientes pasos.

a) Demuestre que $\tan \beta = 2p/y_0$.

b) Demuestre que $\tan \phi = y_0/(x_0 - p)$.

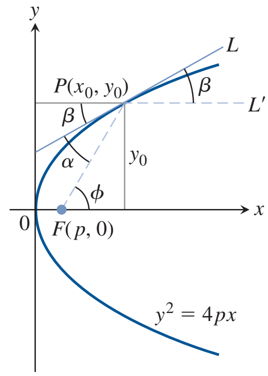
c) Emplee la identidad

$$\tan \alpha = \frac{\tan \phi - \tan \beta}{1 + \tan \phi \tan \beta}$$

para demostrar que $\tan \alpha = 2p/y_0$.

Puesto que α y β son agudos, $\tan \beta = \tan \alpha$ implica que $\beta = \alpha$.

Esta propiedad de reflexión de las parábolas se usa en aplicaciones como faros para automóviles, radiotelescopios y antenas satelitales de televisión.



11.7 Secciones cónicas en coordenadas polares

Las coordenadas polares son especialmente importantes en astronomía e ingeniería astronáutica porque las elipses, parábolas e hipérbolas que se obtienen como trayectorias del movimiento de satélites, lunas, planetas y cometas pueden describirse con una sola ecuación coordenada polar relativamente sencilla. Desarrollaremos aquí esa ecuación después de presentar el concepto de *excentricidad* de una sección cónica. La excentricidad revela el tipo de sección cónica (circunferencia, elipse, parábola o hipérbola) y el grado al cual se aplasta o aplana.

Excentricidad

Aun cuando la distancia c entre el centro y el foco no aparece en la ecuación cartesiana

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad (a > b)$$

de una elipse, podemos determinar c a partir de la ecuación $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Si fijamos a y variamos c sobre el intervalo $0 \le c \le a$, las elipses resultantes variarán de forma. Si $c = 0$, son circunferencias (pues $a = b$) y se aplanan, volviéndose oblongas, cuando c aumenta. Si $c = a$, los focos y vértices se traslapan y la elipse degenera en un segmento de recta. Ahora vamos a considerar la razón $e = c/a$. También usamos esta razón con las hipérbolas; sólo que en este caso, c es igual a $\sqrt{a^2 + b^2}$, y no a $\sqrt{a^2 - b^2}$. Definimos estas razones con el término *excentricidad.*

DEFINICIÓN

La **excentricidad** de la elipse $(x^2/a^2) + (y_2/b^2) = 1$ $(a > b)$ es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

La **excentricidad** de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ es

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

La **excentricidad** de una parábola es $e = 1$.

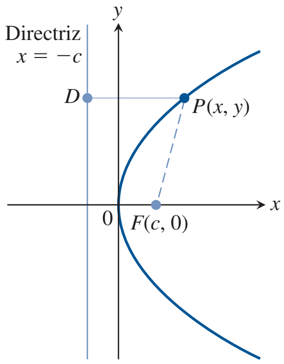


FIGURA 11.46 La distancia del foco F a cualquier punto P en una parábola es igual a la distancia de P al punto más cercano D en la directriz, de manera que $PF = PD$.

Mientras que una parábola tiene un foco y una directriz, cada **elipse** tiene dos focos y dos **directrices**. Éstas son las rectas perpendiculares al eje mayor a distancias $\pm a/e$ del centro. La parábola tiene la propiedad de que

$$PF = 1 \cdot PD \tag{1}$$

para cualquier punto P en ella, donde F es el foco y D es el punto más cercano a P en la directriz. Para una elipse, es posible demostrar que las ecuaciones que sustituyen a la ecuación (1) son

$$PF_1 = e \cdot PD_1, \qquad PF_2 = e \cdot PD_2. \tag{2}$$

Aquí, e es la excentricidad, P es cualquier punto en la elipse, F_1 y F_2 son los focos, y D_1 y D_2 son los puntos en las directrices más cercanos a P (figura 11.47).

En ambas ecuaciones (2) la directriz y el foco deben corresponder; es decir, si usamos la distancia de P a F_1, también debemos usar la distancia de P a la directriz del mismo extremo de la elipse. La directriz $x = -a/e$ corresponde a $F_1(-c, 0)$, y la directriz $x = a/e$ corresponde a $F_2(c, 0)$.

Al igual que en el caso de la elipse, es posible demostrar que las rectas $x = \pm a/e$ actúan como **directrices** de la **hipérbola** y que

$$PF_1 = e{\cdot}PD_1 \qquad \text{y} \qquad PF_2 = e \cdot PD_2. \tag{3}$$

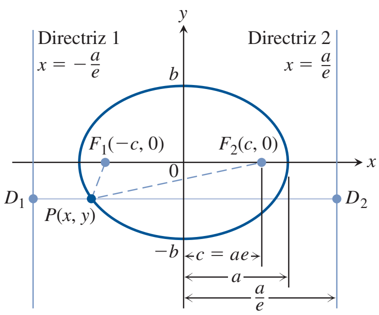


FIGURA 11.47 Focos y directrices de la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$. La directriz 1 corresponde al foco F_1, y la directriz 2 al foco F_2.

Aquí, P es cualquier punto en la hipérbola, F_1 y F_2 son los focos, y D_1 y D_2 son los puntos más cercanos a P en las directrices (figura 11.48).

Tanto en la elipse como en la hipérbola, la excentricidad es la razón de la distancia entre los focos y la distancia entre los vértices (porque $c/a = 2c/2a$).

$$\boxed{\text{Excentricidad} = \frac{\text{distancia entre los focos}}{\text{distancia entre los vértices}}}$$

En una elipse, los focos están más cerca entre sí que los vértices, y la razón es menor que 1. En una hipérbola, los focos están más lejos entre sí que los vértices, y la razón es mayor que 1.

La ecuación "foco-directriz" $PF = e \cdot PD$ unifica la parábola, la elipse y la hipérbola de la siguiente manera: suponga que la distancia PF entre un punto P y un punto fijo F (el foco) es un múltiplo constante de su distancia a una recta fija (la directriz). Es decir, suponga que

$$\boxed{PF = e \cdot PD,} \tag{4}$$

donde e es la constante de proporcionalidad. Así, la trayectoria seguida por P es

a) una *parábola* si $e = 1$,

b) una *elipse* de excentricidad e si $e < 1$ y

c) una *hipérbola* de excentricidad e si $e > 1$.

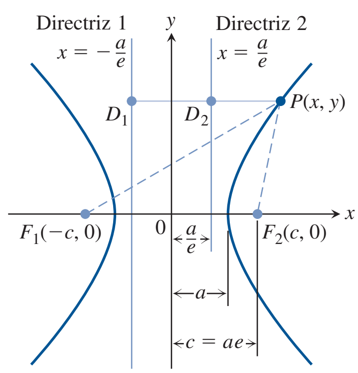


FIGURA 11.48 Focos y directrices de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$. Sin importar dónde esté P en la hipérbola, $PF_1 = e \cdot PD_1$ y $PF_2 = e \cdot PD_2$.

A medida que e aumenta ($e \to 1^-$), las elipses serán más oblongas, esto es, más alargadas horizontalmente, y cuando ($e \to \infty$) las hipérbolas se aplanan hacia las dos rectas paralelas a la directriz. No hay coordenadas en la ecuación (4) y, cuando tratamos de expresarla con coordenadas cartesianas, el resultado varía dependiendo de la magnitud de e. Sin embargo, como veremos, en coordenadas polares la ecuación $PF = e \cdot PD$ se traduce en una sola ecuación sin importar el valor de e.

Dados el foco y la directriz correspondiente de una hipérbola con centro en el origen y focos sobre el eje x, podemos usar las dimensiones que se especifican en la figura 11.48 para determinar e.

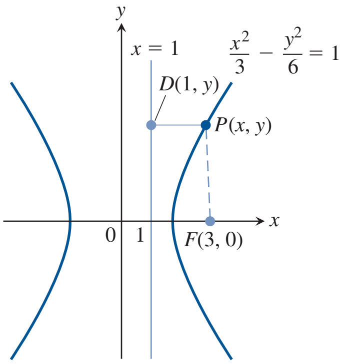


FIGURA 11.49 La hipérbola y directriz del ejemplo 1.

Al conocer e, podemos deducir la ecuación cartesiana para la hipérbola a partir de la ecuación $PF = e \cdot PD$, como en el siguiente ejemplo. Podemos encontrar las ecuaciones para elipses con centro en el origen y los focos en el eje x de un modo similar, por medio de las dimensiones que se muestran en la figura 11.47.

EJEMPLO 1 Determine la ecuación cartesiana para la hipérbola con centro en el origen que tiene un foco en (3, 0) y la recta $x = 1$ como la directriz correspondiente.

Solución Primero usamos las dimensiones mostradas en la figura 11.48 para determinar la excentricidad de la hipérbola. El foco es (vea la figura 11.49)

$$(c, 0) = (3, 0), \qquad \text{por lo que} \qquad c = 3.$$

De nuevo a partir de la figura 11.48, la directriz es la recta

$$x = \frac{a}{e} = 1, \qquad \text{por lo tanto,} \qquad a = e.$$

Cuando se combina con la ecuación $e = c/a$, que define la excentricidad, resulta

$$e = \frac{c}{a} = \frac{3}{e}, \qquad \text{de manera que} \quad e^2 = 3 \quad \text{y} \quad e = \sqrt{3}.$$

Conociendo e podemos deducir la ecuación que necesitamos a partir de la ecuación $PF = e \cdot PD$. En la notación de la figura 11.49, tenemos

$$\begin{aligned} PF &= e \cdot PD && \text{Ecuación (4)} \\ \sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} &= \sqrt{3}\,|x - 1| && e = \sqrt{3} \\ x^2 - 6x + 9 + y^2 &= 3(x^2 - 2x + 1) && \text{Eleve al cuadrado ambos lados.} \\ 2x^2 - y^2 &= 6 \\ \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} &= 1. \end{aligned}$$

■

Ecuaciones polares

Para obtener ecuaciones polares de elipses, parábolas e hipérbolas, colocamos un foco en el origen y la directriz correspondiente a la derecha del origen a lo largo de la recta vertical $x = k$ (figura 11.50). En coordenadas polares, esto hace que

$$PF = r$$

y

$$PD = k - FB = k - r\cos\theta.$$

La ecuación foco-directriz de la cónica $PF = e \cdot PD$ se convierte entonces en

$$r = e(k - r\cos\theta),$$

de la cual se puede despejar r para obtener la siguiente expresión.

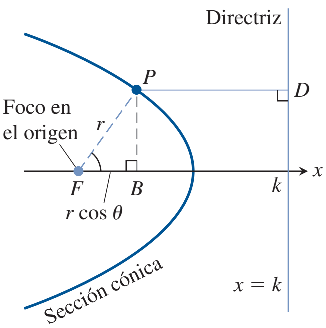


FIGURA 11.50 Si se coloca una sección cónica con su foco en el origen y la directriz perpendicular al rayo inicial y a la derecha del origen, podemos obtener su ecuación polar a partir de la ecuación foco-directriz de la cónica.

Ecuación polar de una cónica con excentricidad e

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta}, \tag{5}$$

donde $x = k > 0$ es la directriz vertical.

EJEMPLO 2 Tenemos aquí ecuaciones polares de tres cónicas. Los valores de la excentricidad que identifican a la cónica son los mismos tanto para las coordenadas polares como para las coordenadas cartesianas.

$$e = \frac{1}{2}: \quad \text{elipse} \qquad r = \frac{k}{2 + \cos\theta}$$

$$e = 1: \quad \text{parábola} \qquad r = \frac{k}{1 + \cos\theta}$$

$$e = 2: \quad \text{hipérbola} \qquad r = \frac{2k}{1 + 2\cos\theta}$$

■

Usted puede ver variaciones de la ecuación (5), dependiendo de la ubicación de la directriz. Si la directriz es la recta $x = -k$ a la izquierda del origen (el origen es un foco), sustituimos la ecuación (5) por

$$r = \frac{ke}{1 - e\cos\theta}.$$

Ahora, el denominador tiene un signo $-$ en vez de un $+$. Si la directriz es una de las rectas $y = k$ o $y = -k$, las ecuaciones tendrán funciones seno en vez de coseno, como se muestra en la figura 11.51.

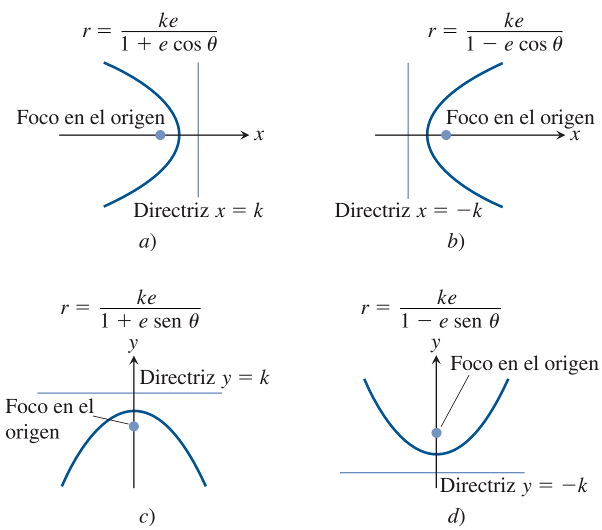


FIGURA 11.51 Ecuaciones para secciones cónicas con excentricidad $e > 0$, pero diferentes posiciones de la directriz. Las gráficas muestran una parábola, de manera que $e = 1$.

EJEMPLO 3 Obtenga la ecuación para la hipérbola con excentricidad $3/2$ y directriz $x = 2$.

Solución Usamos la ecuación (5) con $k = 2$ y $e = 3/2$:

$$r = \frac{2(3/2)}{1 + (3/2)\cos\theta} \quad \text{o} \quad r = \frac{6}{2 + 3\cos\theta}.$$

■

EJEMPLO 4 Obtenga la directriz de la parábola

$$r = \frac{25}{10 + 10\cos\theta}.$$

Solución Dividimos el numerador y el denominador entre 10 para dar a la ecuación la forma polar estándar:

$$r = \frac{5/2}{1 + \cos\theta}.$$

Ésta es la ecuación

$$r = \frac{ke}{1 + e\cos\theta},$$

donde $k = 5/2$ y $e = 1$. La ecuación para la directriz es $x = 5/2$. ■

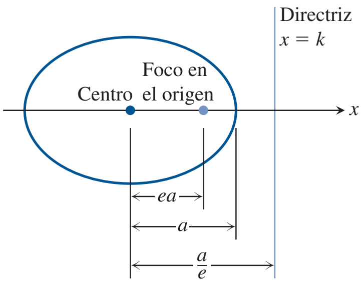


FIGURA 11.52 En una elipse con semieje mayor a, la distancia del foco a la directriz es $k = (a/e) - ea$, de manera que $ke = a(1 - e^2)$.

A partir del diagrama de la elipse de la figura 11.52, vemos que k está relacionada con la excentricidad e y el semieje mayor a por la ecuación

$$k = \frac{a}{e} - ea.$$

A partir de ésta podemos obtener $ke = a(1 - e^2)$. Sustituyendo ke en la ecuación (5) por $a(1 - e^2)$, encontramos la ecuación polar estándar de una elipse.

Ecuación polar de una elipse con excentricidad *e* y semieje mayor *a*

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta} \tag{6}$$

Observe que cuando $e = 0$, la ecuación (6) se convierte en $r = a$, lo cual representa una circunferencia.

Rectas

Supongamos que la perpendicular del origen a la recta L encuentra a L en el punto $P_0(r_0, \theta_0)$, con $r_0 \geq 0$ (figura 11.53). Entonces, si $P(r, \theta)$ es otro punto cualquiera sobre L, los puntos P, P_0 y O son los vértices de un triángulo rectángulo del cual podemos obtener la relación

$$r_0 = r\cos(\theta - \theta_0).$$

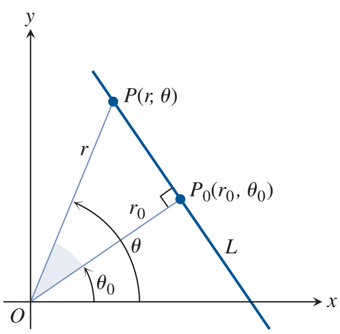


FIGURA 11.53 Podemos obtener una ecuación polar de la recta L interpretando la relación $r_0 = r\cos(\theta - \theta_0)$ en el triángulo rectángulo OP_0P.

La ecuación polar estándar para rectas

Si el punto $P_0(r_0, \theta_0)$ es el pie de la perpendicular del origen a la recta L y $r_0 \geq 0$, entonces, una ecuación para L es

$$r\cos(\theta - \theta_0) = r_0. \tag{7}$$

Por ejemplo, si $\theta_0 = \pi/3$ y $r_0 = 2$, encontramos que

$$r\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = 2$$

$$\frac{1}{2}r\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}r\operatorname{sen}\theta = 2, \qquad \text{o} \qquad x + \sqrt{3}y = 4.$$

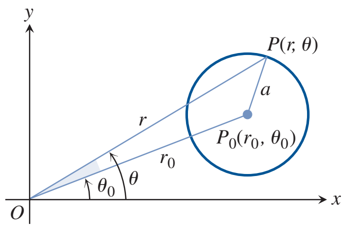


FIGURA 11.54 Podemos obtener la ecuación polar para esta circunferencia aplicando la ley de los cosenos al triángulo OP_0P.

Circunferencias

Para obtener la ecuación polar de una circunferencia de radio a con centro en $P_0(r_0, \theta_0)$, consideramos que $P(r, \theta)$ es un punto sobre la circunferencia y aplicamos la ley de los cosenos al triángulo OP_0P (figura 11.54). Esto da

$$a^2 = r_0{}^2 + r^2 - 2r_0 r \cos(\theta - \theta_0).$$

Si la circunferencia pasa por el origen, entonces, $r_0 = a$ y esta ecuación se simplifica a

$$\begin{aligned} a^2 &= a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_0) \\ r^2 &= 2ar\cos(\theta - \theta_0) \\ r &= 2a\cos(\theta - \theta_0). \end{aligned}$$

Si el centro de la circunferencia se encuentra sobre la parte positiva del eje x, $\theta_0 = 0$ y obtenemos una mayor simplificación

$$r = 2a\cos\theta. \tag{8}$$

Si el centro de la circunferencia se encuentra sobre la parte positiva del eje y, $\theta = \pi/2$, $\cos(\theta - \pi/2) = \operatorname{sen}\theta$, y la ecuación $r = 2a\cos(\theta - \theta_0)$ se convierte en

$$r = 2a\operatorname{sen}\theta. \tag{9}$$

Las ecuaciones para circunferencias que pasen por el origen con centros sobre la parte negativa de los ejes x y y se pueden obtener sustituyendo r por $-r$ en las ecuaciones anteriores.

EJEMPLO 5 Aquí hay varias ecuaciones polares dadas por las ecuaciones (8) y (9) para circunferencias que pasan por el origen y tienen sus centros sobre los ejes x o y.

Radio	Centro (coordenadas polares)	Ecuación polar
3	$(3, 0)$	$r = 6\cos\theta$
2	$(2, \pi/2)$	$r = 4\operatorname{sen}\theta$
$1/2$	$(-1/2, 0)$	$r = -\cos\theta$
1	$(-1, \pi/2)$	$r = -2\operatorname{sen}\theta$

■

Ejercicios 11.7

Elipses y excentricidad

En los ejercicios 1 a 8, determine la excentricidad de la elipse. Luego, encuentre y grafique los focos y las directrices de la elipse.

1. $16x^2 + 25y^2 = 400$
2. $7x^2 + 16y^2 = 112$
3. $2x^2 + y^2 = 2$
4. $2x^2 + y^2 = 4$
5. $3x^2 + 2y^2 = 6$
6. $9x^2 + 10y^2 = 90$
7. $6x^2 + 9y^2 = 54$
8. $169x^2 + 25y^2 = 4225$

En los ejercicios 9 a 12 se indican los focos o vértices y las excentricidades de elipses con centro en el origen del plano xy. En cada caso, determine la ecuación estándar de la elipse en coordenadas cartesianas.

9. Focos: $(0, \pm 3)$
Excentricidad: 0.5

10. Focos: $(\pm 8, 0)$
Excentricidad: 0.2

11. Vértices: $(0, \pm 70)$
Excentricidad: 0.1

12. Vértices: $(\pm 10, 0)$
Excentricidad: 0.24

En los ejercicios 13 a 16 se indican los focos y las directrices correspondientes de elipses centradas en el origen del plano xy. En cada caso, considere las dimensiones de la figura 11.47 para encontrar la excentricidad de la elipse. Luego, determine la ecuación estándar de la elipse en coordenadas cartesianas.

13. Foco: $(\sqrt{5}, 0)$
Directriz: $x = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$

14. Foco: $(4, 0)$
Directriz: $x = \dfrac{16}{3}$

15. Foco: $(-4, 0)$
Directriz: $x = -16$

16. Foco: $(-\sqrt{2}, 0)$
Directriz: $x = -2\sqrt{2}$

Hipérbolas y excentricidad

En los ejercicios 17 a 24, determine la excentricidad de la hipérbola. Luego, encuentre y grafique los focos y las directrices de la hipérbola.

17. $x^2 - y^2 = 1$ **18.** $9x^2 - 16y^2 = 144$

19. $y^2 - x^2 = 8$ **20.** $y^2 - x^2 = 4$

21. $8x^2 - 2y^2 = 16$ **22.** $y^2 - 3x^2 = 3$

23. $8y^2 - 2x^2 = 16$ **24.** $64x^2 - 36y^2 = 2304$

En los ejercicios 25 a 28 se indican las excentricidades y los vértices o focos de hipérbolas con centro en el origen del plano xy. En cada caso, determine la ecuación estándar de la hipérbola en coordenadas cartesianas.

25. Excentricidad: 3
Vértices: $(0, \pm 1)$

26. Excentricidad: 2
Vértices: $(\pm 2, 0)$

27. Excentricidad: 3
Focos: $(\pm 3, 0)$

28. Excentricidad: 1.25
Focos: $(0, \pm 5)$

Excentricidad y directrices

En los ejercicios 29 a 36 se indican las excentricidades de secciones cónicas con un foco en el origen junto con la directriz correspondiente a ese foco. Obtenga la ecuación polar de cada sección cónica.

29. $e = 1, \quad x = 2$ **30.** $e = 1, \quad y = 2$

31. $e = 5, \quad y = -6$ **32.** $e = 2, \quad x = 4$

33. $e = 1/2, \quad x = 1$ **34.** $e = 1/4, \quad x = -2$

35. $e = 1/5, \quad y = -10$ **36.** $e = 1/3, \quad y = 6$

Parábolas y elipses

Trace las parábolas y las elipses de los ejercicios 37 a 44. Incluya la directriz que corresponde al foco en el origen. Marque los vértices con las coordenadas polares adecuadas y marque también los centros de las elipses.

37. $r = \dfrac{1}{1 + \cos\theta}$ **38.** $r = \dfrac{6}{2 + \cos\theta}$

39. $r = \dfrac{25}{10 - 5\cos\theta}$ **40.** $r = \dfrac{4}{2 - 2\cos\theta}$

41. $r = \dfrac{400}{16 + 8\,\text{sen}\,\theta}$ **42.** $r = \dfrac{12}{3 + 3\,\text{sen}\,\theta}$

43. $r = \dfrac{8}{2 - 2\,\text{sen}\,\theta}$ **44.** $r = \dfrac{4}{2 - \text{sen}\,\theta}$

Rectas

Dibuje las rectas de los ejercicios 45 a 48 y encuentre las ecuaciones cartesianas correspondientes.

45. $r\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ **46.** $r\cos\left(\theta + \dfrac{3\pi}{4}\right) = 1$

47. $r\cos\left(\theta - \dfrac{2\pi}{3}\right) = 3$ **48.** $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2$

Obtenga la ecuación polar de la forma $r\cos(\theta - \theta_0) = r_0$ para cada una de las rectas de los ejercicios 49 a 52.

49. $\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 6$ **50.** $\sqrt{3}x - y = 1$

51. $y = -5$ **52.** $x = -4$

Circunferencias

Trace las circunferencias de los ejercicios 53 a 56. Obtenga las coordenadas polares de sus centros e identifique sus radios.

53. $r = 4\cos\theta$ **54.** $r = 6\,\text{sen}\,\theta$

55. $r = -2\cos\theta$ **56.** $r = -8\,\text{sen}\,\theta$

Obtenga las ecuaciones polares de las circunferencias en los ejercicios 57 a 64. Trace todas las circunferencias en el plano de coordenadas y anote junto a ellas tanto sus ecuaciones cartesianas como las polares.

57. $(x - 6)^2 + y^2 = 36$ **58.** $(x + 2)^2 + y^2 = 4$

59. $x^2 + (y - 5)^2 = 25$ **60.** $x^2 + (y + 7)^2 = 49$

61. $x^2 + 2x + y^2 = 0$ **62.** $x^2 - 16x + y^2 = 0$

63. $x^2 + y^2 + y = 0$ **64.** $x^2 + y^2 - \dfrac{4}{3}y = 0$

Ejemplos de ecuaciones polares

T Grafique las rectas y secciones cónicas de los ejercicios 65 a 74.

65. $r = 3\sec(\theta - \pi/3)$ **66.** $r = 4\sec(\theta + \pi/6)$

67. $r = 4\,\text{sen}\,\theta$ **68.** $r = -2\cos\theta$

69. $r = 8/(4 + \cos\theta)$ **70.** $r = 8/(4 + \text{sen}\,\theta)$

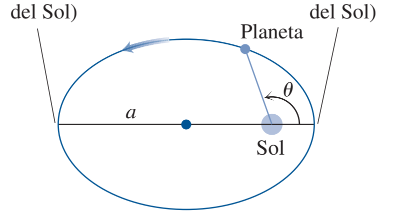
71. $r = 1/(1 - \text{sen}\,\theta)$ **72.** $r = 1/(1 + \cos\theta)$

73. $r = 1/(1 + 2\,\text{sen}\,\theta)$ **74.** $r = 1/(1 + 2\cos\theta)$

75. Perihelio y afelio Un planeta viaja alrededor de su sol en una trayectoria elíptica cuyo semieje mayor tiene una longitud a. (Vea la figura más adelante).

***a*)** Demuestre que $r = a(1 - e)$ cuando el planeta está más cerca del sol y que $r = a(1 + e)$ cuando está más lejos del sol.

***b*)** Considere los datos de la tabla del ejercicio 76 para encontrar qué tan cerca pasa del Sol cada planeta de nuestro Sistema Solar, y qué tanto se aleja de él.



76. Órbitas planetarias Considere los datos de la siguiente tabla y la ecuación (6) para obtener las ecuaciones polares de las órbitas de los planetas.

Planeta	Semieje mayor (unidades astronómicas)	Excentricidad
Mercurio	0.3871	0.2056
Venus	0.7233	0.0068
Tierra	1.000	0.0167
Marte	1.524	0.0934
Júpiter	5.203	0.0484
Saturno	9.539	0.0543
Urano	19.18	0.0460
Neptuno	30.06	0.0082

Capítulo 11 Preguntas de repaso

1. ¿Qué es una parametrización de una curva en el plano xy? ¿Una función $y = f(x)$ siempre tiene parametrización? ¿Son únicas las parametrizaciones de una curva? Dé ejemplos.
2. Indique algunas parametrizaciones típicas de rectas, circunferencias, parábolas, elipses e hipérbolas. ¿Cómo podría diferir la curva parametrizada de la gráfica de su ecuación cartesiana?
3. ¿Qué es una cicloide? ¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas típicas de las cicloides? ¿Qué propiedades físicas hacen importantes a las cicloides?
4. ¿Cuál es la fórmula de la pendiente dy/dx de una curva parametrizada $x = f(t)$, $y = g(t)$? ¿Cuándo se aplica la fórmula? ¿Cuándo se espera encontrar d^2y/dx^2 también? Dé ejemplos.
5. ¿Cómo puede encontrar el área acotada por una curva parametrizada y uno de los ejes de coordenadas?
6. ¿Cómo se obtiene la longitud de una curva parametrizada suave $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$? ¿Qué tiene que ver la suavidad con la longitud? ¿Qué más necesita saber acerca de la parametrización para obtener la longitud de la curva? Dé ejemplos.
7. ¿Cuál es la función de longitud de arco para una curva parametrizada suave? ¿Cuál es su diferencial de longitud de arco?
8. ¿En qué condiciones puede encontrar el área de la superficie generada por la rotación de una curva $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, alrededor del eje x? ¿Y alrededor del eje y? Dé ejemplos.
9. ¿Qué son las coordenadas polares? ¿Cuáles ecuaciones relacionan las coordenadas polares con las coordenadas cartesianas? ¿Por qué desearía cambiar de un sistema de coordenadas al otro?
10. ¿Qué consecuencias tiene la falta de unicidad de las coordenadas polares para graficar? Dé un ejemplo.
11. ¿Cómo grafica las ecuaciones en coordenadas polares? Incluya en su explicación la simetría, la pendiente, el comportamiento en el origen y el uso de gráficas cartesianas. Dé ejemplos.
12. ¿Cómo obtiene el área de una región $0 \leq r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, en el plano de coordenadas polares? Dé ejemplos.
13. ¿En qué condiciones puede encontrar la longitud de una curva $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, en el plano de coordenadas polares? Dé el ejemplo de un cálculo típico.
14. ¿Qué es una parábola? ¿Cuáles son las ecuaciones cartesianas de las parábolas cuyos vértices se encuentran en el origen y sus focos están en los ejes de coordenadas? ¿Cómo puede encontrar el foco y la directriz de tal parábola a partir de su ecuación?
15. ¿Qué es una elipse? ¿Cuáles son las ecuaciones cartesianas de las elipses con centro en el origen y focos en uno de los ejes de coordenadas? ¿Cómo obtendría los focos, los vértices y las directrices de tales elipses a partir de su ecuación?
16. ¿Qué es una hipérbola? ¿Cuáles son las ecuaciones cartesianas de las hipérbolas con centro en el origen y focos en uno de los ejes de coordenadas? ¿Cómo obtendría los focos, los vértices y las directrices de tales hipérbolas a partir de su ecuación?
17. ¿Qué es la excentricidad de una sección cónica? ¿Cómo clasificaría las cónicas de acuerdo con su excentricidad? ¿Cómo cambia la excentricidad con la forma de las elipses y las hipérbolas?
18. Explique la ecuación $PF = e \cdot PD$.
19. ¿Cuáles son las ecuaciones estándar para rectas y secciones cónicas en coordenadas polares? Dé ejemplos.

Capítulo 11 Ejercicios de práctica

Identificación de ecuaciones paramétricas en el plano

En los ejercicios 1 a 6 se incluyen las ecuaciones paramétricas y los intervalos del parámetro para el movimiento de una partícula en el plano xy. Identifique la trayectoria de la partícula, obteniendo para ello una ecuación cartesiana. Grafique la ecuación cartesiana e indique la dirección del movimiento y la parte de la trayectoria trazada por la partícula.

1. $x = t/2, \quad y = t + 1; \quad -\infty < t < \infty$
2. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - \sqrt{t}; \quad t \geq 0$
3. $x = (1/2) \tan t, \quad y = (1/2) \sec t; \quad -\pi/2 < t < \pi/2$
4. $x = -2 \cos t, \quad y = 2 \operatorname{sen} t; \quad 0 \leq t \leq \pi$
5. $x = -\cos t, \quad y = \cos^2 t; \quad 0 \leq t \leq \pi$
6. $x = 4 \cos t, \quad y = 9 \operatorname{sen} t; \quad 0 \leq t \leq 2\pi$

Obtención de ecuaciones paramétricas y rectas tangentes

7. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del movimiento de una partícula en el plano xy que traza la elipse $16x^2 + 9y^2 = 144$ una sola vez en sentido contrario al de las manecillas del reloj. (Hay muchas maneras de lograrlo).
8. Obtenga las ecuaciones paramétricas y el intervalo del parámetro del desplazamiento de una partícula que inicia en el punto $(-2, 0)$ en el plano xy y traza la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ tres veces en el sentido de las manecillas del reloj. (Hay muchas maneras de lograrlo).

En los ejercicios 9 y 10, determine la ecuación para la recta en el plano xy que es tangente a una curva en el punto correspondiente al valor dado de t. También determine el valor de d^2y/dx^2 en ese punto.

9. $x = (1/2) \tan t, \quad y = (1/2) \sec t; \quad t = \pi/3$
10. $x = 1 + 1/t^2, \quad y = 1 - 3/t; \quad t = 2$
11. Elimine el parámetro para expresar la curva en la forma $y = f(x)$.
    a) $x = 4t^2, \quad y = t^3 - 1$
    b) $x = \cos t, \quad y = \tan t$
12. Obtenga las ecuaciones paramétricas de las siguientes curvas.
    a) Recta que pasa por $(1, -2)$ con pendiente 3
    b) $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$
    c) $y = 4x^2 - x$
    d) $9x^2 + 4y^2 = 36$

Longitudes de curvas

Obtenga las longitudes de las curvas de los ejercicios 13 a 19.

13. $y = x^{1/2} - (1/3)x^{3/2}, \quad 1 \le x \le 4$

14. $x = y^{2/3}, \quad 1 \le y \le 8$

15. $y = (5/12)x^{6/5} - (5/8)x^{4/5}, \quad 1 \le x \le 32$

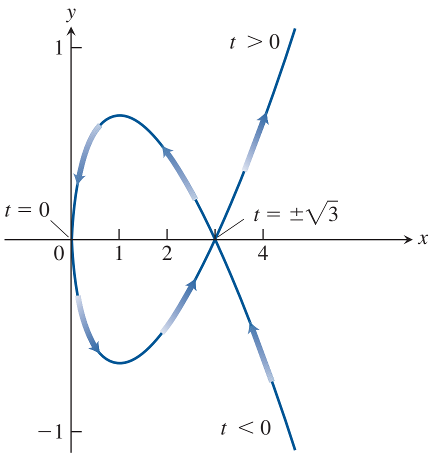
16. $x = \left(y^3/12\right) + (1/y), \quad 1 \le y \le 2$

17. $x = 5\cos t - \cos 5t, \quad y = 5\,\text{sen}\, t - \text{sen}\, 5t, \quad 0 \le t \le \pi/2$

18. $x = t^3 - 6t^2, \quad y = t^3 + 6t^2, \quad 0 \le t \le 1$

19. $x = 3\cos\theta, \quad y = 3\,\text{sen}\,\theta, \quad 0 \le \theta \le \dfrac{3\pi}{2}$

20. Obtenga la longitud del lazo acotado por $x = t^2$, $y = (t^3/3) - t$ que se muestra en la figura. El lazo inicia en $t = -\sqrt{3}$ y termina en $t = \sqrt{3}$.



Áreas de superficies

Obtenga las áreas de las superficies generadas por la rotación de las curvas de los ejemplos 21 y 22 alrededor de los ejes indicados.

21. $x = t^2/2, \quad y = 2t, \quad 0 \le t \le \sqrt{5}; \quad$ eje x

22. $x = t^2 + 1/(2t), \quad y = 4\sqrt{t}, \quad 1/\sqrt{2} \le t \le 1; \quad$ eje y

Conversión de ecuaciones polares a cartesianas

Trace las rectas de los ejercicios 23 a 28. También determine la ecuación cartesiana para cada recta.

23. $r\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\sqrt{3}$

24. $r\cos\left(\theta - \dfrac{3\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

25. $r = 2\sec\theta$

26. $r = -\sqrt{2}\sec\theta$

27. $r = -(3/2)\csc\theta$

28. $r = \left(3\sqrt{3}\right)\csc\theta$

Determine las ecuaciones cartesianas de las circunferencias de los ejercicios 29 a 32. Trace cada circunferencia en el plano de coordenadas y anote sus ecuaciones cartesiana y polar.

29. $r = -4\,\text{sen}\,\theta$

30. $r = 3\sqrt{3}\,\text{sen}\,\theta$

31. $r = 2\sqrt{2}\cos\theta$

32. $r = -6\cos\theta$

Conversión de ecuaciones cartesianas a polares

Obtenga las ecuaciones polares de las circunferencias de los ejercicios 33 a 36. Trace cada circunferencia en el plano de coordenadas y anote sus ecuaciones cartesiana y polar.

33. $x^2 + y^2 + 5y = 0$

34. $x^2 + y^2 - 2y = 0$

35. $x^2 + y^2 - 3x = 0$

36. $x^2 + y^2 + 4x = 0$

Gráficas en coordenadas polares

Grafique las regiones definidas por las desigualdades en coordenadas polares de los ejercicios 37 y 38.

37. $0 \le r \le 6\cos\theta$

38. $-4\,\text{sen}\,\theta \le r \le 0$

Relacione cada gráfica de los ejercicios 39 a 46 con la ecuación adecuada eligiendo entre los incisos *a*) a *l*). Hay más ecuaciones que gráficas, de manera que algunas ecuaciones no tendrán gráfica correspondiente.

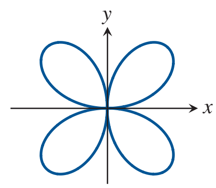
***a*)** $r = \cos 2\theta$ ***b*)** $r\cos\theta = 1$ ***c*)** $r = \dfrac{6}{1 - 2\cos\theta}$

***d*)** $r = \text{sen}\, 2\theta$ ***e*)** $r = \theta$ ***f*)** $r^2 = \cos 2\theta$

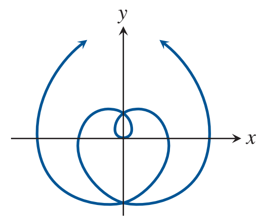
***g*)** $r = 1 + \cos\theta$ ***h*)** $r = 1 - \text{sen}\,\theta$ ***i*)** $r = \dfrac{2}{1 - \cos\theta}$

***j*)** $r^2 = \text{sen}\, 2\theta$ ***k*)** $r = -\text{sen}\,\theta$ ***l*)** $r = 2\cos\theta + 1$

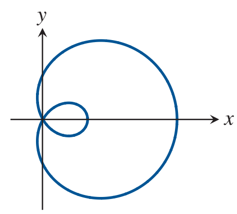
39. Rosa de cuatro pétalos



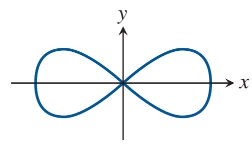
40. Espiral



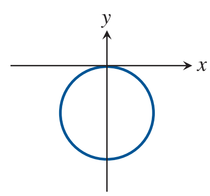
41. Limaçon



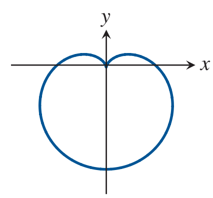
42. Lemniscata



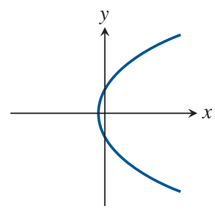
43. Circunferencia



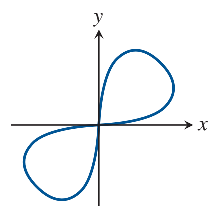
44. Cardioide



45. Parábola



46. Lemniscata



Área en coordenadas polares

Determine las áreas de las regiones en el plano de coordenadas polares descritas en los ejercicios 47 a 50.

47. Región acotada por el limaçon $r = 2 - \cos\theta$

48. Región acotada por un pétalo de la rosa de tres pétalos $r = \text{sen}\, 3\theta$

49. Región dentro de la “figura de un ocho” $r = 1 + \cos 2\theta$ y afuera de la circunferencia $r = 1$

50. Región dentro de la cardioide $r = 2(1 + \text{sen}\,\theta)$ y afuera de la circunferencia $r = 2\,\text{sen}\,\theta$

Longitud en coordenadas polares

Obtenga las longitudes de las curvas dadas por las ecuaciones en coordenadas polares de los ejercicios 51 a 54.

51. $r = -1 + \cos\theta$

52. $r = 2\,\text{sen}\,\theta + 2\cos\theta, \quad 0 \le \theta \le \pi/2$

53. $r = 8\,\text{sen}^3(\theta/3), \quad 0 \le \theta \le \pi/4$

54. $r = \sqrt{1 + \cos 2\theta}, \quad -\pi/2 \le \theta \le \pi/2$

Gráficas de secciones cónicas

Trace las parábolas de los ejercicios 55 a 58. Incluya el foco y la directriz en todos los dibujos.

55. $x^2 = -4y$ **56.** $x^2 = 2y$

57. $y^2 = 3x$ **58.** $y^2 = -(8/3)x$

Determine las excentricidades de las elipses e hipérbolas de los ejercicios 59 a 62. Dibuje cada sección cónica. Incluya los focos, los vértices y las asíntotas (cuando sea adecuado) en su dibujo.

59. $16x^2 + 7y^2 = 112$ **60.** $x^2 + 2y^2 = 4$

61. $3x^2 - y^2 = 3$ **62.** $5y^2 - 4x^2 = 20$

En los ejercicios 63 a 68 se presentan ecuaciones para secciones cónicas y se indican las unidades que se desplaza la curva hacia arriba o hacia abajo y a la izquierda o a la derecha. Determine la ecuación para la nueva sección cónica y determine los focos, los vértices, los centros y las asíntotas nuevos, cuando sea pertinente. Si la curva es una parábola, determine también la nueva directriz.

63. $x^2 = -12y$, derecha 2, arriba 3

64. $y^2 = 10x$, izquierda 1/2, abajo 1

65. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$, izquierda 3, abajo 5

66. $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{144} = 1$, derecha 5, arriba 12

67. $\dfrac{y^2}{8} - \dfrac{x^2}{2} = 1$, derecha 2, arriba $2\sqrt{2}$

68. $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$, izquierda 10, abajo 3

Identificación de secciones cónicas

Complete los cuadrados para identificar las secciones cónicas en los ejercicios 69 a 76. Obtenga los focos, los vértices, los centros y las asíntotas (cuando sea pertinente). Si la curva es una parábola, determine también la nueva directriz.

69. $x^2 - 4x - 4y^2 = 0$ **70.** $4x^2 - y^2 + 4y = 8$

71. $y^2 - 2y + 16x = -49$ **72.** $x^2 - 2x + 8y = -17$

73. $9x^2 + 16y^2 + 54x - 64y = -1$

74. $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y = 44$

75. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ **76.** $x^2 + y^2 + 4x + 2y = 1$

Cónicas en coordenadas polares

Grafique las secciones cónicas cuyas ecuaciones en coordenadas polares se indican en los ejercicios 77 a 80. Dé las coordenadas polares de los vértices y, en el caso de las elipses, también de los centros.

77. $r = \dfrac{2}{1 + \cos\theta}$ **78.** $r = \dfrac{8}{2 + \cos\theta}$

79. $r = \dfrac{6}{1 - 2\cos\theta}$ **80.** $r = \dfrac{12}{3 + \text{sen}\,\theta}$

En los ejercicios 81 a 84 se indican las excentricidades de secciones cónicas con un foco en el origen del plano de coordenadas polares, junto con la directriz para ese foco. Obtenga una ecuación polar para cada sección cónica.

81. $e = 2, \quad r\cos\theta = 2$

82. $e = 1, \quad r\cos\theta = -4$

83. $e = 1/2, \quad r\,\text{sen}\,\theta = 2$

84. $e = 1/3, \quad r\,\text{sen}\,\theta = -6$

Teoría y ejemplos

85. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar la región acotada por la elipse $9x^2 + 4y^2 = 36$ alrededor del ***a***) eje x, ***b***) eje y.

86. La región “triangular” en el primer cuadrante acotada por el eje x, la recta $x = 4$ y la hipérbola $9x^2 - 4y^2 = 36$ se hace girar alrededor del eje x para generar un sólido. Obtenga el volumen del sólido.

87. Demuestre que las ecuaciones $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$ transforman la ecuación polar

$$r = \frac{k}{1 + e\cos\theta}$$

en la ecuación cartesiana

$$(1 - e^2)x^2 + y^2 + 2kex - k^2 = 0.$$

88. Espirales de Arquímedes La gráfica de una ecuación de la forma $r = a\theta$, donde a es una constante diferente de cero, se denomina *espiral de Arquímedes*. ¿Existe algo especial acerca del ancho de las vueltas sucesivas de una espiral?

Capítulo 11 Ejercicios adicionales y avanzados

Determinación de secciones cónicas

1. Determine la ecuación para la parábola con foco en (4, 0) y directriz $x = 3$. Trace la parábola junto con su vértice, foco y directriz.

2. Obtenga el foco, el vértice y la directriz de la parábola

$$x^2 - 6x - 12y + 9 = 0.$$

3. Determine la ecuación para la curva que traza el punto $P(x, y)$ si la distancia de P al vértice de la parábola $x^2 = 4y$ es el doble de la distancia de P al foco. Identifique la curva.

4. Un segmento de recta de longitud $a + b$ va del eje x al eje y. El punto P en el segmento está a a unidades de uno de los extremos y a b unidades del otro extremo. Demuestre que P traza una elipse cuando los extremos del segmento se deslizan a lo largo de los ejes.

5. Los vértices de una elipse de excentricidad 0.5 se localizan en los puntos $(0, \pm 2)$. ¿Dónde se encuentran los focos?

6. Obtenga la ecuación para la elipse de excentricidad $2/3$ que tiene a la recta $x = 2$ como una directriz y el punto (4, 0) como el foco correspondiente.

7. El foco de una hipérbola se localiza en el punto $(0, -7)$ y la directriz correspondiente es la recta $y = -1$. Determine la ecuación para la hipérbola si su excentricidad es ***a)*** 2, ***b)*** 5.

8. Obtenga una ecuación para la hipérbola con focos en $(0, -2)$ y $(0, 2)$ que pasa por el punto $(12, 7)$.

9. Demuestre que la recta

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 - a^2b^2 = 0$$

es tangente a la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ en el punto (x_1, y_1) en la elipse.

10. Demuestre que la recta

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 - a^2b^2 = 0$$

es tangente a la hipérbola $b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$ en el punto (x_1, y_1) en la hipérbola.

Ecuaciones y desigualdades

¿Qué puntos en el plano xy satisfacen las ecuaciones y desigualdades en los ejercicios 11 a 16? Dibuje una figura para cada ejercicio.

11. $(x^2 - y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 25)(x^2 + 4y^2 - 4) = 0$

12. $(x + y)(x^2 + y^2 - 1) = 0$

13. $(x^2/9) + (y^2/16) \leq 1$

14. $(x^2/9) - (y^2/16) \leq 1$

15. $(9x^2 + 4y^2 - 36)(4x^2 + 9y^2 - 16) \leq 0$

16. $(9x^2 + 4y^2 - 36)(4x^2 + 9y^2 - 16) > 0$

Coordenadas polares

17. ***a)*** Obtenga la ecuación en coordenadas polares para la curva

$$x = e^{2t}\cos t, \quad y = e^{2t}\operatorname{sen} t; \quad -\infty < t < \infty.$$

b) Determine la longitud de la curva de $t = 0$ a $t = 2\pi$.

18. Obtenga la longitud de la curva $r = 2\operatorname{sen}^3(\theta/3)$, $0 \leq \theta \leq 3\pi$, en el plano de coordenadas polares.

En los ejercicios 19 a 22 se indican las excentricidades de secciones cónicas con un foco en el origen del plano de coordenadas polares, junto con la directriz de ese foco. Obtenga la ecuación polar para cada sección cónica.

19. $e = 2, \quad r\cos\theta = 2$

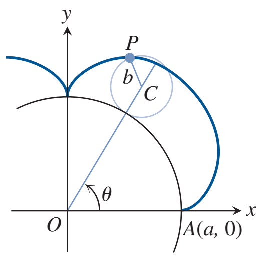
20. $e = 1, \quad r\cos\theta = -4$

21. $e = 1/2, \quad r\operatorname{sen}\theta = 2$

22. $e = 1/3, \quad r\operatorname{sen}\theta = -6$

Teoría y ejemplos

23. Epicicloides Cuando un círculo rueda por fuera, a lo largo de una circunferencia de otro círculo fijo, cualquier punto P sobre la circunferencia del círculo que rueda describe una *epicicloide*, como se muestra en la figura. Suponga que el centro del círculo fijo es el origen O y que su radio es a.



Sea b el radio del círculo rodante y sea $A(a, 0)$ la posición inicial del punto P que traza la curva. Determine las ecuaciones paramétricas de la epicicloide, usando como parámetro el ángulo θ que forma el eje x positivo con la recta que pasa por los centros de los círculos.

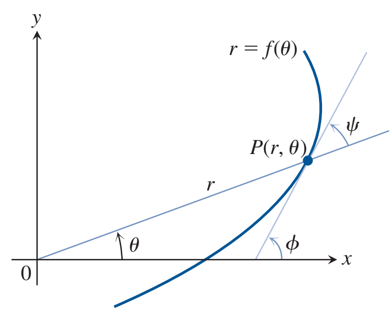
24. Obtenga el centroide de la región acotada por el eje x y el arco de la cicloide

$$x = a(t - \operatorname{sen} t), \quad y = a(1 - \cos t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

El ángulo entre el radio vector y la recta tangente a una curva de coordenadas polares En coordenadas cartesianas, cuando queremos analizar la dirección de una curva en un punto, usamos el ángulo θ medido en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde la parte positiva del eje x hasta la recta tangente. En coordenadas polares, es más conveniente calcular el ángulo ψ del *radio vector* a la recta tangente (vea la siguiente figura). El ángulo ϕ se puede calcular entonces a partir de la relación

$$\phi = \theta + \psi, \tag{1}$$

la cual obtenemos de la aplicación del teorema del ángulo exterior al triángulo de la figura



Suponga que la ecuación para la curva está dada en la forma $r = f(\theta)$, donde $f(\theta)$ es una función derivable de θ. Entonces,

$$x = r\cos\theta \quad \text{y} \quad y = r\operatorname{sen}\theta \tag{2}$$

son funciones derivables de θ con

$$\frac{dx}{d\theta} = -r\operatorname{sen}\theta + \cos\theta\frac{dr}{d\theta},$$

$$\frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\frac{dr}{d\theta}. \tag{3}$$

Puesto que $\psi = \phi - \theta$ de la ecuación (1),

$$\tan\psi = \tan(\phi - \theta) = \frac{\tan\phi - \tan\theta}{1 + \tan\phi\tan\theta}.$$

Además,

$$\tan\phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

debido a que $\tan\phi$ es la pendiente de la curva en P. También,

$$\tan\theta = \frac{y}{x}.$$

De ahí que

$$\tan\psi = \frac{\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta} - \dfrac{y}{x}}{1 + \dfrac{y}{x}\dfrac{dy/d\theta}{dx/d\theta}} = \frac{x\dfrac{dy}{d\theta} - y\dfrac{dx}{d\theta}}{x\dfrac{dx}{d\theta} + y\dfrac{dy}{d\theta}}. \tag{4}$$

El numerador de la última expresión en la ecuación (4) se obtiene de las ecuaciones (2) y (3)

$$x\frac{dy}{d\theta} - y\frac{dx}{d\theta} = r^2.$$

De manera similar, el denominador es

$$x\frac{dx}{d\theta} + y\frac{dy}{d\theta} = r\frac{dr}{d\theta}.$$

Cuando sustituimos estas ecuaciones en la ecuación (4), obtenemos

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta}. \qquad (5)$$

Ésta es la ecuación que usamos para obtener ψ como una función de θ.

25. Tomando como referencia la figura, demuestre que el ángulo β entre las tangentes de dos curvas en el punto de intersección se puede obtener de la fórmula

$$\tan\beta = \frac{\tan\psi_2 - \tan\psi_1}{1 + \tan\psi_2\tan\psi_1}. \qquad (6)$$

¿Cuándo se cruzan las dos curvas en ángulos rectos?

26. Obtenga el valor de la tangente de ψ para la curva $r = \operatorname{sen}^4(\theta/4)$.

27. Obtenga el ángulo entre el radio vector a la curva $r = 2a \operatorname{sen} 3\theta$ y su tangente cuando $\theta = \pi/6$.

T **28.** ***a***) Grafique la espiral hiperbólica $r\theta = 1$. ¿Qué parece ocurrirle a ψ cuando la espiral da vuelta alrededor del origen?

b) Confirme su descubrimiento del inciso *a*) de manera analítica.

29. Las circunferencias $r = \sqrt{3}\cos\theta$ y $r = \operatorname{sen}\theta$ se intersecan en el punto $(\sqrt{3}/2, \pi/3)$. Demuestre que sus tangentes son perpendiculares en este punto.

30. Obtenga el ángulo en el cual la cardioide $r = a(1 - \cos\theta)$ cruza el rayo $\theta = \pi/2$.

Capítulo 11 Proyectos de aplicación tecnológica

Módulos Mathematica/Maple

Rastreo por radar de un objeto en movimiento

Parte I: Convierta de coordenadas polares a coordenadas cartesianas.

Ecuaciones paramétricas y polares de un patinador artístico

Parte I: Visualice posición, velocidad y aceleración para analizar el movimiento definido por medio de ecuaciones paramétricas.

Parte II: Determine y analice las ecuaciones de movimiento de un patinador artístico que traza una curva polar.