10 Límites y continuidad

10.1 Límites

10.2 Límites (*continuación*)

10.3 Continuidad

10.4 Continuidad aplicada a desigualdades

Repaso del capítulo 10

EXPLORE Y AMPLÍE
Deuda nacional

El filósofo Zenón de Elea era aficionado a las paradojas acerca del movimiento, la más famosa de las cuales iba más o menos así: el guerrero Aquiles acepta competir en una carrera contra una tortuga. Aquiles puede correr 10 metros por segundo y la tortuga sólo 1 metro por segundo, por eso a la tortuga se le da una ventaja de 10 metros desde la línea de salida. Como Aquiles es mucho más rápido, aún así debería ganar. Pero para el momento en que haya cubierto los primeros 10 metros y llegado al lugar en donde la tortuga inició, la tortuga ya habrá avanzado 1 metro y aún lleva la delantera. Luego, después de que Aquiles haya cubierto ese metro, la tortuga habrá avanzado 0.1 metros y aún llevará la delantera; cuando Aquiles haya cubierto ese 0.1 de metro, la tortuga habrá avanzado 0.01 metros y aún llevará la delantera, y así sucesivamente. Por lo tanto, Aquiles estaría cada vez más cerca de la tortuga pero nunca la alcanzaría.

Por supuesto que la audiencia de Zenón sabía que algo estaba mal en el argumento. La posición de Aquiles en el tiempo t después de haber iniciado la carrera es $(10\text{ m/s})t$. La posición de la tortuga en el mismo tiempo t es $(1\text{ m/s})t + 10$ m. Cuando estas posiciones son iguales, Aquiles y la tortuga están uno al lado de la otra. Al despejar t de la ecuación resultante

$$(10\text{ m/s})t = (1\text{ m/s})t + 10\text{ m}$$

se encuentra el tiempo en el que Aquiles empareja a la tortuga.

La solución es $t = 1\frac{1}{9}$ segundos, tiempo en el que Aquiles ha corrido $\left(1\frac{1}{9}\text{ s}\right)(10\text{ m/s}) = 11\frac{1}{9}$ metros.

Lo que desconcertaba a Zenón y a quienes lo escuchaban era cómo podría ser que

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots = 11\frac{1}{9}$$

donde el lado izquierdo representa una *suma infinita* y el lado derecho es un resultado finito. La solución moderna a este problema consiste en el concepto de límite, que es el tema principal de este capítulo. El lado izquierdo de la ecuación es una serie geométrica infinita. Si se utiliza la notación de límite y la fórmula de la sección 1.6 para la suma de una sucesión geométrica finita, se escribe

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k} 10^{1-n} = \lim_{k\to\infty}\frac{10\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^{k+1}\right)}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{9} = 11\frac{1}{9}$$

y se encuentra la suma de esta sucesión geométrica infinita particular. (En la sección 1.6 se demostró que, para una secuencia infinita con un primer término a y radio común r, existe la suma de la secuencia infinita y está dada por $\frac{a}{1-r}$, *siempre que* $|r| < 1$).

Objetivo

Estudiar los límites y sus propiedades básicas.

10.1 Límites

Quizá usted ha estado en un estacionamiento en el que puede "aproximarse" al automóvil de enfrente, pero no quiere golpearlo y ni siquiera rozarlo. Esta noción de estar cada vez más cerca de algo, pero sin tocarlo, es muy importante en matemáticas y está implícita en el concepto de *límite*, en el cual se sustentan los fundamentos del cálculo. Básicamente, se hará que una variable "se aproxime" a un valor particular y se examinará el efecto que tiene sobre los valores de una función.

Por ejemplo, considere la función

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

Aunque esta función no está definida en $x = 1$, podría ser interesante observar el comportamiento de los valores de la función cuando x se acerca mucho a 1. En la tabla 10.1 se dan algunos valores de x que son un poco menores y otros un poco mayores que 1 y sus correspondientes valores funcionales. Observe que, a medida que x asume valores más y más próximos a 1, sin importar si x se aproxima *por la izquierda* ($x < 1$) o *por la derecha* ($x > 1$), los valores correspondientes de $f(x)$ se acercan cada vez más a un solo número, a saber, el 3. Esto también resulta claro en la gráfica de f en la figura 10.1. Observe que aunque la función no está definida en $x = 1$ (como lo indica el pequeño círculo vacío), los valores de la función se acercan cada vez más a 3 conforme x se acerca más y más a 1. Para expresar esto, se dice que el **límite** de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1 es 3 y se escribe

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

Se puede hacer $f(x)$ tan cercana a 3 como se desee, y mantenerla así de cerca, al seleccionar un valor de x lo suficientemente cercano a 1, pero diferente de 1. El límite existe en 1, aunque 1 no se encuentre en el dominio de f.

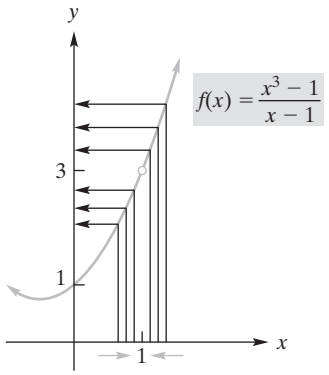


FIGURA 10.1 $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3.$

Tabla 10.1

$x < 1$		$x > 1$	
x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.8	2.44	1.2	3.64
0.9	2.71	1.1	3.31
0.95	2.8525	1.05	3.1525
0.99	2.9701	1.01	3.0301
0.995	2.985025	1.005	3.015025
0.999	2.997001	1.001	3.003001

También puede considerarse el límite de una función cuando x se aproxima a un número que está en el dominio. A continuación se examinará el límite de $f(x) = x + 3$ cuando x se aproxima a 2:

$$\lim_{x \to 2} (x + 3)$$

Obviamente, si x está cercana a 2 (pero no es igual a 2), entonces $x + 3$ está cercano a 5. Esto también resulta claro en la tabla y en la gráfica de la figura 10.2. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to 2} (x + 3) = 5$$

Dada una función f y un número a, *puede* haber dos formas de asociar un número con el par (f, a). Una manera consiste en la *evaluación de f en a*, a saber, $f(a)$. Ésta *existe* precisamente cuando a está en el dominio de f. Por ejemplo, si $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$, como en el primer ejemplo, entonces $f(1)$ no *existe*. Otra forma de asociar un número con el par (f, a) es *el límite de*

$x < 2$

x	$f(x)$
1.5	4.5
1.9	4.9
1.95	4.95
1.99	4.99
1.999	4.999

$x > 2$

x	$f(x)$
2.5	5.5
2.1	5.1
2.05	5.05
2.01	5.01
2.001	5.001

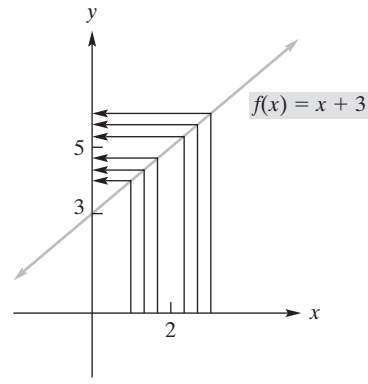


FIGURA 10.2 $\lim_{x \to 2} (x + 3) = 5$.

$f(x)$ *cuando x se aproxima a a*, lo cual se denota por $\lim_{x \to a} f(x)$. Se han dado dos ejemplos, a continuación se presenta el caso general.

Definición

El límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a a es el número L, que se escribe

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

siempre y cuando los valores de $f(x)$ puedan volverse tan cercanos a L como se desee, y mantenerse así de cercanos, al asumir una x lo suficientemente cercana pero diferente de a. Si tal número no existe, se dice que el límite de $f(x)$ *no existe*.

Debe enfatizarse que cuando es necesario encontrar un límite, no estamos interesados en lo que pasa con $f(x)$ cuando x es igual a a, sino solamente en lo que le sucede a $f(x)$ cuando x es cercana a a. De hecho, aun cuando el valor $f(a)$ *existiera*, la definición anterior lo elimina de manera explícita. En el segundo ejemplo, $f(x) = x + 3$, se tiene $f(2) = 5$ y también $\lim_{x \to 2}(x + 3) = 5$, pero es muy posible tener una función f y un número a para los cuales existen tanto $f(a)$ como $\lim_{x \to a} f(x)$ y son números diferentes. Además, un límite debe ser independiente de la manera en que x se aproxima a a. Esto es, el límite debe ser el mismo ya sea que x se acerque a a por la izquierda o por la derecha (para $x < a$ o $x > a$, respectivamente).

EJEMPLO 1 Estimación de un límite a partir de una gráfica

a. Estime $\lim_{x \to 1} f(x)$, donde la gráfica de f está dada en la figura 10.3(a).

Solución: Si se observan en la gráfica los valores de x cercanos a 1, se advierte que $f(x)$ está cercana a 2. Además, cuando x se aproxima cada vez más a 1, $f(x)$ parece estar cada vez más

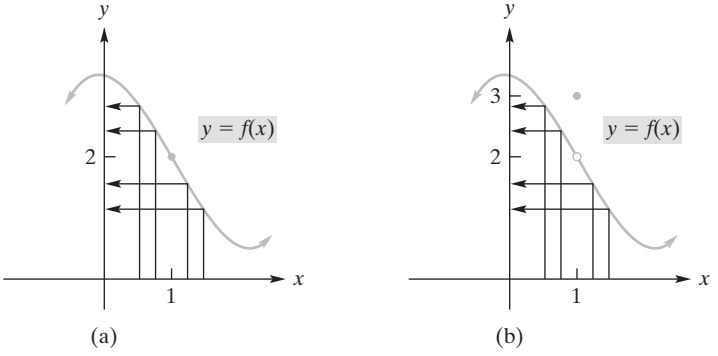


FIGURA 10.3 Investigación de $\lim_{x \to 1} f(x)$.

cercana a 2. Así, se estima que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

b. Estime $\lim_{x\to 1} f(x)$, donde la gráfica de f está dada en la figura 10.3(b).

Solución: Aunque $f(1) = 3$, este hecho no tiene importancia en cuanto al límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 1. Se observa que cuando x se aproxima a 1, $f(x)$ parece aproximarse a 2. Por lo tanto, se estima que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Hasta ahora, todos los límites considerados existen efectivamente. A continuación, se verán algunas situaciones en las que no existe un límite.

APLÍQUELO ▶

1. Los cajeros utilizan a diario la función mayor entero, que se denota como $f(x) = [x]$, al dar cambio a los clientes. Esta función proporciona la cantidad de dinero necesario para cada monto de cambio que se debe entregar (por ejemplo, si a un cliente se le deben $1.25 (dólares estadounidenses) de cambio, recibirá un billete de $1; por lo tanto $[1.25] = 1$). Formalmente, $[x]$ se define como el mayor entero que es menor o igual a x. Haga la gráfica de f, la cual algunas veces se denomina función escalonada, en su calculadora gráfica en el rectángulo de visualización estándar (esta función se encuentra en el menú de números y se denomina "integer part"). Explore esta gráfica con el comando TRACE. Determine si existe $\lim_{x\to a} f(x)$.

EJEMPLO 2 Límites que no existen

a. Estime $\lim_{x\to -2} f(x)$, si es que existe, donde la gráfica de f está dada en la figura 10.4.

Solución: Cuando x se aproxima a -2 por la izquierda ($x < -2$), los valores de $f(x)$ parecen más cercanos a 1. Pero cuando x se aproxima a -2 por la derecha ($x > -2$), $f(x)$ parece más cercana a 3. Por lo tanto, cuando x tiende a -2, los valores de la función no se acercan a un solo número. Se concluye que

$$\lim_{x\to -2} f(x) \text{ no existe}$$

Observe que el límite no existe aunque la función está definida en $x = -2$.

b. Estime $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ si es que existe.

Solución: Sea $f(x) = 1/x^2$. La tabla de la figura 10.5 proporciona los valores de $f(x)$ para algunos valores de x cercanos a 0. Cuando x se acerca más y más a 0, los valores de $f(x)$ se hacen cada vez más grandes sin cota alguna. Esto también es claro en la gráfica. Como los valores de $f(x)$ no se acercan a un *número* cuando x se aproxima a 0,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \text{ no existe}$$

Ahora resuelva el problema 3 ◁

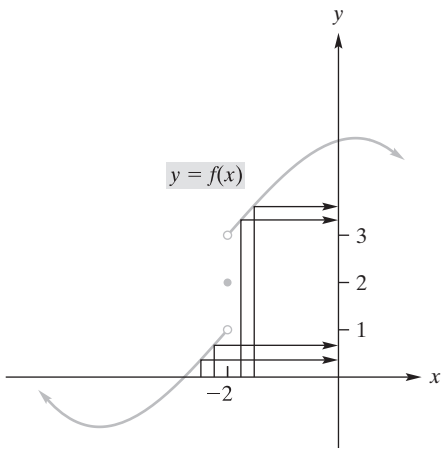


FIGURA 10.4 $\lim_{x\to -2} f(x)$ no existe.

x	$f(x)$
±1	1
±0.5	4
±0.1	100
±0.01	10 000
±0.001	1 000 000

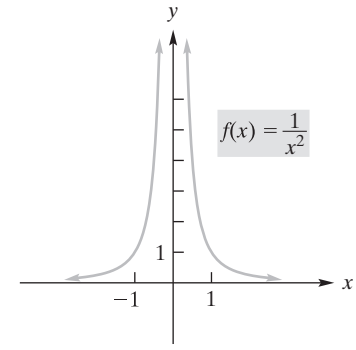


FIGURA 10.5 $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}$ no existe.

TECNOLOGÍA

Problema: Estime $\lim_{x\to 2} f(x)$ si

$$f(x) = \frac{x^3 + 2.1x^2 - 10.2x + 4}{x^2 + 2.5x - 9}$$

Solución: Un método útil para encontrar el límite consiste en construir una tabla de valores de la función $f(x)$ cuando x es cercana a 2. A partir de la figura 10.6, se estima que el límite es 1.57. De manera alternativa, puede estimarse el límite a partir de la gráfica de f. En la figura 10.7 se muestra la gráfica de f en la ventana estándar de $[-10, 10] \times [-10, 10]$. Primero se hacen varios acercamientos alrededor de $x = 2$ y se obtiene lo que se muestra en la figura 10.8. Después de asignar valores alrededor de $x = 2$, se estima que el límite es 1.57.

X	Y1
1.9	1.4688
1.99	1.5592
1.999	1.5682
1.9999	1.5691
2.01	1.5793
2.001	1.5702
2.0001	1.5693

X=2.0001

FIGURA 10.6 $\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.57$.

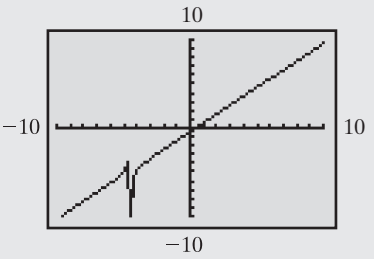


FIGURA 10.7 Gráfica de $f(x)$ en la ventana estándar.

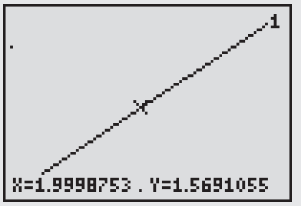


FIGURA 10.8 El acercamiento y trazado alrededor de $x = 2$ proporciona $\lim_{x\to 2} f(x) \approx 1.57$.

Propiedades de los límites

Para determinar límites, no siempre deseamos calcular los valores de la función o hacer el bosquejo de una gráfica. De manera alternativa, existen también varias propiedades de los límites que se pueden emplear. Las siguientes pueden parecerle razonables:

1. Si $f(x) = c$ es una función constante, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} c = c$$

2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$, para cualquier entero positivo n.

EJEMPLO 3 Aplicación de las propiedades 1 y 2 de los límites

a. $\lim_{x\to 2} 7 = 7; \lim_{x\to -5} 7 = 7$

b. $\lim_{x\to 6} x^2 = 6^2 = 36$

c. $\lim_{t\to -2} t^4 = (-2)^4 = 16$

Ahora resuelva el problema 9 ◁

Algunas otras propiedades de los límites son las siguientes:

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen, entonces

3.
$$\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$$

Esto es, el límite de una suma o diferencia es la suma o diferencia, respectivamente, de los límites.

4.
$$\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

Esto es, el límite de un producto es el producto de los límites.

5.
$$\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x), \text{ donde } c \text{ es una constante.}$$

Esto es, el límite de una constante por una función es la constante por el límite de la función.

APLÍQUELO ▶

2. El volumen de helio contenido en un globo esférico (en centímetros cúbicos), como una función del radio r en centímetros, está dado por $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre $\lim_{r\to 1} V(r)$.

EJEMPLO 4 **Aplicación de las propiedades de los límites**

a. $\lim_{x\to 2}(x^2 + x) = \lim_{x\to 2} x^2 + \lim_{x\to 2} x$ Propiedad 3

$= 2^2 + 2 = 6$ Propiedad 2

b. La propiedad 3 puede aplicarse por extensión al límite de un número finito de sumas y diferencias. Por ejemplo,

$$\lim_{q\to -1}(q^3 - q + 1) = \lim_{q\to -1} q^3 - \lim_{q\to -1} q + \lim_{q\to -1} 1$$
$$= (-1)^3 - (-1) + 1 = 1$$

c. $\lim_{x\to 2}[(x+1)(x-3)] = \lim_{x\to 2}(x+1) \cdot \lim_{x\to 2}(x-3)$ Propiedad 4

$= \left(\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 1\right) \cdot \left(\lim_{x\to 2} x - \lim_{x\to 2} 3\right)$

$= (2+1)\cdot(2-3) = 3(-1) = -3$

d. $\lim_{x\to -2} 3x^3 = 3 \cdot \lim_{x\to -2} x^3$ Propiedad 5

$= 3(-2)^3 = -24$

Ahora resuelva el problema 11 ◁

APLÍQUELO ▶

3. La función de ingreso para cierto producto está dada por $R(x) = 500x - 6x^2$. Determine $\lim_{x\to 8} R(x)$.

EJEMPLO 5 **Límite de una función polinomial**

Sea $f(x) = c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ una función polinomial. Entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}(c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0)$$
$$= c_n \cdot \lim_{x\to a} x^n + c_{n-1} \cdot \lim_{x\to a} x^{n-1} + \cdots + c_1 \cdot \lim_{x\to a} x + \lim_{x\to a} c_0$$
$$= c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0 = f(a)$$

Por lo tanto, se tiene la propiedad siguiente:

Si f es una función polinomial, entonces
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

En otras palabras, si f es un polinomio y a es cualquier número, entonces las dos formas de asociar un número con el par (f, a), a saber, la evaluación y la formación del límite, existen y son iguales.

Ahora resuelva el problema 13 ◁

El resultado del ejemplo 5 permite encontrar muchos límites simplemente por evaluación. Por ejemplo, puede encontrarse

$$\lim_{x\to -3}(x^3 + 4x^2 - 7)$$

al sustituir -3 por x porque $x^3 + 4x^2 - 7$ es una función polinomial:

$$\lim_{x\to -3}(x^3 + 4x^2 - 7) = (-3)^3 + 4(-3)^2 - 7 = 2$$

De igual modo,

$$\lim_{h\to 3}(2(h-1)) = 2(3-1) = 4$$

Es necesario especificar que los límites no se calculan mediante una simple evaluación a menos que exista alguna regla que lo justifique. Fue posible encontrar los dos límites anteriores por sustitución directa porque se tiene una regla que se aplica a límites de funciones polinomiales. Sin embargo, el uso indiscriminado de la evaluación puede conducir a resul-

tados erróneos. Para ilustrarlo, en el ejemplo l(b) se tiene $f(1) = 3$, que no es el $\lim_{x\to 1} f(x)$; en el ejemplo 2(a), $f(-2) = 2$, que no es el $\lim_{x\to -2} f(x)$.

Las siguientes dos propiedades de límites tienen que ver con cocientes y raíces.

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen, entonces

6. $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \quad \text{si} \quad \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

Esto es, el límite de un cociente es el cociente de los límites, siempre que el denominador no tenga un límite de 0.

7. $$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$ Vea la nota 1 a pie de página

EJEMPLO 6 **Aplicación de las propiedades 6 y 7 de los límites**

a. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^3 + 4} = \frac{\lim_{x\to 1}(2x^2 + x - 3)}{\lim_{x\to 1}(x^3 + 4)} = \frac{2 + 1 - 3}{1 + 4} = \frac{0}{5} = 0$

b. $\displaystyle\lim_{t\to 4} \sqrt{t^2 + 1} = \sqrt{\lim_{t\to 4}(t^2 + 1)} = \sqrt{17}$

c. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \sqrt[3]{x^2 + 7} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 3}(x^2 + 7)} = \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{8 \cdot 2} = 2\sqrt[3]{2}$

Ahora resuelva el problema 15 ◁

¡ADVERTENCIA!

Observe que en el ejemplo 6(a) el numerador y el denominador de la función son polinomios. En general, puede determinarse el límite de una función racional mediante evaluación, siempre que el denominador no sea 0 en a.

Límites y manipulación algebraica

Ahora se considerarán límites para los cuales no son aplicables las propiedades de los límites y que no pueden determinarse mediante evaluación. Un resultado fundamental es el siguiente:

Si f y g son dos funciones para las cuales $f(x) = g(x)$, para toda $x \neq a$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

(lo cual significa que si alguno de los límites existe, entonces el otro también existe y los dos son iguales).

¡ADVERTENCIA!

La condición para la igualdad de los límites no excluye la posibilidad de que $f(a) = g(a)$. La condición sólo concierne a $x \neq a$.

El resultado surge directamente a partir de la definición de *límite*, puesto que el valor de $\lim_{x\to a} f(x)$ depende sólo de los valores de $f(x)$ para x que están muy cerca de a. De nuevo: la evaluación de f en a, $f(a)$, o su no existencia, es irrelevante en la determinación de $\lim_{x\to a} f(x)$ a menos que se tenga una regla específica que sea aplicable, como en el caso donde f es un polinomio.

EJEMPLO 7 **Determinación de un límite**

Determine $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$.

Solución: Cuando $x \to -1$, tanto el numerador como el denominador se aproximan a cero. Debido a que el límite del denominador es 0, *no es posible* utilizar la propiedad 6. Sin embargo, como lo que le suceda al cociente cuando x es igual a -1 no tiene interés, puede suponerse que $x \neq -1$ y simplificar la fracción:

$$\frac{x^2 - 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x - 1)}{x + 1} = x - 1 \quad \text{para } x \neq -1$$

APLÍQUELO ▶

4. La tasa de cambio de la productividad p (en número de unidades producidas por hora) aumenta con el tiempo de trabajo de acuerdo con la función

$$p(t) = \frac{50(t^2 + 4t)}{t^2 + 3t + 20}$$

Encuentre $\lim_{t\to 2} p(t)$.

[1] Si n es par, se requiere que $\lim_{x\to a} f(x)$ sea no negativo.

Esta manipulación algebraica (factorización y cancelación) de la función original $\dfrac{x^2-1}{x+1}$ da lugar a una nueva función $x-1$, que es igual a la función original para $x \neq -1$. Por lo tanto, es aplicable el resultado fundamental desplegado en el recuadro del comienzo de esta subsección y se tiene

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x-1) = -1-1 = -2$$

Observe que, aunque la función original no está definida en -1, *tiene* un límite cuando $x \to -1$.

Ahora resuelva el problema 21 ◁

Cuando tanto $f(x)$ como $g(x)$ se aproximan a 0 a medida que $x \to a$, entonces se dice que el límite

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

tiene la *forma* 0/0. De manera similar, se habla de la *forma* $k/0$, para $k \neq 0$, si $f(x)$ se aproxima a $k \neq 0$ a medida que $x \to a$ pero $g(x)$ se aproxima a 0 cuando $x \to a$.

En el ejemplo 7, el método para encontrar un límite mediante evaluación no funciona. Al reemplazar x por -1 se obtiene 0/0, lo cual carece de significado. Cuando surge la forma indeterminada 0/0, la manipulación algebraica (como en el ejemplo 7) puede resultar en una función que concuerde con la función original, excepto en el valor limitante. En el ejemplo 7 la nueva función, $x-1$, es un polinomio y su límite *puede* determinarse mediante sustitución.

Al inicio de esta sección, se encontró que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$$

por inspección de una tabla de valores de la función $f(x) = (x^3-1)/(x-1)$ y también después de considerar la gráfica de f. Este límite tiene la forma 0/0. Ahora determinaremos el límite mediante la técnica descrita en el ejemplo 7.

EJEMPLO 8 **Forma 0/0**

Encuentre $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x-1}$.

¡ADVERTENCIA!

Con frecuencia existe confusión acerca de cuál es el principio que se usa en este ejemplo y en el ejemplo 7. El principio es:

Si $f(x) = g(x)$ para $x \neq a$,

entonces $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$.

Solución: Cuando $x \to 1$, tanto el numerador como el denominador se aproximan a 0. De esta manera, se tratará de expresar el cociente en una forma diferente para $x \neq 1$. Al factorizar, se tiene

$$\frac{x^3-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)} = x^2+x+1 \qquad \text{para } x \neq 1$$

(De manera alternativa, la división larga daría el mismo resultado). Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} (x^2+x+1) = 1^2+1+1 = 3$$

como se mostró antes.

Ahora resuelva el problema 23 ◁

APLÍQUELO ▶

5. La longitud de un material aumenta cuando se calienta el material de acuerdo con la ecuación $l = 125 + 2x$. La rapidez con la que se incrementa la longitud está dada por

$$\lim_{h\to 0} \frac{125+2(x+h)-(125+2x)}{h}$$

Calcule este límite.

EJEMPLO 9 **Forma 0/0**

Si $f(x) = x^2+1$, encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Solución:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^2+1]-(x^2+1)}{h}$$

Aquí se trata a x como una constante porque h cambia, no x. Cuando $h \to 0$, tanto el numerador como el denominador se aproximan a 0. Por lo tanto, se tratará de expresar el cociente en una forma distinta, para $h \neq 0$. Se tiene

$$\lim_{h\to 0} \frac{[(x+h)^2+1]-(x^2+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[x^2+2xh+h^2+1]-x^2-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h}$$

La expresión

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

se llama *cociente de diferencias*. El límite del cociente de diferencias se encuentra en el corazón del cálculo diferencial. Encontrará tales límites en el capítulo 11.

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} (2x+h)$$
$$= 2x$$

Nota: En la cuarta igualdad anterior, $\lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x+h)$, se usa el resultado fundamental. Cuando $\frac{h(2x+h)}{h}$ y $2x+h$ se consideran como *funciones de h*, se ven como iguales, para toda $h \neq 0$. Se deduce que sus límites son iguales cuando h se aproxima a 0.

Ahora resuelva el problema 35 ◁

Un límite especial

Se concluye esta sección con una nota concerniente a uno de los límites más importantes, a saber

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x}$$

En la figura 10.9 se muestra la gráfica de $f(x) = (1+x)^{1/x}$. Aunque $f(0)$ no existe, cuando $x \to 0$ resulta claro que el límite de $(1+x)^{1/x}$ sí existe. Es aproximadamente 2.71828 y se denota por la letra e. Ésta, como usted recordará, es la base del sistema de los logaritmos naturales. El límite

Este límite se utilizará en el capítulo 12.

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

puede realmente considerarse como la definición de e. Puede mostrarse que esto concuerda con la definición de e que se dio en la sección 4.1.

x	$(1+x)^{1/x}$
0.5	2.2500
0.1	2.5937
0.01	2.7048
0.001	2.7169

x	$(1+x)^{1/x}$
−0.5	4.0000
−0.1	2.8680
−0.01	2.7320
−0.001	2.7196

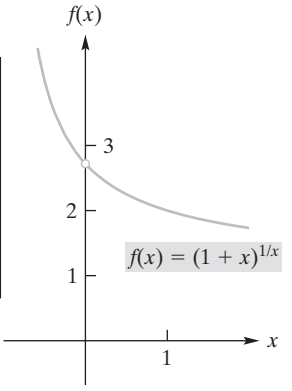


FIGURA 10.9 $\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$.

PROBLEMAS 10.1

En los problemas del 1 al 4, utilice la gráfica de f para estimar cada límite, si es que existe.

1. La gráfica de f aparece en la figura 10.10.

(a) $\lim_{x\to 0} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 2} f(x)$

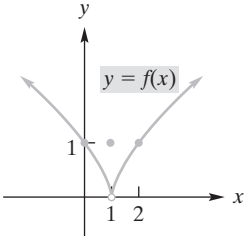


FIGURA 10.10

2. La gráfica de f aparece en la figura 10.11.

(a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 1} f(x)$

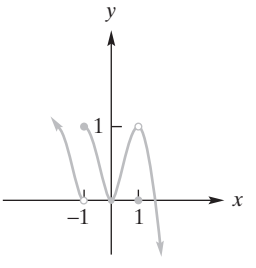


FIGURA 10.11

3. La gráfica de f aparece en la figura 10.12.

(a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 1} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 2} f(x)$

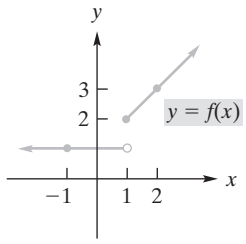


FIGURA 10.12

4. La gráfica de f aparece en la figura 10.13.

(a) $\lim_{x\to -1} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 0} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 1} f(x)$

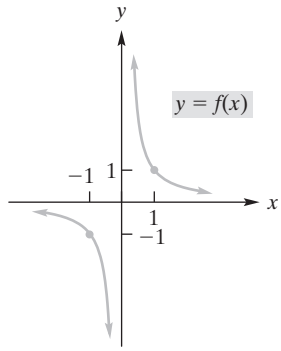


FIGURA 10.13

En los problemas del 5 al 8, utilice su calculadora para completar la tabla y use los resultados para estimar el límite dado.

5. $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x^2+2x-1}{x+1}$

x	−0.9	−0.99	−0.999	−1.001	−1.01	−1.1
$f(x)$						

6. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3}$

x	−3.1	−3.01	−3.001	−2.999	−2.99	−2.9
$f(x)$						

7. $\lim_{x\to 0} |x|^{|x|}$

x	−0.00001	0.00001	0.0001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

8. $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}$

h	−0.1	−0.01	−0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$						

Encuentre los límites en los problemas del 9 al 34.

9. $\lim_{x\to 2} 16$

10. $\lim_{x\to 3} 2x$

11. $\lim_{t\to -5} (t^2-5)$

12. $\lim_{t\to 1/2} (3t-5)$

13. $\lim_{x\to -2} (3x^3-4x^2+2x-3)$

14. $\lim_{r\to 9} \dfrac{4r-3}{11}$

15. $\lim_{t\to -3} \dfrac{t-2}{t+5}$

16. $\lim_{x\to -6} \dfrac{x^2+6}{x-6}$

17. $\lim_{t\to 0} \dfrac{t}{t^3-4t+3}$

18. $\lim_{z\to 0} \dfrac{z^2-5z-4}{z^2+1}$

19. $\lim_{p\to 4} \sqrt{p^2+p+5}$

20. $\lim_{y\to 15} \sqrt{y+3}$

21. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^2+2x}{x+2}$

22. $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2-1}$

23. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-x-2}{x-2}$

24. $\lim_{t\to 0} \dfrac{t^3+3t^2}{t^3-4t^2}$

25. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-x-6}{x-3}$

26. $\lim_{t\to 2} \dfrac{t^2-4}{t-2}$

27. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x+4}{x^2-16}$

28. $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^2-2x}{x}$

29. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2-9x+20}{x^2-3x-4}$

30. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^4-81}{x^2+8x+15}$

31. $\lim_{x\to 2} \dfrac{3x^2-x-10}{x^2+5x-14}$

32. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+2x-15}$

33. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2-2^2}{h}$

34. $\lim_{x\to 0} \dfrac{(x+2)^2-4}{x}$

35. Encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{(x+h)^2-x^2}{h}$ trate a x como una constante.

36. Encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{3(x+h)^2+7(x+h)-3x^2-7x}{h}$ trate a x como una constante.

En los problemas del 37 al 42, encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

37. $f(x) = 5+2x$

38. $f(x) = 2x+3$

39. $f(x) = x^2-3$

40. $f(x) = x^2+x+1$

41. $f(x) = x^3-4x^2$

42. $f(x) = 2-5x+x^2$

43. Encuentre $\lim_{x\to 6} \dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$. (*Sugerencia:* Primero racionalice el numerador al multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt{x-2}+2$).

44. Encuentre la constante c tal que $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2+x+c}{x^2-5x+6}$ exista. Para ese valor de c, determine el límite. (*Sugerencia:* Encuentre el valor de c para el cual $x-3$ es un factor del numerador).

45. Planta de energía La eficiencia teórica máxima de una planta de energía está dada por

$$E = \frac{T_h - T_c}{T_h}$$

donde T_h y T_c son las temperaturas absolutas respectivas del depósito más caliente y del más frío, respectivamente. Encuentre (a) $\lim T_{c\to 0} E$ y (b) $\lim_{T_c\to T_h} E$.

46. Satélite Cuando un satélite de 3200 libras gira alrededor de la Tierra en una órbita circular de radio r pies, la energía total mecánica E del sistema Tierra-satélite está dada por

$$E = -\frac{7.0\times 10^{17}}{r} \text{ pie-lb}$$

Encuentre el límite de E cuando $r \to 7.5\times 10^7$ pies.

En los problemas del 47 al 50, utilice una calculadora graficadora para graficar las funciones y luego estime los límites. Redondee sus respuestas a dos decimales.

47. $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^4-2x^3+2x^2-2x-3}{x^2-9}$

48. $\lim_{x\to 0} x^x$

49. $\lim_{x\to 9} \dfrac{x-10\sqrt{x}+21}{3-\sqrt{x}}$

50. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3+2x^2-7x+4}$

51. Purificación de agua El costo de purificar agua está dado por $C = \dfrac{50\,000}{p} - 6500$, donde p es el porcentaje de impurezas que quedan después de la purificación. Grafique esta función en su calculadora gráfica y determine $\lim_{p\to 0} C$. Analice el significado de dicho límite.

52. Función de utilidad La función de utilidad para cierto negocio está dada por $P(x) = 225x - 3.2x^2 - 700$. Grafique esta función en su calculadora gráfica y use la función de evaluación para determinar $\lim_{x\to 40.2} P(x)$, utilice la regla acerca del límite de una función polinomial.

Objetivo

Estudiar los límites laterales, límites infinitos y límites al infinito.

10.2 Límites (*continuación*)

Límites laterales

En la figura 10.14 se muestra la gráfica de un función f. Observe que $f(x)$ no está definida cuando $x = 0$. Cuando x se aproxima a 0 *por la derecha*, $f(x)$ se aproxima a 1. Esto se escribe como

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

Por otra parte, cuando x se aproxima a 0 *por la izquierda*, $f(x)$ se aproxima a -1 y se escribe

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$$

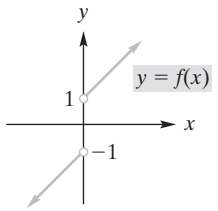


FIGURA 10.14 El $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe.

Los límites de este tipo se conocen como **límites unilaterales**. Como se mencionó en la sección anterior, el límite de una función a medida que $x \to a$ es independiente del modo en que x se aproxima a a. Por lo tanto, el límite existirá si y sólo si ambos límites existen y son iguales. Entonces se concluye que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \text{ no existe}$$

Como otro ejemplo de un límite unilateral, considere $f(x) = \sqrt{x-3}$ cuando x se aproxima a 3. Como f está definida sólo cuando $x \geq 3$, puede hablarse del límite de $f(x)$ cuando x se aproxima a 3 por la derecha. Si x es un poco mayor que 3, entonces $x - 3$ es un número positivo cercano a 0 y de este modo $\sqrt{x-3}$ es cercano a 0. Se concluye que

$$\lim_{x\to 3^+} \sqrt{x-3} = 0$$

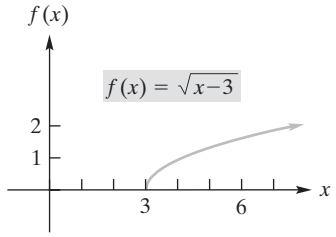


FIGURA 10.15 $\lim_{x\to 3^+} \sqrt{x-3} = 0$.

Este límite también es evidente si se observa la figura 10.15.

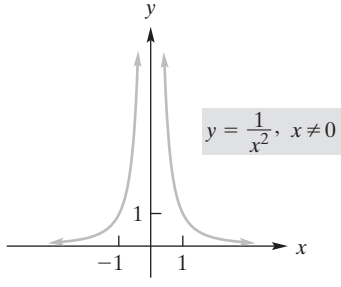
Límites infinitos

En la sección anterior se consideraron límites de la forma 0/0 —esto es, límites en los que el numerador y el denominador se aproximan a 0—. Ahora se examinarán límites en los cuales el denominador se aproxima a 0, pero el numerador se aproxima a un número diferente de 0. Por ejemplo, considere

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2}$$

Aquí, cuando x se aproxima a 0, el denominador se aproxima a 0 y el numerador se aproxima a 1. A continuación se investigará el comportamiento de $f(x) = 1/x^2$ cuando x es cercana a 0. El número x^2 es positivo y también cercano a 0. Por lo tanto, al dividir 1 entre tal número da como resultado un número muy grande. De hecho, entre más cercana a 0 esté x, mayor es el valor de $f(x)$. Por ejemplo, vea la tabla de valores de la figura 10.16, la cual también muestra la gráfica de f. Es claro que cuando $x \to 0$ tanto por la izquierda como por la derecha, $f(x)$ aumenta indefinidamente. De aquí que no exista el límite en 0. Se dice que cuando $x \to 0$, $f(x)$ se vuelve infinito positivamente y, en forma simbólica, se expresa este "límite infinito" al escribir

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty = \infty$$



x	$f(x)$
±1	1
±0.5	4
±0.1	100
±0.01	10 000
±0.001	1 000 000

FIGURA 10.16 $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ no existe, es posible que la razón no sea que los valores de $f(x)$ se vuelvan arbitrariamente grandes cuando x se acerca a a. Por ejemplo, vea de nuevo la situación del ejemplo 2(a) de la sección 10.1. Aquí se tiene que

$$\lim_{x\to -2} f(x) \text{ no existe, pero } \lim_{x\to -2} f(x) \neq \infty$$

¡ADVERTENCIA!

En esta situación, el uso del signo "igual" no significa que el límite exista; por el contrario, es una manera específica de decir que no hay límite y *por qué* no existe.

Ahora considere la gráfica de $y = f(x) = 1/x$ para $x \neq 0$. (Vea la figura 10.17). Cuando x se aproxima a 0 por la derecha, $1/x$ se vuelve positivamente infinito; cuando x se aproxima a 0 por la izquierda, $1/x$ se vuelve negativamente infinito. En forma simbólica, estos límites infinitos se escriben como

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

x	$f(x)$
0.01	100
0.001	1000
0.0001	10,000
−0.01	−100
−0.001	−1000
−0.0001	−10 000

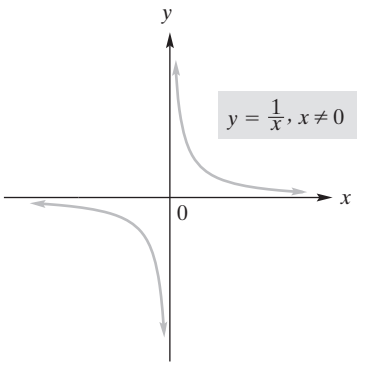


FIGURA 10.17 $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$ no existe.

Cualquiera de estos dos hechos implica que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} \text{ no existe.}$$

EJEMPLO 1 **Límites infinitos**

Encuentre el límite (si existe).

a. $\lim_{x\to -1^+} \frac{2}{x+1}$

FIGURA 10.18 $x \to -1^+$.

Solución: Cuando x se aproxima a -1 por la derecha (piense en valores de x como -0.9, -0.99, etc., como se muestra en la figura 10.18), $x + 1$ se aproxima a 0 pero siempre es positivo. Como estamos dividiendo 2 entre números positivos que se aproximan a 0, los resultados, $2/(x + 1)$, son números positivos que se vuelven arbitrariamente grandes. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2}{x+1} = \infty$$

y el límite no existe. Mediante un análisis similar, usted debe ser capaz de demostrar que

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2}{x+1} = -\infty$$

b. $\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2-4}$

Solución: Cuando $x \to 2$, el numerador tiende a 4 y el denominador se aproxima a 0. Por lo tanto, se dividen números cercanos a 4 entre números cercanos a 0. Los resultados son números que se vuelven arbitrariamente grandes en magnitud. En esta fase, puede escribirse

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2-4} \text{ no existe}$$

Sin embargo, se evaluará si es posible utilizar el símbolo ∞ o $-\infty$ para ser más específicos acerca del "no existe". Observe que

$$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{x-2}$$

Puesto que

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty$$

$\lim_{x\to 2} \frac{x+2}{x^2-4}$ no es ∞ ni $-\infty$.

Ahora resuelva el problema 31 ◁

En el ejemplo 1 se consideraron límites de la forma $k/0$, donde $k \neq 0$. Es importante que se distinga la forma $k/0$ de la forma 0/0, la cual se estudió en la sección 10.1. Las dos formas se manejan de muy diferente manera.

EJEMPLO 2 Determinación de un límite

Encuentre $\lim_{t \to 2} \dfrac{t-2}{t^2-4}$.

Solución: Cuando $t \to 2$, *tanto* el numerador *como* el denominador se aproximan a 0 (forma 0/0). Así, primero se simplifica la fracción, para $t \neq 2$, como se hizo en la sección 10.1, y luego se toma el límite:

$$\lim_{t \to 2} \frac{t-2}{t^2-4} = \lim_{t \to 2} \frac{t-2}{(t+2)(t-2)} = \lim_{t \to 2} \frac{1}{t+2} = \frac{1}{4}$$

Ahora resuelva el problema 37 ◁

Límites al infinito

Ahora se examinará la función

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

cuando x se vuelve infinito, primero en sentido positivo y después en sentido negativo. En la tabla 10.2 puede verse que cuando x aumenta indefinidamente al tomar valores positivos, los valores de $f(x)$ se aproximan a 0. De la misma forma, cuando x disminuye indefinidamente al tomar valores negativos, los valores de $f(x)$ se aproximan a 0. Estas observaciones son claras al ver la gráfica de la figura 10.17. Allí, cuando usted se desplaza hacia la derecha sobre la curva y toma valores positivos de x, los correspondientes valores de y se aproximan a 0 a través de valores positivos. De manera similar, cuando se desplaza hacia la izquierda a lo largo de la curva a través de valores negativos de x, los correspondientes valores de y se aproximan a 0 a través de valores negativos. En forma simbólica, se escribe

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Estos límites se conocen como *límites al infinito*.

Usted debe ser capaz de obtener

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x}$$

sin ayuda de una gráfica o de una tabla. Al dividir 1 entre un número positivo grande, se obtiene como resultado un número positivo pequeño y cuando el divisor se vuelve arbitrariamente grande, los cocientes se vuelven arbitrariamente pequeños. Es posible formular un argumento similar para el límite cuando $x \to -\infty$.

Tabla 10.2 Comportamiento de $f(x)$ cuando $x \to \pm\infty$

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1000	0.001	−1000	−0.001
10 000	0.0001	−10 000	−0.0001
100 000	0.00001	−100 000	−0.00001
1 000 000	0.000001	−1 000 000	−0.000001

APLÍQUELO ▶

6. La función de demanda para cierto producto está dada por $p(x) = \dfrac{10\,000}{(x+1)^2}$, donde p representa el precio y x es la cantidad vendida. Grafique esta función en su calculadora gráfica en la ventana $[0, 10] \times [0, 10\,000]$. Utilice la función TRACE para encontrar $\lim_{x \to \infty} p(x)$. Determine lo que le sucede a la gráfica y lo que esto significa con respecto a la función de demanda.

EJEMPLO 3 Límites al infinito

Encuentre el límite (si existe).

a. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{4}{(x-5)^3}$

Solución: Cuando x se vuelve muy grande, también se incrementa $x - 5$. Como el cubo de un número grande también es grande, $(x-5)^3 \to \infty$. Al dividir 4 entre números muy grandes se tiene como resultado números cercanos a 0. Por lo tanto,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4}{(x-5)^3} = 0$$

b. $\lim_{x \to -\infty} \sqrt{4-x}$

Solución: Cuando x se vuelve negativamente infinita, $4 - x$ se vuelve positivamente infinito. Debido a que la raíz cuadrada de números grandes son números grandes, se concluye que

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{4-x} = \infty$$

En el siguiente análisis se necesitará de cierto límite, a saber, $\lim_{x\to\infty} 1/x^p$, donde $p > 0$. Conforme x se vuelve muy grande, también se incrementa x^p. Al dividir 1 entre números grandes se tiene como resultado números cercanos a 0. Así, $\lim_{x\to\infty} 1/x^p = 0$. En general,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

donde $p > 0$.[2] Por ejemplo,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1/3}} = 0$$

Ahora se encontrará el límite de la función racional

$$f(x) = \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1}$$

cuando $x \to \infty$. (Recuerde que en la sección 2.2 se mencionó que una función racional es un cociente de polinomios). A medida que x se vuelve cada vez más grande, *tanto* el numerador *como* el denominador de cualquier función racional se vuelven infinitos en valor absoluto. Sin embargo, la forma del cociente puede modificarse de modo que sea posible obtener una conclusión de si tiene o no límite. Para hacer esto, el numerador y el denominador se dividen entre la mayor potencia de x que aparezca en el denominador. En este caso es x^2. Esto da

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{4x^2 + 5}{x^2}}{\dfrac{2x^2 + 1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{4x^2}{x^2} + \dfrac{5}{x^2}}{\dfrac{2x^2}{x^2} + \dfrac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4 + \dfrac{5}{x^2}}{2 + \dfrac{1}{x^2}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 4 + 5 \cdot \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty} 2 + \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}}$$

Como $\lim_{x\to\infty} 1/x^p = 0$ para $p > 0$,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} = \frac{4 + 5(0)}{2 + 0} = \frac{4}{2} = 2$$

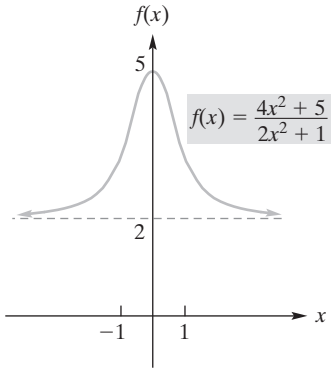


FIGURA 10.19 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 2$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$.

De manera similar, el límite cuando $x \to -\infty$ es 2. Estos límites son claros si se observa la gráfica de f en la figura 10.19.

Para la función anterior, hay una manera más sencilla de encontrar $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Para valores *grandes* de x, el término que incluye la potencia más grande de x en el numerador, a saber $4x^2$, domina la suma $4x^2 + 5$, y el término dominante en el denominador, $2x^2 + 1$, es $2x^2$. Por lo tanto, cuando $x \to \infty$, $f(x)$ puede aproximarse mediante $(4x^2)/(2x^2)$. Como resultado, para determinar el límite de $f(x)$, basta determinar el límite de $(4x^2)/(2x^2)$. Esto es,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 + 5}{2x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = \lim_{x\to\infty} 2 = 2$$

como se vio antes. En general, se tiene la regla siguiente:

Límites al infinito de funciones racionales

Si $f(x)$ es una *función racional* y $a_n x^n$ y $b_m x^m$ son los términos en el numerador y el denominador, respectivamente, que tienen las mayores potencias de x, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

[2] Para $\lim_{x\to-\infty} 1/x^p$, se supone que p es tal que $1/x^p$ está definida para $x < 0$.

Ahora se aplicará esta regla a la situación donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador. Por ejemplo,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4-3x}{5-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{-2x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{1}{2}x^3\right)=\infty$$

(Observe que en el último paso, cuando x se vuelve muy negativa, también lo hace x^3; además, $-\frac{1}{2}$ por un número muy negativo resulta ser muy positivo). De manera similar,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x}{5-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}x^3\right)=-\infty$$

A partir de esta ilustración, se llega a la conclusión siguiente:

Si el grado del numerador de una *función racional* es mayor que el grado del denominador, entonces la función no tiene límite cuando $x\to\infty$ y no tiene límite cuando $x\to-\infty$.

APLÍQUELO ▶

7. Los montos anuales de ventas y de cierta compañía (en miles) están relacionados con la cantidad de dinero que se gasta en publicidad, x (en miles), de acuerdo con la ecuación $y(x)=\dfrac{500x}{x+20}$. Grafique esta función en su calculadora gráfica en la ventana $[0, 1000]\times[0, 550]$. Utilice TRACE para explorar $\lim_{x\to\infty} y(x)$ y determine qué significa esto para la empresa.

EJEMPLO 4 Límites al infinito para funciones racionales

Encuentre el límite (si existe).

a. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{7-2x+8x^2}$

Solución:
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{7-2x+8x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{8x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$$

b. $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{(3x-1)^2}$

Solución:
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{(3x-1)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{9x^2-6x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{9x^2}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{9x}=\frac{1}{9}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=\frac{1}{9}(0)=0$$

c. $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^5-x^4}{x^4-x^3+2}$

Solución: Como el grado del numerador es mayor que el del denominador, no existe el límite. Con mayor precisión,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-x^4}{x^4-x^3+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5}{x^4}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

Ahora resuelva el problema 21 ◁

¡ADVERTENCIA!

La técnica anterior sólo se aplica a límites *al infinito* de funciones racionales.

Para encontrar $\lim_{x\to0}\dfrac{x^2-1}{7-2x+8x^2}$, no se puede simplemente determinar el límite de $\dfrac{x^2}{8x^2}$. Esta simplificación se aplica sólo en el caso $x\to\infty$ o $x\to-\infty$. En lugar de eso, se tiene

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2-1}{7-2x+8x^2}=\frac{\lim_{x\to0}x^2-1}{\lim_{x\to0}7-2x+8x^2}=\frac{0-1}{7-0+0}=-\frac{1}{7}$$

Ahora se considerará el límite de la función polinomial $f(x)=8x^2-2x$ cuando $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}(8x^2-2x)$$

Debido a que un polinomio es una función racional con denominador 1, se tiene

$$\lim_{x\to\infty}(8x^2-2x)=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2-2x}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{8x^2}{1}=\lim_{x\to\infty}8x^2$$

Es decir, el límite de $8x^2-2x$ cuando $x\to\infty$ es el mismo que el límite del término que incluye a la mayor potencia de x, a saber, $8x^2$. Cuando x se vuelve muy grande, también se incrementa $8x^2$. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to\infty}(8x^2-2x)=\lim_{x\to\infty}8x^2=\infty$$

En general, se tiene lo siguiente:

Cuando $x \to \infty$ (o $x \to -\infty$), el límite de una *función polinomial* es igual al de su término que involucra la mayor potencia de x.

APLÍQUELO ▶

8. El costo C de producir x unidades de cierto producto está dado por $C(x) = 50\,000 + 200x + 0.3x^2$. Utilice su calculadora gráfica para explorar $\lim_{x\to\infty} C(x)$ y determine lo que esto significa.

EJEMPLO 5 Límites al infinito para funciones polinomiales

a. $\lim_{x\to-\infty}(x^3 - x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} x^3$. Cuando x se vuelve muy negativa, también lo hace x^3. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3 - x^2 + x - 2) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

b. $\lim_{x\to-\infty}(-2x^3 + 9x) = \lim_{x\to-\infty} -2x^3 = \infty$, porque -2 por un número muy negativo es un número positivo muy grande.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

La técnica de enfocarse en los términos dominantes para encontrar los límites cuando $x \to \infty$ o $x \to -\infty$ es válida para *funciones racionales*, pero no necesariamente es válida para otros tipos de funciones. Por ejemplo, considere

No utilice los términos dominantes cuando una función no es racional.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) \tag{1}$$

Observe que $\sqrt{x^2 + x} - x$ no es una función racional. Es *incorrecto* inferir que como x^2 domina en $x^2 + x$, el límite en (1) es el mismo que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2} - x\right) = \lim_{x\to\infty}(x - x) = \lim_{x\to\infty} 0 = 0$$

Puede demostrarse (vea el problema 62) que en (1) el límite no es 0, sino $\frac{1}{2}$.

Las ideas presentadas en esta sección se aplicarán ahora a una función definida por partes.

APLÍQUELO ▶

9. Un plomero cobra \$100 por la primera hora de trabajo a domicilio y \$75 por cada hora (o fracción) posterior. La función de lo que cuesta una visita de x horas es

$$f(x) = \begin{cases} \$100 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ \$175 & \text{si } 1 < x \le 2 \\ \$250 & \text{si } 2 < x \le 3 \\ \$325 & \text{si } 3 < x \le 4 \end{cases}$$

Encuentre $\lim_{x\to1} f(x)$ y $\lim_{x\to2.5} f(x)$.

EJEMPLO 6 Límites para una función definida por partes

Si $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \ge 1 \\ 3 & \text{si } x < 1 \end{cases}$, encuentre el límite (si existe).

a. $\lim_{x\to1^+} f(x)$

Solución: Aquí, x se acerca a 1 por la derecha. Para $x > 1$, se tiene $f(x) = x^2 + 1$. Por lo que,

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(x^2 + 1)$$

Si x es mayor que 1, pero cercano a 1, entonces $x^2 + 1$ se acerca a 2. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}(x^2 + 1) = 2$$

b. $\lim_{x\to1^-} f(x)$

Solución: Aquí x se acerca a 1 por la izquierda. Para $x < 1$, $f(x) = 3$. De modo que,

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} 3 = 3$$

c. $\lim_{x\to1} f(x)$

Solución: Se quiere encontrar el límite cuando x se aproxima a 1. Sin embargo, la regla de la función dependerá de si $x \ge 1$ o $x < 1$. Así, deben considerarse los límites unilaterales. El límite cuando x se aproxima a 1 existirá si y sólo si ambos límites unilaterales existen y son iguales. A partir de los incisos (a) y (b),

$$\lim_{x\to1^+} f(x) \ne \lim_{x\to1^-} f(x) \qquad \text{ya que } 2 \ne 3$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x\to1} f(x) \qquad \text{no existe}$$

d. $\lim_{x\to\infty} f(x)$

Solución: Para valores muy grandes de x, se tiene $x \geq 1$, de modo que $f(x) = x^2 + 1$. Así,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^2 + 1) = \lim_{x\to\infty} x^2 = \infty$$

e. $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

Solución: Para valores muy negativos de x, se tiene $x < 1$, de modo que $f(x) = 3$. Por lo que,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3 = 3$$

Todos los límites de los incisos (a) a (c) deben quedar claros a partir de la gráfica de f que se presenta en la figura 10.20.

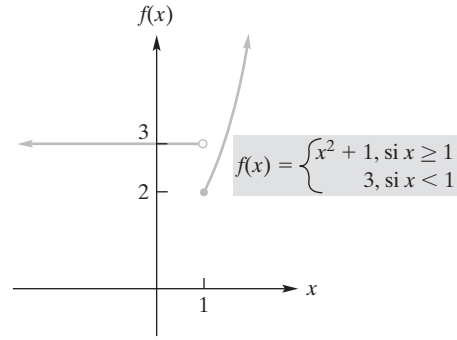


FIGURA 10.20 Gráfica de una función definida por partes.

Ahora resuelva el problema 57 ◁

PROBLEMAS 10.2

1. Para la función f dada en la figura 10.21, encuentre los límites siguientes. Si el límite no existe, indíquelo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

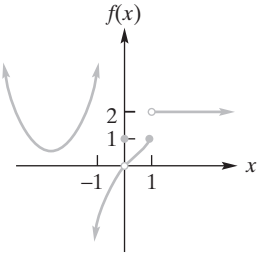


FIGURA 10.21

(a) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to-1^-} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to-1^+} f(x)$
(d) $\lim_{x\to-1} f(x)$ **(e)** $\lim_{x\to0^-} f(x)$ **(f)** $\lim_{x\to0^+} f(x)$
(g) $\lim_{x\to0} f(x)$ **(h)** $\lim_{x\to1^-} f(x)$ **(i)** $\lim_{x\to1^+} f(x)$
(j) $\lim_{x\to1} f(x)$ **(k)** $\lim_{x\to\infty} f(x)$

2. Para la función f dada en la figura 10.22, encuentre los límites siguientes. Si el límite no existe, indíquelo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

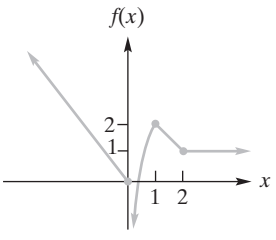


FIGURA 10.22

(a) $\lim_{x\to0^-} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to0^+} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to0} f(x)$
(d) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **(e)** $\lim_{x\to1} f(x)$ **(f)** $\lim_{x\to\infty} f(x)$
(g) $\lim_{x\to2^+} f(x)$

En cada problema del 3 al 54, encuentre el límite. Si el límite no existe indíquelo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

3. $\lim_{x\to3^+} (x - 2)$ **4.** $\lim_{x\to-1^+} (1 - x^2)$ **5.** $\lim_{x\to-\infty} 5x$

6. $\lim_{x\to-\infty} -6$ **7.** $\lim_{x\to0^-} \frac{6x}{x^4}$ **8.** $\lim_{x\to2} \frac{7}{x-1}$

9. $\lim_{x\to-\infty} x^2$ **10.** $\lim_{t\to\infty} (t-1)^3$ **11.** $\lim_{h\to1^+} \sqrt{h-1}$

12. $\lim_{h\to5^-} \sqrt{5-h}$ **13.** $\lim_{x\to-2^-} \frac{-3}{x+2}$ **14.** $\lim_{x\to0^-} 2^{1/2}$

15. $\lim_{x\to1^+} (4\sqrt{x-1})$ **16.** $\lim_{x\to2^-} (x\sqrt{4-x^2})$ **17.** $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x+10}$

18. $\lim_{x\to-\infty} -\sqrt{1-10x}$ **19.** $\lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{x}}$

20. $\lim_{x\to\infty} \frac{-6}{5x\sqrt[3]{x}}$ **21.** $\lim_{x\to\infty} \frac{x-5}{2x+1}$ **22.** $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-4}{3-2x}$

23. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-1}{x^3+4x-3}$ **24.** $\lim_{r\to\infty} \frac{r^3}{r^2+1}$

25. $\lim_{t\to\infty} \frac{3t^3+2t^2+9t-1}{5t^2-5}$ **26.** $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2}{3x^3-x^2+2}$

27. $\lim_{x\to\infty} \frac{7}{2x+1}$ **28.** $\lim_{x\to-\infty} \frac{2}{(4x-1)^3}$

29. $\lim_{x\to\infty} \frac{3-4x-2x^3}{5x^3-8x+1}$ **30.** $\lim_{x\to-\infty} \frac{3-2x-2x^3}{7-5x^3+2x^2}$

31. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{x+3}{x^2-9}$ **32.** $\lim_{x\to -3^-} \dfrac{3x}{9-x^2}$ **33.** $\lim_{w\to\infty} \dfrac{2w^2-3w+4}{5w^2+7w-1}$

34. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{4-3x^3}{x^3-1}$ **35.** $\lim_{x\to\infty} \dfrac{6-4x^2+x^3}{4+5x-7x^2}$

36. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x-x^2}{x^2+19x-64}$ **37.** $\lim_{x\to -3^-} \dfrac{5x^2+14x-3}{x^2+3x}$

38. $\lim_{t\to 3} \dfrac{t^2-4t+3}{t^2-2t-3}$ **39.** $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x+1}{x^2+1}$

40. $\lim_{x\to -1} \dfrac{3x^3-x^2}{2x+1}$ **41.** $\lim_{x\to 2^-} \left(2-\dfrac{1}{x-2}\right)$

42. $\lim_{x\to -\infty} -\dfrac{x^5+2x^3-1}{x^5-4x^2}$ **43.** $\lim_{x\to -7^-} \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-49}}$

44. $\lim_{x\to -2^+} \dfrac{x}{\sqrt{16-x^4}}$ **45.** $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{5}{x+x^2}$

46. $\lim_{x\to -\infty} \left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)$ **47.** $\lim_{x\to 1} x(x-1)^{-1}$ **48.** $\lim_{x\to 1/2} \dfrac{1}{2x-1}$

49. $\lim_{x\to 1^+} \left(\dfrac{-5}{1-x}\right)$ **50.** $\lim_{x\to 3} \left(-\dfrac{7}{x-3}\right)$ **51.** $\lim_{x\to 1} |x-1|$

52. $\lim_{x\to 0} \left|\dfrac{1}{x}\right|$ **53.** $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{x}$

54. $\lim_{x\to\infty} \left(\dfrac{3}{x}-\dfrac{2x^2}{x^2+1}\right)$

En los problemas del 55 al 58, encuentre los límites indicados. Si el límite no existe, indíquelo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

55. $f(x)=\begin{cases}2 & \text{si } x\le 2\\ 1 & \text{si } x>2\end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 2} f(x)$
(d) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ **(e)** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

56. $f(x)=\begin{cases}2-x & \text{si } x\le 3\\ -1+3x-x^2 & \text{si } x>3\end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 3} f(x)$
(d) $\lim_{x\to\infty} f(x)$ **(e)** $\lim_{x\to -\infty} f(x)$

57. $g(x)=\begin{cases}x & \text{si } x<0\\ -x & \text{si } x>0\end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 0} g(x)$
(d) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ **(e)** $\lim_{x\to -\infty} g(x)$

58. $g(x)=\begin{cases}x^2 & \text{si } x<0\\ -x & \text{si } x>0\end{cases}$

(a) $\lim_{x\to 0^+} g(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 0^-} g(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 0} g(x)$
(d) $\lim_{x\to\infty} g(x)$ **(e)** $\lim_{x\to -\infty} g(x)$

59. Costo promedio Si c es el costo total de producir q unidades de cierto artículo, entonces el costo promedio por unidad para una producción de q unidades está dado por $\bar{c}=c/q$. Por lo tanto, si la ecuación de costo total es $c=5000+6q$, entonces

$$\bar{c}=\frac{5000}{q}+6$$

Por ejemplo, el costo total para la producción de 5 unidades es de \$5030 y el costo promedio por unidad en este nivel de producción es de \$1006. Por medio de la determinación de $\lim_{q\to\infty} \bar{c}$, demuestre que el costo promedio se aproxima a un nivel de estabilidad si el productor aumenta de manera continua la producción. ¿Cuál es el valor límite del costo promedio? Haga un bosquejo de la gráfica de la función costo promedio.

60. Costo promedio Repita el problema 59, considerando que el costo fijo es de \$12 000 y que el costo variable está dado por la función $c_v=7q$.

61. Población Se pronostica que dentro de t años la población de cierta ciudad pequeña será

$$N=40\ 000-\frac{5000}{t+3}$$

Determine la población a largo plazo, esto es, determine $\lim_{t\to\infty} N$.

62. Demuestre que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)=\frac{1}{2}$$

(*Sugerencia:* Racionalice el numerador al multiplicar la expresión $\sqrt{x^2+x}-x$ por

$$\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}$$

Después exprese el denominador en una forma tal que x sea un factor).

63. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad del huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes parasitados en cierto periodo es

$$y=\frac{900x}{10+45x}$$

Si la densidad del huésped aumentara indefinidamente, ¿a qué valor se aproximaría y?

64. Si $f(x)=\begin{cases}\sqrt{2-x} & \text{si } x<2\\ x^3+k(x+1) & \text{si } x\ge 2\end{cases}$, determine el valor de la constante k para la cual existe $\lim_{x\to 2} f(x)$.

En los problemas 65 y 66, utilice una calculadora para evaluar la función dada cuando $x=1, 0.5, 0.2, 0.1, 0.01, 0.001$ y 0.0001. Con base en sus resultados, obtenga una conclusión acerca de $\lim_{x\to 0+} f(x)$.

65. $f(x)=x^{2x}$ **66.** $f(x)=e^{1/x}$

67. Grafique $f(x)=\sqrt{4x^2-1}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x\to 1/2^+} f(x)$.

68. Grafique $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x+3}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x\to -3^-} f(x)$ si existe. Utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ cuando sea apropiado.

69. Grafique $f(x)=\begin{cases}2x^2+3 & \text{si } x<2\\ 2x+5 & \text{si } x\ge 2\end{cases}$. Utilice la gráfica para estimar cada uno de los límites siguientes, si existen.

(a) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ **(b)** $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ **(c)** $\lim_{x\to 2} f(x)$

10.3 Continuidad

Objetivo

Estudiar la continuidad y encontrar puntos de discontinuidad para una función.

Muchas funciones tienen la propiedad de que no presentan "pausa" alguna en sus gráficas. Por ejemplo, compare las funciones

$$f(x)=x \quad \text{y} \quad g(x)=\begin{cases}x & \text{si } x\ne 1\\ 2 & \text{si } x=1\end{cases}$$

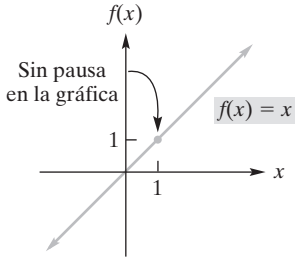


FIGURA 10.23 Es continua en 1.

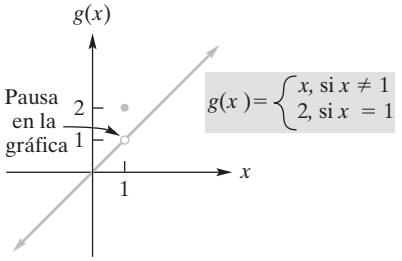


FIGURA 10.24 Es discontinua en 1.

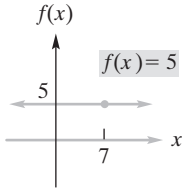


FIGURA 10.25 f es continua en 7.

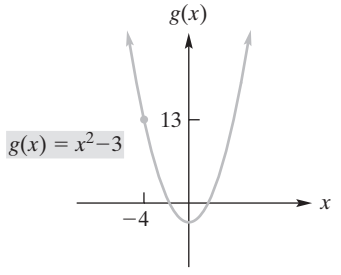


FIGURA 10.26 g es continua en -4.

cuyas gráficas aparecen en las figuras 10.23 y 10.24, respectivamente. La gráfica de f no tiene pausa, pero la gráfica de g tiene una pausa en $x = 1$. Dicho de otra forma, si usted fuera a trazar ambas gráficas con un lápiz, tendría que despegar el lápiz del papel en la gráfica de g cuando $x = 1$, pero no tendría que despegarlo en la gráfica de f. Estas situaciones pueden expresarse mediante límites. Compare el límite de cada función con el valor de la función en $x = 1$ cuando x se aproxima a 1:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 1 = f(1)$$

mientras que

$$\lim_{x\to 1} g(x) = 1 \neq 2 = g(1)$$

En la sección 10.1 se puntualizó que dada una función f y un número a, existen dos formas importantes de asociar un número al par (f, a). Una es la simple evaluación, $f(a)$, la cual *existe* precisamente si a está en el dominio de f. La otra forma es $\lim_{x\to a} f(x)$, cuya existencia y determinación puede ser más desafiante. Para las funciones f y g anteriores, el límite de f a medida que $x \to 1$ es igual a $f(1)$, pero el límite de g conforme $x \to 1$ *no* es igual a $g(1)$. Por estas razones, se dice que f es *continua* en 1 y que g es *discontinua* en 1.

Definición

Una función f es **continua** en a si y sólo si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. $f(a)$ existe.
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si f no es continua en a, entonces se dice que f es **discontinua** en a y a se denomina **punto de discontinuidad** de f.

EJEMPLO 1 Aplicación de la definición de continuidad

a. Muestre que $f(x) = 5$ es continua en 7.

Solución: Debe verificarse que las tres condiciones se cumplan. Primero, $f(7) = 5$, de modo que f está definida en $x = 7$. Segundo,

$$\lim_{x\to 7} f(x) = \lim_{x\to 7} 5 = 5$$

Por ende, f tiene un límite cuando $x \to 7$. Tercero,

$$\lim_{x\to 7} f(x) = 5 = f(7)$$

Por lo tanto, f es continua en 7. (Vea la figura 10.25).

b. Demuestre que $g(x) = x^2 - 3$ es continua en -4.

Solución: La función g está definida en $x = -4$; $g(-4) = 13$. También,

$$\lim_{x\to -4} g(x) = \lim_{x\to -4} (x^2 - 3) = 13 = g(-4)$$

Por lo tanto, g es continua en -4. (Vea la figura 10.26).

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Se dice que una función es *continua en un intervalo* si es continua en cada punto de ese intervalo. En esta situación, la gráfica de la función se conecta en todo el intervalo. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es continua en el intervalo $[2, 5]$. De hecho, en el ejemplo 5 de la sección 10.1, se mostró que para *cualquier* función polinomial f, para cualquier número a, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Esto significa que

Una función polinomial es continua en todo punto.

Se concluye que tal función es continua en cualquier intervalo. Se dice que una función es **continua en su dominio** si es continua en cada punto de su dominio. Si el dominio de tal función es el conjunto de todos los números reales, se puede decir simplemente que la función es continua.

EJEMPLO 2 Continuidad de funciones polinomiales

Las funciones $f(x) = 7$ y $g(x) = x^2 - 9x + 3$ son polinomiales. Por lo tanto, son continuas en su dominio respectivo. Por ejemplo, son continuas en 3.

Ahora resuelva el problema 13 ◁

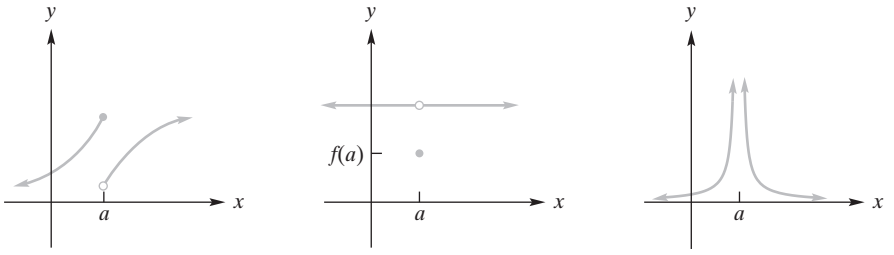
¿Cuándo es discontinua una función? Se puede decir que una función f definida en un intervalo abierto que contenga a a es discontinua en a, si

1. f no tiene límite cuando $x \to a$

   o

2. cuando $x \to a$, f tiene un límite diferente de $f(a)$.

Si f no está definida en a, también se dirá, en ese caso, que f es discontinua en a. En la figura 10.27 pueden encontrarse, por inspección, puntos de discontinuidad.



Definida en a pero no tiene límite cuando $x \to a$

Definida en a y el límite cuando $x \to a$ existe, pero el límite no es $f(a)$

No definida en a, pero está definida en todos los valores cercanos de a

FIGURA 10.27 Discontinuidades en a.

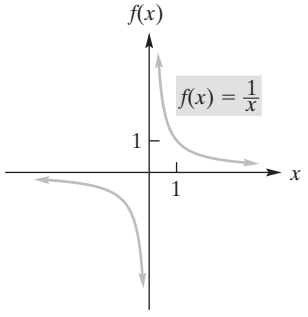


FIGURA 10.28 Discontinuidad infinita en 0.

EJEMPLO 3 Discontinuidades

a. Sea $f(x) = 1/x$. (Vea la figura 10.28). Observe que f no está definida en $x = 0$, pero está definida para cualquier otro valor de x cercano a 0. Así, f es discontinua en 0. Además, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$. Se dice que una función tiene **discontinuidad infinita** en a cuando al menos uno de los límites laterales es ∞ o $-\infty$ a medida que $x \to a$. De aquí que f tenga una *discontinuidad infinita* en $x = 0$.

b. Sea $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

(Vea la figura 10.29). Aunque f está definida en $x = 0$, $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe. Por lo tanto, f es discontinua en 0.

Ahora resuelva el problema 29 ◁

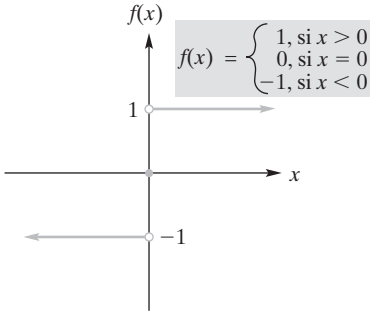


FIGURA 10.29 Función discontinua definida por partes.

La propiedad siguiente indica dónde ocurren las discontinuidades de una función racional.

Discontinuidades de una función racional

Una función racional es discontinua en los puntos donde el denominador es 0 y es continua en cualquier otra parte. Así, una función racional es continua en su dominio.

La función racional $f(x) = \dfrac{x+1}{x+1}$ es continua en su dominio, pero no está definida en -1. Es discontinua en -1. La gráfica de f es una línea recta horizontal en $y = 1$ con un "hoyo" en la coordenada $(-1, 1)$.

EJEMPLO 4 **Localización de discontinuidades para funciones racionales**

Para cada una de las siguientes funciones, encuentre todos los puntos de discontinuidad.

a. $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x^2 + 2x - 8}$

Solución: Esta función racional tiene denominador

$$x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$$

que es 0 cuando $x = -4$ o $x = 2$. Así, f sólo es discontinua en -4 y 2.

b. $h(x) = \dfrac{x+4}{x^2+4}$

Solución: Para esta función racional, el denominador nunca es 0. (Siempre es positivo). De este modo, h no tiene discontinuidad.

Ahora resuelva el problema 19 ◁

EJEMPLO 5 **Localización de discontinuidades en funciones definidas por partes**

Para cada una de las funciones siguientes, encuentre todos los puntos de discontinuidad.

a. $f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si } x \geq 3 \\ x^2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$

Solución: Las partes que definen la función están dadas por polinomios que son continuos, entonces el único lugar en el que podría haber discontinuidad es en $x = 3$, donde ocurre la separación de las partes. Se sabe que $f(3) = 3 + 6 = 9$. Y puesto que

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} (x + 6) = 9$$

y

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} x^2 = 9$$

se puede concluir que $\lim_{x \to 3} f(x) = 9 = f(3)$ y la función no tiene puntos de discontinuidad. Se puede obtener la misma conclusión por inspección de la gráfica de f en la figura 10.30.

b. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x > 2 \\ x^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

Solución: Como f no está definida en $x = 2$, es discontinua en 2. Sin embargo, observe que

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = 4 = \lim_{x \to 2^+} x + 2 = \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

demuestra que $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe. (Vea la figura 10.31).

Ahora resuelva el problema 31 ◁

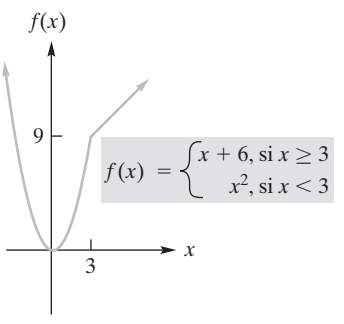


FIGURA 10.30 Función continua definida por partes.

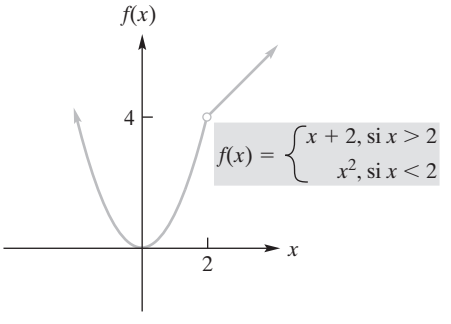


FIGURA 10.31 Función discontinua en 2.

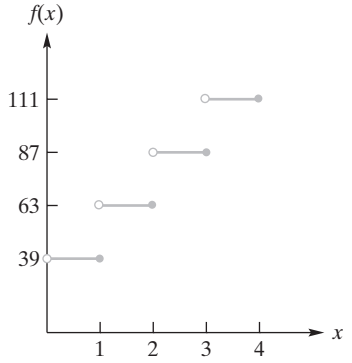


FIGURA 10.32 Función de servicio postal.

EJEMPLO 6 **Función del servicio postal**

La función de servicio postal

$$c = f(x) = \begin{cases} 39 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 63 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 87 & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ 111 & \text{si } 3 < x \leq 4 \end{cases}$$

da el costo c (en centavos) de enviar por primera clase un paquete de peso x (onzas), para $0 < x \leq 4$, en julio de 2006. En su gráfica de la figura 10.32, es claro que f tiene discontinuidades en 1, 2 y 3 y que es constante para valores de x ubicados entre discontinuidades sucesivas. Tal función se conoce como *función escalón* debido a la apariencia de su gráfica.

Ahora resuelva el problema 35 ◁

Hay otra manera de expresar la continuidad aparte de la dada en la definición. Si se toma el enunciado

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

y se reemplaza x por $a + h$, entonces cuando $x \to a$, se tiene que $h \to 0$; y cuando $h \to 0$ se tiene que $x \to a$. Se deduce que $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a + h)$, dado que los límites existen (figura 10.33). Por lo tanto, el enunciado

$$\lim_{h \to 0} f(a + h) = f(a)$$

suponiendo que ambos lados existen, también define continuidad en a.

Este método para expresar la continuidad en a se utiliza con frecuencia en demostraciones matemáticas.

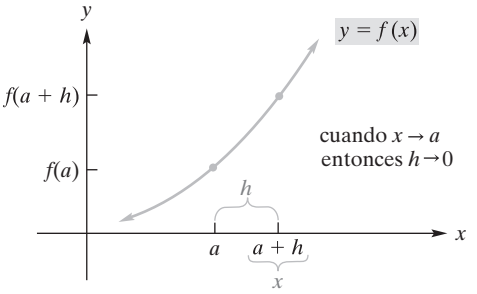


FIGURA 10.33 Diagrama para ilustrar la continuidad en a.

TECNOLOGÍA

Mediante la observación de la gráfica de una función, se tiene la capacidad de determinar dónde ocurre una discontinuidad. Sin embargo, existe la posibilidad de equivocarse. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 1}$$

es discontinua en ± 1, pero la discontinuidad en 1 no resulta obvia al observar la gráfica de f en la figura 10.34. Por otra parte, la discontinuidad en -1 sí es obvia. Observe que f no está definida en -1 ni en 1.

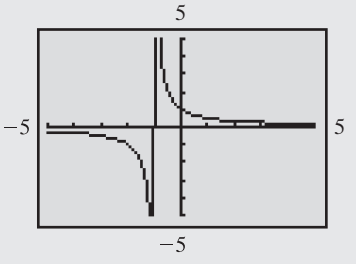


FIGURA 10.34 La discontinuidad en 1 no resulta evidente a partir de la gráfica de $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2 - 1}$.

A menudo es útil describir una situación mediante una función continua. Por ejemplo, el programa de demanda de la tabla 10.3 indica el número de unidades de un producto que se demandará por semana a diversos precios. Esta información puede proporcionarse de manera gráfica, como en la figura 10.35(a), trazando cada par cantidad-precio como un

Tabla 10.3 Programa de demanda

Precio por unidad, p	Cantidad por semana, q
$20	0
10	5
5	15
4	20
2	45
1	95

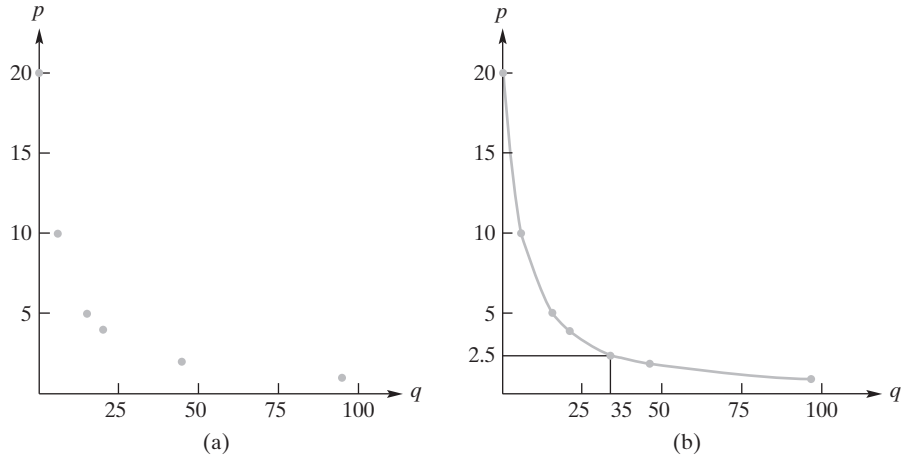


FIGURA 10.35 Visualización de datos por medio de una función continua.

punto. Es claro que esta gráfica no representa una función continua. Además, no proporciona información del precio al cual, digamos, serán demandadas 35 unidades. Sin embargo, cuando se conectan los puntos de la figura 10.35(a) por medio de una curva suave [vea la figura 10.35(b)], se obtiene lo que se conoce como una curva de demanda. A partir de esta curva, podría estimarse que a un precio de aproximadamente $2.50 por unidad, se demandarían 35 unidades.

Con frecuencia es posible y útil describir una gráfica por medio de una ecuación que define una función continua f, como en la figura 10.35(b). Tal función no sólo proporciona una ecuación de demanda, $p = f(q)$, para anticipar los precios correspondientes a las cantidades demandadas, también permite efectuar un análisis matemático conveniente acerca de la naturaleza y las propiedades básicas de la demanda. Por supuesto que se debe tener cuidado al trabajar con ecuaciones como $p = f(q)$. Matemáticamente, f puede estar definida cuando $q = \sqrt{37}$, pero desde un punto de vista práctico, una demanda de $\sqrt{37}$ unidades podría no tener significado para esta situación particular. Por ejemplo, si una unidad es un huevo, entonces una demanda de $\sqrt{37}$ huevos, no tiene sentido.

Se destaca que las funciones de la forma $f(x) = x^a$, para una a fija, son continuas en sus dominios. En particular, las funciones de raíz (cuadrada) son continuas. También las funciones exponenciales y logarítmicas son continuas en sus dominios. Así, las funciones exponenciales no tienen discontinuidades, mientras que una función logarítmica tiene sólo una discontinuidad en 0 (que es una discontinuidad infinita). Se dan muchos más ejemplos de funciones continuas al observar que si f y g son continuas en sus dominios, entonces la función compuesta $f \circ g$, dada por $f \circ g(x) = f(g(x))$, es continua en su dominio. Por ejemplo, la función

$$f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)}$$

Es continua en su dominio. Por supuesto, es posible que esto involucre la determinación del dominio de tal función.

PROBLEMAS 10.3

En los problemas del 1 al 6, utilice la definición de continuidad para mostrar que la función dada es continua en el punto indicado.

1. $f(x) = x^3 - 5x; x = 2$
2. $f(x) = \dfrac{x-3}{5x}; x = -3$
3. $g(x) = \sqrt{2-3x}; x = 0$
4. $f(x) = \dfrac{x}{8}; x = 2$
5. $h(x) = \dfrac{x+3}{x-3}; x = -3$
6. $f(x) = \sqrt[3]{x}; x = -1$

En los problemas del 7 al 12, determine si la función es continua en los puntos dados.

7. $f(x) = \dfrac{x+4}{x-2}; -2,\ 0$
8. $f(x) = \dfrac{x^2-4x+4}{6}; 2, -2$
9. $g(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}; 3, -3$
10. $h(x) = \dfrac{3}{x^2+9}; 3, -3$
11. $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \geq 2 \\ x^2 & \text{si } x < 2 \end{cases}; 2,\ 0$
12. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}; 0, -1$

En los problemas del 13 al 16, proporcione una razón del por qué la función es continua en su dominio.

13. $f(x) = 2x^2 - 3$
14. $f(x) = \dfrac{2+3x-x^2}{5}$

15. $f(x) = \ln(\sqrt[3]{x})$ **16.** $f(x) = x(1-x)$

En los problemas del 17 al 34, encuentre todos los puntos de discontinuidad.

17. $f(x) = 3x^2 - 3$ **18.** $h(x) = x - 2$

19. $f(x) = \dfrac{3}{x+4}$ **20.** $f(x) = \dfrac{x^2+5x-2}{x^2-9}$

21. $g(x) = \dfrac{(2x^2-3)^3}{15}$ **22.** $f(x) = -1$

23. $f(x) = \dfrac{x^2+6x+9}{x^2+2x-15}$ **24.** $g(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x}$

25. $h(x) = \dfrac{x-3}{x^3-9x}$ **26.** $f(x) = \dfrac{2x-3}{3-2x}$

27. $p(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ **28.** $f(x) = \dfrac{x^4}{x^4-1}$

29. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ **30.** $f(x) = \begin{cases} 3x+5 & \text{si } x \geq -2 \\ 2 & \text{si } x < -2 \end{cases}$

31. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ **32.** $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x > 2 \\ 3-2x & \text{si } x < 2 \end{cases}$

33. $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x > 2 \\ 8x & \text{si } x < 2 \end{cases}$ **34.** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{16}{x^2} & \text{si } x \geq 2 \\ 3x-2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

35. Tarifas telefónicas Suponga que la tarifa telefónica de larga distancia para una llamada hecha desde Hazleton, Pennsylvania, a Los Ángeles, California, es de \$0.08 por el primer minuto o fracción y de \$0.04 por cada minuto o fracción adicional. Si $y = f(t)$ es una función que indica el cargo total y por una llamada de t minutos de duración, bosqueje la gráfica de f para $0 < t \leq 3\frac{1}{2}$. Utilice esta gráfica para determinar los valores de t en los cuales ocurren discontinuidades, donde $0 < t \leq 3\frac{1}{2}$.

36. La *función mayor entero*, $f(x) = \lfloor x \rfloor$, está definida como el entero más grande que es menor o igual a x, donde x es cualquier número real. Por ejemplo, $\lfloor 3 \rfloor = 3$, $\lfloor 1.999 \rfloor = 1$, $\lfloor \frac{1}{4} \rfloor = 0$ y $\lfloor -4.5 \rfloor = -5$. Bosqueje la gráfica de esta función para $-3.5 \leq x \leq 3.5$. Utilice su bosquejo para determinar los valores de x en los cuales ocurren discontinuidades.

37. Inventario Bosqueje la gráfica de

$$y = f(x) = \begin{cases} -100x + 600 & \text{si } 0 \leq x < 5 \\ -100x + 1100 & \text{si } 5 \leq x < 10 \\ -100x + 1600 & \text{si } 10 \leq x < 15 \end{cases}$$

Una función como la anterior podría describir el inventario y de una compañía en el instante x; ¿f es continua en 2?, ¿en 5?, ¿en 10?

38. Grafique $g(x) = e^{-1/x^2}$. Debido a que g no está definida en $x = 0$, g es discontinua en 0. Con base en la gráfica de g,

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

¿es continua en 0?

Objetivo

Desarrollar técnicas para resolver desigualdades no lineales.

10.4 Continuidad aplicada a desigualdades

En la sección 1.2 se resolvieron desigualdades lineales. Ahora se verá cómo puede aplicarse la noción de continuidad para resolver una desigualdad no lineal, como $x^2 + 3x - 4 < 0$. Esta habilidad será importante en nuestro estudio sobre el cálculo.

Recuerde (tal y como se mencionó en la sección 2.5) que las intersecciones x de la gráfica de una función g son precisamente las raíces de la ecuación $g(x) = 0$. Por lo tanto, a partir de la gráfica de $y = g(x)$ mostrada en la figura 10.36, se concluye que r_1, r_2 y r_3 son raíces de $g(x) = 0$ y cualesquiera otras raíces darán lugar a las intersecciones de x (más allá de lo que realmente se muestra en la gráfica). Suponga que efectivamente se muestran todas las raíces de $g(x) = 0$, y por ende todas las intersecciones x. Note además, en la misma figura 10.36, que las tres raíces determinan cuatro intervalos abiertos sobre el eje x:

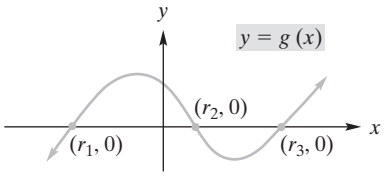


FIGURA 10.36 r_1, r_2 y r_3 son raíces de $g(x) = 0$.

$$(-\infty, r_1) \quad (r_1, r_2) \quad (r_2, r_3) \quad (r_3, \infty)$$

Para resolver $x^2 + 3x - 4 > 0$, se hace

$$f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x+4)(x-1)$$

Debido a que f es una función polinomial, es continua. Las raíces de $f(x) = 0$ son -4 y 1; de modo que la gráfica de f tiene intersecciones con el eje x $(-4, 0)$ y $(1, 0)$. (Vea la figura 10.37). Las raíces determinan tres intervalos sobre el eje x:

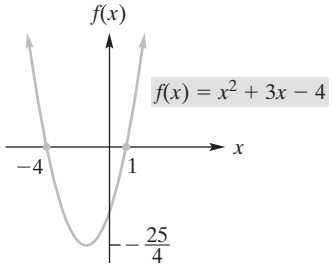


FIGURA 10.37 -4 y 1 son raíces de $f(x) = 0$.

$$(-\infty, -4) \quad (-4, 1) \quad (1, \infty)$$

Considere el intervalo $(-\infty, -4)$. Como f es continua en este intervalo, se afirma que $f(x) > 0$, o bien, $f(x) < 0$ *en todo* el intervalo. Si no fuera éste el caso, entonces $f(x)$ realmente cambiaría de signo en el intervalo. Debido a la continuidad de f, habría un punto donde la gráfica intersecaría al eje x —por ejemplo, en $(x_0, 0)$—. (Vea la figura 10.38). Pero entonces x_0 sería una raíz de $f(x) = 0$. Sin embargo, esto no puede ser porque no hay raíces de f menores que -4. De modo que $f(x)$ debe ser estrictamente positiva o estrictamente negativa en $(-\infty, -4)$. Se puede enunciar un argumento similar para cada uno de los otros intervalos.

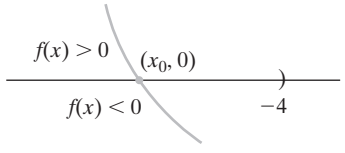


FIGURA 10.38 Cambio de signo para una función continua.

Para determinar el signo de $f(x)$ en cualquiera de los tres intervalos, es suficiente con determinarlo en *cualquier* punto del intervalo. Por ejemplo, -5 está en $(-\infty, -4)$ y

$$f(-5) = 6 > 0 \qquad \text{Entonces, } f(x) > 0 \text{ en } (-\infty, -4)$$

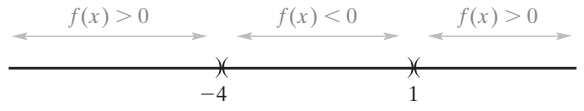


FIGURA 10.39 Diagrama de signos simple para $x^2 + 3x - 4$.

De manera similar, 0 está en $(-4, 1)$ y

$$f(0) = -4 < 0 \qquad \text{Entonces, } f(x) < 0 \text{ en } (-4, 1)$$

Por último, 3 está en $(1, \infty)$ y

$$f(3) = 14 > 0 \qquad \text{Entonces, } f(x) > 0 \text{ en } (1, \infty)$$

(Vea el "diagrama de signos" en la figura 10.39). Por lo tanto,

$$x^2 + 3x - 4 > 0 \text{ en } (-\infty, -4) \text{ y } (1, \infty)$$

de modo que se ha resuelto la desigualdad. Estos resultados son obvios a partir de la gráfica de la figura 10.37. La gráfica está por arriba del eje x, esto significa que $f(x) > 0$ en $(-\infty, -4)$ y en $(1, \infty)$.

En ejemplos más complicados, será útil explotar la naturaleza multiplicativa de los signos. Se observa que $f(x) = x^2 + 3x - 4 = (x + 4)(x - 1)$. Cada uno de los términos $x + 4$ y $x - 1$ tiene un diagrama de signos más simple que el de $x^2 + 3x - 4$. Considere el "diagrama de signos" de la figura 10.40. Igual que antes, se colocaron las raíces de $f(x) = 0$ en orden ascendente, de izquierda a derecha, con el fin de subdividir $(-\infty, \infty)$ en tres intervalos abiertos. Esto forma la línea superior de la tabla. Directamente debajo de la línea superior se determinaron los signos de $x + 4$ en los tres subintervalos. Se sabe que para la función lineal $x + 4$ hay exactamente una raíz de la ecuación $x + 4 = 0$, es decir -4. Se le colocó un 0 a -4 en el renglón etiquetado como $x + 4$. Por el argumento que se ilustra en la figura 10.38, se deduce que el signo de la función $x + 4$ es constante en $(-\infty, -4)$ y en $(-4, \infty)$ y dos evaluaciones de $x + 4$ establecen la distribución de signos para $x + 4$. A partir de $(-5) + 4 = -1 < 0$, se tiene que $x + 4$ es *negativa* en $(-\infty, -4)$, por lo que se ingresó un signo $-$ en el espacio $(-\infty, -4)$ del renglón $x + 4$. A partir de $(0) + 4 = 4 > 0$, se tiene que $x + 4$ es *positiva* en $(-4, \infty)$. Puesto que $(-4, \infty)$ se ha subdividido en 1, se introduce un signo $+$ en cada uno de los espacios $(-4, 1)$ y $(1, \infty)$ del renglón $x + 4$. De manera similar se construyó el renglón etiquetado como $x - 1$.

	$-\infty$		-4		1		∞
$x + 4$	$-$		0	$+$		$+$	
$x - 1$	$-$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+$		0	$-$	0	$+$	

FIGURA 10.40 Diagrama de signos para $x^2 + 3x - 4$.

Ahora se obtiene el renglón inferior tomando, para cada componente, el producto de las entradas previas. Por lo tanto, se tiene $(x + 4)(x - 1) = f(x)$, $(-)(-) = +$, 0(cualquier número) $= 0$, $(+)(-) = -$, (cualquier número)$0 = 0$ y $(+)(+) = +$. Los diagramas de signos de este tipo son útiles siempre que una función continua se pueda expresar como un producto de varias funciones continuas más simples, cada una de las cuales tiene un diagrama de signos simple. En el capítulo 13 se aplicarán más extensivamente dichos diagramas de signos.

EJEMPLO 1 Resolución de una desigualdad cuadrática

Resuelva $x^2 - 3x - 10 > 0$.

Solución: Si $f(x) = x^2 - 3x - 10$, entonces f es una función polinomial (cuadrática) y, por lo tanto, continua en todas partes. Para encontrar las raíces reales de $f(x) = 0$, se tiene

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x + 2)(x - 5) = 0$$

$$x = -2, 5$$

	$-\infty$		-2		5		∞
$x+2$	$-$	0	$+$		$+$		
$x-5$	$-$		$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		

FIGURA 10.41 Diagrama de signos para $x^2 - 3x - 10$.

Las raíces -2 y 5 determinan tres intervalos:

$$(-\infty, -2) \quad (-2, 5) \quad (5, \infty)$$

Igual que en el ejemplo anterior, se construye el diagrama de signos de la figura 10.41. Se encuentra que $x^2 - 3x - 10 > 0$ en $(-\infty, -2) \cup (5, \infty)$.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

APLÍQUELO ▶

10. Para formar una caja abierta, se corta una pieza cuadrada de cada esquina de una pieza de metal de 8 por 10 pulgadas. Si cada lado de los cuadrados que se han cortado es de x pulgadas de largo, el volumen de la caja está dado por $V(x) = x(8 - 2x)(10 - 2x)$. Este problema sólo tiene sentido cuando el volumen es positivo. Determine los valores de x para los que el volumen es positivo.

EJEMPLO 2 Resolución de una desigualdad polinomial

Resuelva $x(x - 1)(x + 4) \leq 0$.

Solución: Si $f(x) = x(x - 1)(x + 4)$, entonces f es una función polinomial y, por lo tanto, continua en todas partes. Las raíces de $f(x) = 0$ son (en orden ascendente) -4, 0 y 1 y pueden verse en el diagrama de signos de la figura 10.42.

	$-\infty$		-4		0		1		∞
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$		$+$		
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		

FIGURA 10.42 Diagrama de signos para $x(x - 1)(x + 4)$.

A partir del diagrama de signos, se anotan los puntos requeridos, $x(x - 1)(x + 4) \leq 0$ en $(-\infty, -4) \cup [0, 1]$.

Ahora resuelva el problema 11 ◁

Los diagramas de signos que se han descrito no se limitan, por cierto, a la resolución de desigualdades polinomiales. El lector habrá notado que se utilizan líneas verticales más gruesas en los puntos finales, $-\infty$ y ∞, del diagrama. Estos símbolos no denotan números reales, sino puntos solos en el dominio de una función. Se amplía la convención de la línea gruesa vertical para señalar los números reales aislados que no están en el dominio de la función en cuestión. Lo anterior se ilustrará en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 3 Resolución de una desigualdad con funciones racionales

Resuelva $\dfrac{x^2 - 6x + 5}{x} \geq 0$.

Solución: Sea

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 5}{x} = \frac{(x - 1)(x - 5)}{x}$$

Para una función racional $f = g/h$, la desigualdad se resuelve considerando los intervalos determinados tanto por las raíces de $g(x) = 0$ como por las raíces de $h(x) = 0$. Observe que las raíces de $g(x) = 0$ son las raíces de $f(x) = 0$ debido a que la única manera de que una fracción sea 0 es que su numerador sea 0. Por otro lado, las raíces de $h(x) = 0$ son precisa-

	$-\infty$		0		1		5	∞
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$
$1/x$		$-$	$\times$	$+$		$+$		$+$
$f(x)$		$-$	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$

FIGURA 10.43 Gráfica de signos para $\dfrac{(x-1)(x-5)}{x}$.

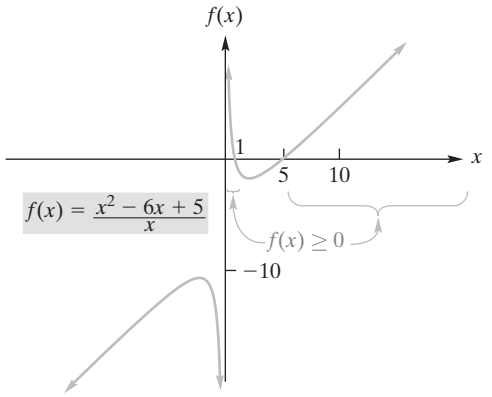


FIGURA 10.44 Gráfica de $f(x) = \dfrac{x^2-6x+5}{x}$.

mente los puntos en los que f no está definida y éstos también son precisamente los puntos en los que f es discontinua. El signo de f puede cambiar en una raíz y puede cambiar en una discontinuidad. Aquí las raíces del numerador son 1 y 5 y la raíz del denominador es 0. En orden ascendente, esto resulta en 0, 1 y 5, lo que determina los intervalos abiertos

$$(-\infty, 0) \quad (0, 1) \quad (1, 5) \quad (5, \infty)$$

Éstos, junto con la observación de que $1/x$ es un *factor* de f, conducen al diagrama de signos mostrado en la figura 10.43.

Aquí, los dos primeros renglones del diagrama de signos se construyen como antes. En el tercer renglón se ha colocado un signo $\times$ en 0 para indicar que el factor $1/x$ no está definido en 0. El renglón inferior, como antes, se construye tomando los productos de las entradas previas. Observe que un producto no está definido en ningún punto en el que cualquiera de sus factores no esté definido. De ahí que también se tenga una entrada $\times$ en 0 en el renglón inferior.

A partir de la última fila del diagrama de signos se puede leer que la solución de $\frac{(x-1)(x-5)}{x} \geq 0$ es $(0, 1] \cup [5, \infty]$. Observe que 1 y 5 están en la solución y 0 no lo está.

En la figura 10.44 se ha graficado $f(x) = \frac{x^2-6x+5}{x}$ y se puede confirmar visualmente que la solución de la desigualdad $f(x) \geq 0$ es precisamente el conjunto de todos los números reales en los que la gráfica se encuentra en o por encima del eje x.

Ahora resuelva el problema 17 ◁

No siempre es necesario un diagrama de signos, como se muestra en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 4 Resolución de desigualdades no lineales

a. Resuelva $x^2 + 1 > 0$.

Solución: La ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene raíces reales. Por lo tanto, la función continua $f(x) = x^2 + 1$ no tiene intersecciones en x. De esto se deduce que f(x) siempre es positiva o siempre es negativa. Pero x^2 siempre es positiva o cero, de modo que $x^2 + 1$ siempre es positiva. Por lo tanto, la solución de $x^2 + 1 > 0$ es $(-\infty, \infty)$.

b. Resuelva $x^2 + 1 < 0$.

Solución: Con base en el inciso (a), $x^2 + 1$ siempre es positiva, de modo que $x^2 + 1 < 0$ no tiene solución, lo cual significa que el conjunto de soluciones es ϕ, el conjunto vacío.

Ahora resuelva el problema 7 ◁

Se concluye con un ejemplo no racional. La importancia de la función que presentamos será más clara en los capítulos posteriores.

EJEMPLO 5 Resolución de una desigualdad con funciones racionales

Resuelva $x \ln x - x \geq 0$.

Solución: Sea $f(x) = x \ln x - x = x(\ln x - 1)$, la cual, al ser un producto de funciones continuas, es continua. A partir de la forma *factorizada* de f se observa que las raíces de $f(x) = 0$ son 0 y las raíces de $\ln x - 1 = 0$. Esto último es equivalente a $\ln x = 1$, que es equivalente a $e^{\ln x} = e^1$, ya que la función exponencial es uno a uno. Sin embargo, la última igualdad dice que $x = e$. El dominio de f es $(0, \infty)$ porque $\ln x$ sólo está definida para $x > 0$. El dominio dicta la línea superior del diagrama de signos de la figura 10.45.

	0		e		∞
x		+		+	
$ln\ x - 1$		−	0	+	
$f(x)$		−	0	+	

FIGURA 10.45 Diagrama de signos para $x \ln x - x$.

El primer renglón de la figura 10.45 es directo. Para el segundo renglón, se coloca un 0 en e, la única raíz de $\ln x - 1 = 0$. Por la continuidad de $\ln x - 1$, el signo de $\ln x - 1$ en $(0, e)$ y en (e, ∞) puede determinarse mediante las evaluaciones adecuadas. Para el primero, se evalúa a 1 en $(0, e)$ y se obtiene $\ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$. Para el segundo, se evalúa a e^{-2} en (e, ∞) y $\ln e^2 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$. El renglón inferior, como de costumbre, se determina multiplicando los demás. Con base en el renglón inferior de la figura 10.45, la solución de $x \ln x - x \geq 0$ es evidentemente $[e, \infty)$.

Ahora resuelva el problema 35 ◁

PROBLEMAS 10.4

En los problemas del 1 al 26, resuelva las desigualdades por medio de la técnica estudiada en esta sección.

1. $x^2 - 3x - 4 > 0$
2. $x^2 - 8x + 15 > 0$
3. $x^2 - 3x - 10 \leq 0$
4. $15 - 2x - x^2 \geq 0$
5. $2x^2 + 11x + 14 < 0$
6. $x^2 - 4 < 0$
7. $x^2 + 4 < 0$
8. $2x^2 - x - 2 \leq 0$
9. $(x + 1)(x - 2)(x + 7) \leq 0$
10. $(x + 5)(x + 2)(x - 7) \leq 0$
11. $-x(x - 5)(x + 4) > 0$
12. $(x + 2)^2 > 0$
13. $x^3 + 4x \geq 0$
14. $(x + 3)^2(x^2 - 4) < 0$
15. $x^3 + 8x^2 + 15x \leq 0$
16. $x^3 + 6x^2 + 9x < 0$
17. $\dfrac{x}{x^2 - 9} < 0$
18. $\dfrac{x^2 - 1}{x} < 0$
19. $\dfrac{3}{x + 1} \geq 0$
20. $\dfrac{3}{x^2 - 5x + 6} > 0$
21. $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 + 4x - 5} \geq 0$
22. $\dfrac{x^2 + 4x - 5}{x^2 + 3x + 2} \leq 0$
23. $\dfrac{3}{x^2 + 6x + 5} \leq 0$
24. $\dfrac{3x + 2}{(x - 1)^2} \leq 0$
25. $x^2 + 2x \geq 2$
26. $x^4 - 16 \geq 0$

27. Ingresos Suponga que los consumidores compran q unidades de un producto cuando el precio de *cada* unidad es de $28 - 0.2q$. ¿Cuántas unidades deben venderse para que el ingreso sea al menos de $750?

28. Administración forestal Una compañía maderera posee un bosque cuya forma es rectangular y mide 1×2 millas. La compañía quiere cortar una franja uniforme de árboles a lo largo de los lados externos del bosque. ¿Qué tan ancha debe ser la franja si se quiere conservar al menos $1\frac{5}{16}$ mi^2 de bosque?

29. Diseño de contenedor Un fabricante de contenedores desea hacer una caja sin tapa y para ello corta un cuadrado de 3 por 3 pulgadas en cada esquina de una hoja cuadrada de aluminio y luego dobla hacia arriba los lados. La caja debe contener al menos 192 pulg^3. Encuentre las dimensiones de la hoja de aluminio más pequeña que pueda utilizarse.

30. Participación en talleres Imperial Education Services (IES) ofrece un curso de procesamiento de datos al personal clave de la compañía Zeta. El precio por persona es de $50 y la compañía Zeta garantiza que al menos habrá 50 asistentes. Suponga que el IES ofrece reducir el costo para *todos* en $0.50 por cada persona que asista después de las primeras 50. ¿Cuál es el límite del tamaño del grupo que el IES aceptará de modo que el ingreso total nunca sea menor que lo recibido por 50 personas?

31. Grafique $f(x) = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$x^3 + 7x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

32. Grafique $f(x) = \dfrac{3x^2 - 0.5x + 2}{6.2 - 4.1x}$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$\frac{3x^2 - 0.5x + 2}{6.2 - 4.1x} > 0$$

Una manera novedosa de resolver una desigualdad no lineal como $f(x) > 0$ es por inspección de la gráfica de $g(x) = f(x)/|f(x)|$, cuyo rango consiste sólo en 1 y −1:

$$g(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|} = \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) > 0 \\ -1 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

La solución de $f(x) > 0$ consiste en todos los intervalos para los cuales $g(x) = 1$. Resuelva las desigualdades de los problemas 33 y 34 con esta técnica.

33. $6x^2 - x - 2 > 0$

34. $\dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + x - 6} < 0$

35. Grafique $x \ln x - x$. ¿La función parece ser continua? ¿Apoya la gráfica las conclusiones del ejemplo 5? ¿En qué valor la función parece tener un mínimo?

36. Grafique e^{-x^2}. ¿La función parece ser continua? ¿La conclusión puede confirmarse mediante la invocación de hechos sobre las funciones continuas? ¿En qué valor la función parece tener un máximo?

Repaso del capítulo 10

Términos y símbolos importantes

		Ejemplos
Sección 10.1	**Límites**	
	$\lim_{x\to a} f(x) = L$	Ej. 8, p. 466
Sección 10.2	**Límites (*continuación*)**	
	$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$	Ej. 1, p. 470
	$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$	Ej. 3, p. 471
Sección 10.3	**Continuidad**	
	continua en a discontinua en a	Ej. 3, p. 478
	continua en un intervalo continua en su dominio	Ej . 4, p. 479
Sección 10.4	**Continuidad aplicada a desigualdades**	
	diagrama de signos	Ej. 1, p. 483

Resumen

La noción de límite es el fundamento del cálculo. Decir que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ significa que los valores de $f(x)$ pueden acercarse mucho al número L cuando se selecciona una x lo suficientemente cerca, pero diferente, de a. Si $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen y c es una constante, entonces:

1. $\lim_{x\to a} c = c$
2. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$
3. $\lim_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
4. $\lim_{x\to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$
5. $\lim_{x\to a} [cf(x)] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$
6. $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$,
7. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$
8. Si f es una función polinomial, entonces $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

La propiedad 8 significa que el límite de una función polinomial, cuando $x \to a$, puede encontrarse con sólo evaluar el polinomio en a. Sin embargo, con otras funciones f, la evaluación en a puede conducir a la forma indeterminada 0/0. En tales casos, mediante operaciones algebraicas como factorización y cancelación, puede producirse una función g que concuerde con f, para $x \neq a$, y para la cual sea posible determinar el límite.

Si $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a por la derecha, entonces se escribe $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$. Si $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a por la izquierda, entonces se escribe $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$. Estos límites se llaman límites unilaterales.

El símbolo de infinito ∞, que no representa un número, se utiliza para describir límites. El enunciado

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

significa que cuando x crece indefinidamente, los valores de $f(x)$ se aproximan al número L. Una proposición similar se aplica cuando $x \to -\infty$, lo cual significa que x disminuye indefinidamente. En general, si $p > 0$, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^p} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^p} = 0$$

Si $f(x)$ aumenta indefinidamente cuando $x \to a$, entonces se escribe $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$. De manera similar, si $f(x)$ disminuye indefinidamente, se tiene $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Decir que el límite de una función es ∞ (o $-\infty$) no significa que el límite exista; es una manera de decir que el límite no existe y decir *por qué* no hay límite.

Existe una regla para evaluar el límite de una función racional (cociente de polinomios) cuando $x \to \infty$ o $-\infty$. Si $f(x)$ es una función racional y $a_n x^n$ y $b_m x^m$ son los términos en el numerador y el denominador, respectivamente, que tienen las potencias más grandes de x, entonces

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

y

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

En particular, cuando $x \to \infty$ o $-\infty$, el límite de un polinomio es el mismo que el límite del término que tiene la potencia más grande de x. Esto significa que para un polinomio no constante, cuando $x \to \infty$ o $-\infty$ el límite es ∞ o bien $-\infty$.

Una función f es continua en a si y sólo si

1. $f(a)$ existe.
2. $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

De manera geométrica, esto significa que la gráfica de f no se interrumpe cuando $x = a$. Si una función no es continua en a, entonces se dice que es discontinua en a. Las funciones polinomiales y las funciones racionales son continuas en sus dominios. Por lo tanto, las funciones polinomiales no tienen discontinuidades y las funciones racionales son discontinuas sólo en los puntos donde su denominador es cero.

Para resolver la desigualdad $f(x) > 0$ (o $f(x) < 0$), primero se encuentran las raíces reales de $f(x) = 0$ y los valores de x para los cuales f es discontinua. Estos valores determinan intervalos y, en cada intervalo, $f(x)$ siempre es positiva o siempre es negativa. Para encontrar el signo en cualquiera de estos intervalos, basta con determinar el signo de $f(x)$ en cualquier punto del intervalo. Después que los signos se determinan para todos los intervalos y se ensamblan en un diagrama de signos, es fácil dar la solución de $f(x) > 0$ (o $f(x) < 0$).

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 28, encuentre los límites, si existen. Si el límite no existe, indíquelo así o utilice el símbolo ∞ o $-\infty$ donde sea apropiado.

1. $\lim_{x\to -1} (2x^2 + 6x - 1)$

2. $\lim_{x\to 0} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{2x^2 - 2}$

3. $\lim_{x\to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$

4. $\lim_{x\to -4} \dfrac{2x + 3}{x^2 - 4}$

5. $\lim_{h\to 0} (x + h)$

6. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$

7. $\lim_{x\to -4} \dfrac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 2x - 8}$

8. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x^2 + x - 6}$

9. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2}{x + 1}$

10. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2 + 1}{2x^2}$

11. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{2x + 5}{7x - 4}$

12. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x^4}$

13. $\lim_{t\to 4} \dfrac{3t - 4}{t - 4}$

14. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x^6}{x^5}$

15. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{x + 3}{1 - x}$

16. $\lim_{x\to 4} \sqrt[3]{64}$

17. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^2 - 1}{(3x + 2)^2}$

18. $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$

19. $\lim_{x\to 3^-} \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$

20. $\lim_{x\to 2} \dfrac{2 - x}{x - 2}$

21. $\lim_{x\to \infty} \sqrt{3x}$

22. $\lim_{y\to 5^+} \sqrt{y - 5}$

23. $\lim_{x\to \infty} \dfrac{x^{100} + (1/x^4)}{e - x^{96}}$

24. $\lim_{x\to -\infty} \dfrac{ex^2 - x^4}{31x - 2x^3}$

25. $\lim_{x\to 1} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$

26. $\lim_{x\to 3} f(x)$ si $f(x) = \begin{cases} x + 5 & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$

27. $\lim_{x\to 4^+} \dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{4 - x}$ (*Sugerencia:* Para $x > 4$, $\sqrt{x^2 - 16} = \sqrt{x - 4}\sqrt{x + 4}$).

28. $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x} - 3}$ (*Sugerencia:* Para $x > 3$, $\dfrac{x - 3}{\sqrt{x - 3}} = \sqrt{x - 3}$).

29. Si $f(x) = 8x - 2$, encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

30. Si $f(x) = 2x^2 - 3$, encuentre $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

31. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad del huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, entonces el número de parásitos presentes a lo largo de cierto periodo es

$$y = 23\left(1 - \frac{1}{1 + 2x}\right)$$

Si la densidad del huésped aumentara indefinidamente, ¿a qué valor se aproximaría y?

32. Relación presa-depredador Para una relación particular de presa-depredador, se determinó que el número y de presas consumidas por un depredador a lo largo de cierto periodo fue una función de la densidad de presas x (el número de presas por unidad de área). Suponga que

$$y = f(x) = \frac{10x}{1 + 0.1x}$$

Si la densidad de presas aumentara indefinidamente, ¿a qué valor se aproximaría y?

33. Mediante la definición de *continuidad*, demuestre que la función $f(x) = x + 3$ es continua en $x = 2$.

34. Mediante la definición de *continuidad*, demuestre que la función $f(x) = \dfrac{x - 5}{x^2 + 2}$ es continua en $x = 5$.

35. Establezca si $f(x) = x^2/5$ es continua en cada número real. Dé una razón para su respuesta.

36. Establezca si $f(x) = x^2 - 2$ es continua en todas partes. Dé una razón para su respuesta.

En los problemas del 37 al 44, encuentre los puntos de discontinuidad (si los hay) para cada función.

37. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 3}$

38. $f(x) = \dfrac{0}{x^2}$

39. $f(x) = \dfrac{x - 1}{2x^2 + 3}$

40. $f(x) = (2 - 3x)^3$

41. $f(x) = \dfrac{4 - x^2}{x^2 + 3x - 4}$

42. $f(x) = \dfrac{2x + 6}{x^3 + x}$

43. $f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & \text{si } x > 2 \\ 3x + 5 & \text{si } x \le 2 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$

En los problemas del 45 al 52, resuelva las desigualdades dadas.

45. $x^2 + 4x - 12 > 0$

46. $3x^2 - 3x - 6 \leq 0$

47. $x^5 \leq 7x^4$

48. $x^3 + 9x^2 + 14x < 0$

49. $\dfrac{x+5}{x^2-1} < 0$

50. $\dfrac{x(x+5)(x+8)}{3} < 0$

51. $\dfrac{x^2+3x}{x^2+2x-8} \geq 0$

52. $\dfrac{x^2-9}{x^2-16} \leq 0$

53. Grafique $f(x) = \dfrac{x^3+3x^2-19x+18}{x^3-2x^2+x-2}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x\to 2} f(x)$.

54. Grafique $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$. A partir de la gráfica, estime $\lim_{x\to 1} f(x)$.

55. Grafique $f(x) = x \ln x$. Con base en la gráfica, estime el límite unilateral $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.

56. Grafique $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{(e^x+1)(e^{2x}-e^x)}$. Utilice la gráfica para estimar $\lim_{x\to 0} f(x)$.

57. Grafique $f(x) = x^3 - x^2 + x - 6$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$x^3 - x^2 + x - 6 \geq 0$$

58. Grafique $f(x) = \dfrac{x^5-4}{x^3+1}$. Utilice la gráfica para determinar la solución de

$$\frac{x^5-4}{x^3+1} \leq 0$$

EXPLORE Y AMPLÍE Deuda nacional

El tamaño de la deuda nacional de Estados Unidos es de gran interés para muchas personas y con frecuencia constituye un tema sobre el cual se habla en las noticias. La magnitud de la deuda afecta la confianza en la economía de Estados Unidos tanto de inversionistas nacionales como de extranjeros, funcionarios empresariales y líderes políticos. Hay quienes creen que, para reducir su deuda, el gobierno debería disminuir los gastos, lo cual afectaría los programas de gobierno; o bien aumentar sus ingresos, posiblemente a través de un aumento en los impuestos.

Suponga que es posible reducir esta deuda continuamente a una tasa anual fija. Esto es similar al concepto de interés compuesto continuamente, como se estudió antes en el capítulo 5, salvo que en lugar de agregar interés a una cantidad a cada instante, se restaría la deuda a cada instante. A continuación se estudiará cómo podría modelarse esta situación.

Suponga que la deuda D_0 se reduce a una tasa anual r en el instante $t = 0$. Además, suponga que hay k periodos de igual extensión en un año. Al final del primer periodo, la deuda original se reduce en $D_0\left(\frac{r}{k}\right)$, de modo que la nueva deuda es

$$D_0 - D_0\left(\frac{r}{k}\right) = D_0\left(1 - \frac{r}{k}\right)$$

Al final del segundo periodo, esta deuda se reduce en $D_0\left(1-\frac{r}{k}\right)\frac{r}{k}$ de modo que la nueva deuda es

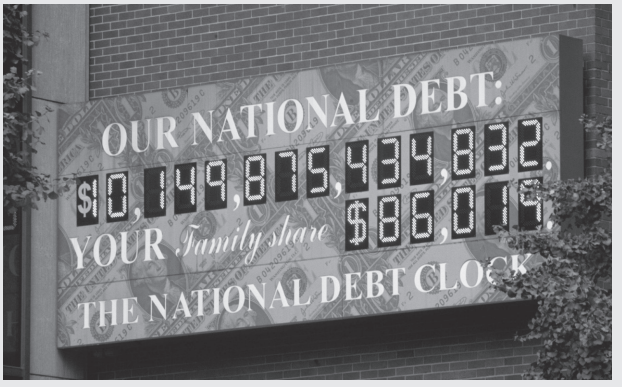
$$\begin{aligned} &D_0\left(1-\frac{r}{k}\right) - D_0\left(1-\frac{r}{k}\right)\frac{r}{k} \\ &= D_0\left(1-\frac{r}{k}\right)\left(1-\frac{r}{k}\right) \\ &= D_0\left(1-\frac{r}{k}\right)^2 \end{aligned}$$

El patrón continúa. Al final del tercer periodo la deuda es $D_0\left(1-\frac{r}{k}\right)^3$, y así sucesivamente. Al término de t años, el número de periodos es kt y la deuda es $D_0\left(1-\frac{r}{k}\right)^{kt}$. Si la deuda se redujera a cada instante, entonces $k \to \infty$. Así, se desea encontrar

$$\lim_{k\to\infty} D_0\left(1-\frac{r}{k}\right)^{kt}$$

que puede reescribirse como

$$D_0\left[\lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{r}{k}\right)^{-k/r}\right]^{-rt}$$



Si establecemos $x = -r/k$, entonces la condición $k \to \infty$ implica que $x \to 0$. De modo que el límite dentro de los corchetes tiene la forma $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$, que, tal como se estudió en la sección 10.1, es e. Por lo tanto, si en el instante $t = 0$ la deuda D_0 se reduce continuamente a una tasa anual r, entonces t años después la deuda D está dada por

$$D = D_0 e^{-rt}$$

Por ejemplo, suponga que Estados Unidos tenía una deuda de \$11 195 mil millones (redondeada al millar de millones más cercano) a mediados de abril de 2009 y una tasa de reducción continua de 3% anual. Entonces, dentro de t años contados a partir de ahora, la deuda está dada por

$$D = 11\,195e^{-0.03t}$$

en la cual D está en miles de millones. Esto significa que dentro de 10 años, la deuda será de $11\,195e^{-0.03} \approx \$8293$ mil millones. En la figura 10.46 se muestra la gráfica de $D = 11\,195e^{-rt}$ para varias tasas r. Por supuesto, entre mayor sea el valor de r, más rápida será la reducción de la deuda. Observe

que para $r = 0.03$, al final de 30 años la deuda aún es considerable (aproximadamente \$4552 mil millones).

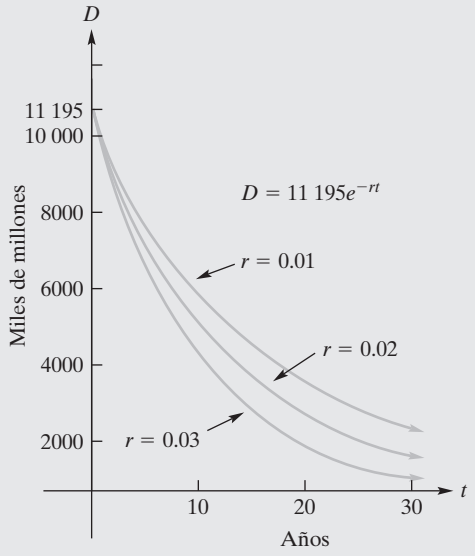


FIGURA 10.46 Presupuesto de deuda reducida de manera continua.

Es interesante observar que los elementos radiactivos que decaen también siguen el modelo de reducción continua de la deuda $D = D_0e^{-rt}$.

Para investigar sobre la situación actual de la deuda nacional de Estados Unidos, visite uno de los seguidores de esta deuda en Internet. Teclee "national debt clock" en un buscador web.

Problemas

En los problemas siguientes, suponga una deuda estadounidense actual de \$11 195 mil millones.

1. Si la deuda se redujera a \$10 000 miles de millones dentro de un año, ¿qué tasa anual de reducción continua de la deuda estaría implicada? Redondee su respuesta al porcentaje más cercano.

2. Para una reducción continua de deuda a una tasa anual de 3%, determine el número de años necesarios, contados a partir de ahora, para que la deuda se reduzca a la mitad. Redondee su respuesta al año más cercano.

3. ¿Qué supuestos fundamentan un modelo de reducción de deuda que utiliza una función exponencial?