11 Diferenciación

Por lo general, en una zona de pesca, las regulaciones del gobierno limitan el número de peces que pueden pescar los barcos de pesca comerciales por temporada. Esto evita la pesca excesiva, que agota la población de peces y deja, a la larga, pocos peces que capturar.

Desde una perspectiva estrictamente comercial, la regulación ideal permitiría obtener un máximo en el número de peces disponibles cada año para la pesca. La clave para determinar las regulaciones ideales es la función matemática llamada curva de reproducción. Para un hábitat de peces, esta función estima la población de peces de un año al siguiente, $P(n + 1)$, con base en la población actual, $P(n)$, suponiendo que no hay intervención externa como pesca o influencia de depredadores.

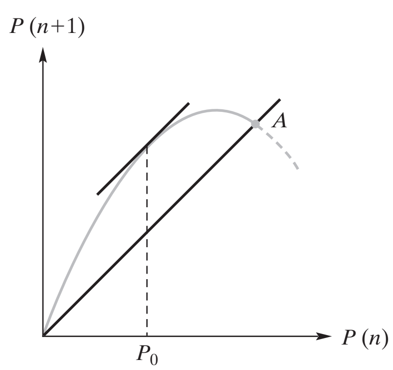
La figura que se presenta abajo a la izquierda muestra una curva común de reproducción; en la figura también está graficada la recta $P(n + 1) = P(n)$, a lo largo de la cual las poblaciones $P(n)$ y $P(n + 1)$ serían iguales. Observe la intersección de la curva con la recta en el punto A. Éste es el punto donde, a consecuencia de la gran aglomeración que hay en el hábitat, la población alcanza su tamaño máximo sostenible. Una población que tiene este tamaño en un año, tendrá el mismo tamaño el año siguiente.

Para cualquier punto situado en el eje horizontal, la distancia entre la curva de reproducción y la recta $P(n + 1) = P(n)$ representa la pesca sostenible: el número de peces que pueden ser atrapados, después que las crías han crecido hasta madurar, de modo que al final la población regrese al mismo tamaño que tenía un año antes.

Desde el punto de vista comercial, el tamaño de población óptimo es aquél donde la distancia entre la curva de reproducción y la recta $P(n + 1) = P(n)$ es máxima. Esta condición se cumple donde las pendientes de la curva de reproducción y la recta $P(n + 1) = P(n)$ son iguales. [Por supuesto, la pendiente de $P(n + 1) = P(n)$ es 1]. Así, para una cosecha de peces máxima año tras año, las regulaciones deben tener como objetivo mantener la población de peces muy cerca de P_0.

Aquí, una idea central es la de la pendiente de una curva en un punto dado. Esta idea es la piedra angular del presente capítulo.

En este momento iniciaremos nuestro estudio del cálculo. Las ideas involucradas en cálculo son totalmente diferentes a las de álgebra y geometría. La fuerza e importancia de estas ideas y de sus aplicaciones se aclararán más adelante en el libro. En este capítulo se introducirá la *derivada* de una función, así como las reglas importantes para encontrar derivadas. También se analizará el uso de la derivada para analizar la razón de cambio de una cantidad, tal como la razón a la cual cambia la posición de un cuerpo.



Objetivo

Desarrollar la idea de una recta que es tangente a una curva, definir la pendiente de una curva, definir una derivada y darle una interpretación geométrica. Calcular derivadas mediante el uso de la definición de límite.

11.1 La derivada

El problema principal del cálculo diferencial consiste en encontrar la pendiente de la *recta tangente* en un punto situado sobre una curva. Quizá en la clase de geometría de bachillerato vio usted que una recta tangente, o *tangente*, a un círculo es una recta que toca al círculo en un solo punto exacto (figura 11.1). Sin embargo, esta idea de una tangente no es muy útil en otras clases de curvas. Por ejemplo, en la figura 11.2a), las rectas L_1 y L_2 intersecan a la curva en exactamente un solo punto, P. Aunque L_2 no se vería como la tangente en este punto, parece natural que L_1 sí lo sea. En la figura 11.2b) se podría considerar de manera intuitiva que L_3 es la tangente en el punto P, aunque L_3 interseca a la curva en otros puntos.

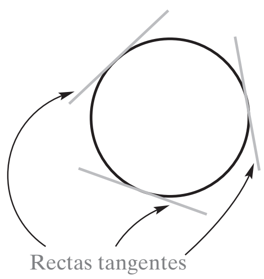
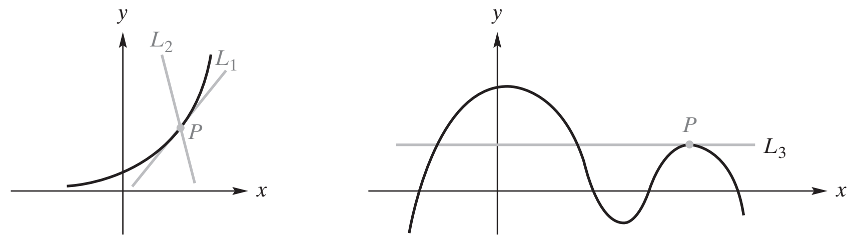


FIGURA 11.1 Rectas tangentes a un círculo.



L_1 es una recta tangente en P, pero L_2 no lo es.

a)

L_3 es una recta tangente en P.

b)

FIGURA 11.2 Recta tangente en un punto.

En los ejemplos anteriores, puede verse que la idea de que una tangente es simplemente una línea que interseca una curva en sólo un punto resulta inadecuada. Para obtener una definición conveniente de recta tangente, se utiliza el concepto de límite y la noción geométrica de *recta secante*. Una **recta secante** es una línea que interseca una curva en dos o más puntos.

Observe la gráfica de la función $y = f(x)$ en la figura 11.3. Se desea definir la recta tangente en el punto P. Si Q es un punto diferente sobre la curva, la línea PQ es una recta secante. Si Q se desplaza a lo largo de la curva y se acerca a P por la derecha (vea la figura 11.4), PQ', PQ'', etc., son rectas secantes características. Si Q se acerca a P por la izquierda, PQ_1, PQ_2, etc., son las secantes. *En ambos casos, las rectas secantes se acercan a la misma posición límite*. Esta posición límite común de las rectas secantes se define como la **recta tangente** a la curva en P. Esta definición parece razonable y se aplica a las curvas en general, no sólo a los círculos.

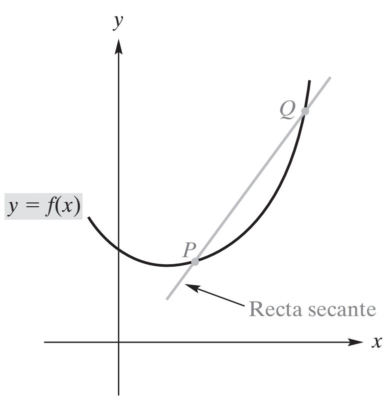


FIGURA 11.3 Recta secante PQ.

Una curva no necesariamente tiene una recta tangente en cada uno de sus puntos. Por ejemplo, la curva $y = |x|$ no tiene una tangente en $(0, 0)$. Como se puede ver en la figura 11.5, una recta secante que pasa por $(0, 0)$ y un punto cercano a su derecha en la curva, siempre será la recta $y = x$. Así, la posición límite de tales rectas secantes es también la recta

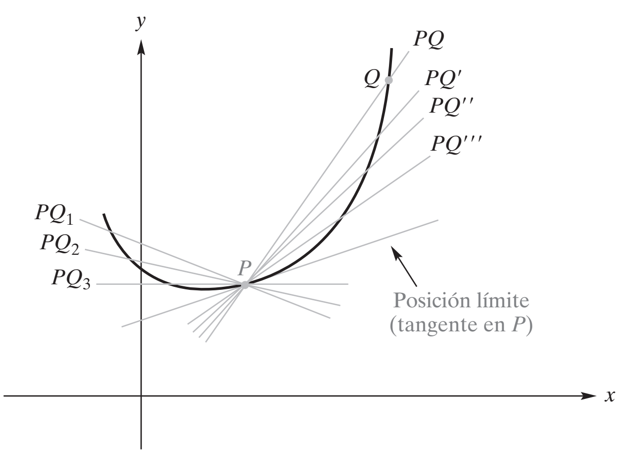


FIGURA 11.4 La recta tangente es una posición límite de las rectas secantes.

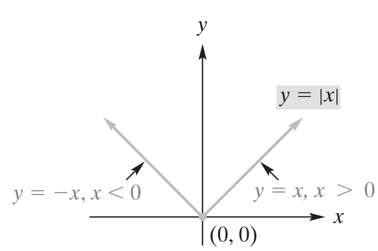


FIGURA 11.5 No hay recta tangente para la gráfica de $y = |x|$ en $(0, 0)$.

$y = x$. Sin embargo, una recta secante que pase por $(0, 0)$ y un punto cercano a su izquierda sobre la curva, siempre será la recta $y = -x$. Entonces, la posición límite de tales rectas secantes es también la recta $y = -x$. Como no existe una posición límite común, no hay una recta tangente en $(0, 0)$.

Ahora que se tiene una definición conveniente de la tangente a una curva en un punto, puede definirse la *pendiente de una curva* en un punto.

Definición

La **pendiente de una curva** en un punto P es la pendiente, en caso de que exista, de la recta tangente en P.

Como la tangente en P es una posición límite de las rectas secantes PQ, consideremos ahora la pendiente de la tangente como el valor límite de las pendientes de las rectas secantes conforme Q se aproxima a P. Por ejemplo, considere la curva $f(x) = x^2$ y las pendientes de algunas rectas secantes PQ, donde $P = (1, 1)$. Para el punto $Q = (2.5, 6.25)$, la pendiente de PQ (vea la figura 11.6) es

$$m_{PQ} = \frac{\text{elevación}}{\text{desplazamiento}} = \frac{6.25 - 1}{2.5 - 1} = 3.5$$

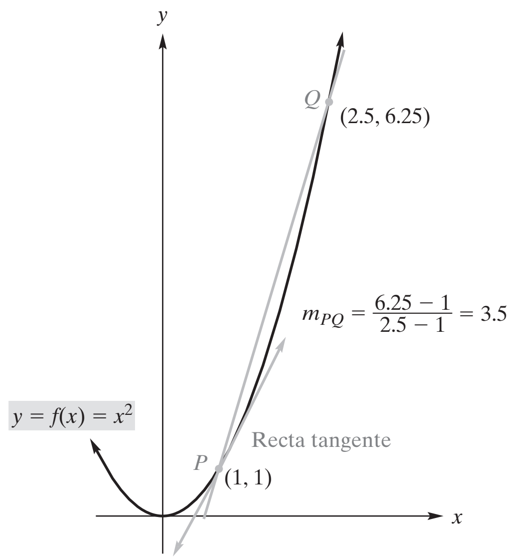


FIGURA 11.6 Recta secante a $f(x) = x^2$ que pasa por (1, 1) y (2.5, 6.25).

En la tabla 11.1 se incluyen otros puntos Q situados sobre la curva, así como las correspondientes pendientes de PQ. Observe que conforme Q se aproxima a P, las pendientes de las rectas secantes parecen aproximarse al valor 2. Entonces, puede esperarse que la pendiente de la recta tangente indicada en (1, 1) sea 2. Esto se confirmará más adelante en el ejemplo 1. Pero primero deseamos generalizar el procedimiento.

Tabla 11.1 **Pendientes de rectas secantes a la curva $f(x) = x^2$ en $P = (1, 1)$**

Q	Pendiente de PQ
(2.5, 6.25)	$(6.25 - 1)/(2.5 - 1) = 3.5$
(2, 4)	$(4 - 1)/(2 - 1) = 3$
(1.5, 2.25)	$(2.25 - 1)/(1.5 - 1) = 2.5$
(1.25, 1.5625)	$(1.5625 - 1)/(1.25 - 1) = 2.25$
(1.1, 1.21)	$(1.21 - 1)/(1.1 - 1) = 2.1$
(1.01, 1.0201)	$(1.0201 - 1)/(1.01 - 1) = 2.01$

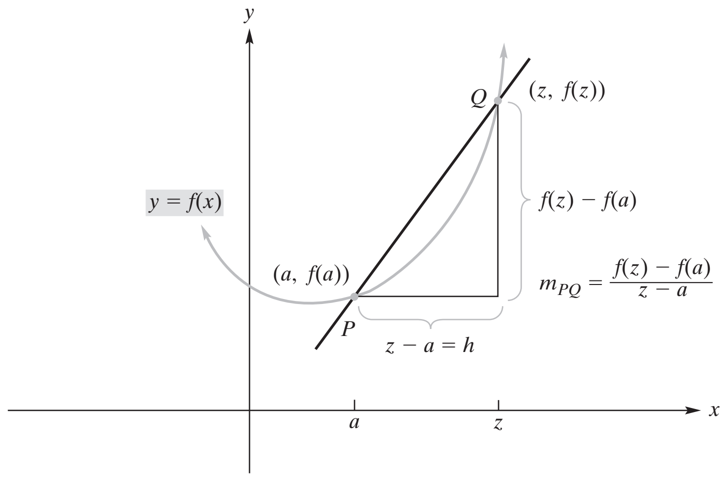


FIGURA 11.7 Recta secante que pasa por P y Q.

Para la curva $y = f(x)$ de la figura 11.7, se encontrará una expresión para la pendiente en el punto $P = (a, f(a))$. Si $Q = (z, f(z))$, la pendiente de la recta secante PQ es

$$m_{PQ} = \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Si le llamamos h a la diferencia $z - a$, entonces podemos escribir z como $a + h$. Aquí se debe tener $h \neq 0$, porque si $h = 0$, entonces $z = a$ y no existirá recta secante. De acuerdo con esto,

$$m_{PQ} = \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Cuál de estas dos formas sea la más conveniente para expresar m_{PQ} depende de la naturaleza de la función f. Conforme Q se desplaza a lo largo de la curva hacia P, z se aproxima a a. Esto significa que h se aproxima a cero. El valor límite de las pendientes de las rectas secantes —que es la pendiente de la recta tangente en $(a, f(a))$— es

$$m_{\tan} = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{1}$$

De nuevo, cuál de estas dos formas sea la más conveniente —cuál de los límites es más fácil de determinar— depende de la naturaleza de la función f. En el ejemplo 1, se usará este límite para confirmar la conclusión anterior de que la pendiente de la recta tangente a la curva $f(x)^2 = x^2$ en (1, 1) es igual a 2.

EJEMPLO 1 Determinación de la pendiente de una recta tangente

Encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x) = x^2$ en el punto $(1, 1)$.

Solución: La pendiente es el límite en la ecuación (1) con $f(x) = x^2$ y $a = 1$:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - (1)^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2 + h) = 2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la recta tangente a $y = x^2$ en $(1, 1)$ tiene pendiente igual a 2. (Vea la figura 11.6).

Ahora resuelva el problema 1 ◁

Es posible generalizar la ecuación (1) de manera que sea aplicable a cualquier punto $(x, f(x))$ ubicado sobre una curva. Si se reemplaza a por x se obtiene una función, llamada *derivada* de f, cuya entrada es x y cuya salida es la pendiente de la recta tangente a la curva en $(x, f(x))$, siempre que la recta tangente *exista* y *tenga* una pendiente. (Si la recta tangente existe pero es *vertical*, entonces no tiene pendiente). Así, se tiene la definición siguiente que constituye la base del cálculo diferencial:

Definición

La **derivada** de una función f es la función denotada como f' (se lee "f prima") y definida por

$$f'(x) = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{2}$$

siempre que este límite exista. Si $f'(a)$ puede encontrarse (quizá no todas las $f'(x)$ puedan encontrarse), se dice que f es ***diferenciable*** en a y a $f'(a)$ se le llama derivada de f en a o derivada de f con respecto a x en a. El proceso de encontrar la derivada se llama ***diferenciación***.

En la definición de la derivada, la expresión

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

donde $z = x + h$, se llama **cociente de diferencias**. Así, $f'(x)$ es el límite de un cociente de diferencias.

EJEMPLO 2 Uso de la definición para encontrar la derivada

Si $f(x) = x^2$, encuentre la derivada de f.

Para calcular una derivada por medio de la definición, se requiere precisión. Por lo general, el cociente de diferencias requiere de una manipulación considerable antes de realizar el paso del límite. Esto demanda que cada paso escrito vaya precedido por "$\lim_{h\to 0}$" para indicar que el paso del límite aún sigue pendiente. Observe que después de realizar el paso del límite, h ya no está presente.

Solución: Al aplicar la definición de una derivada se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x \end{aligned}$$

Observe que, al obtener el límite, se trata a x como una constante porque es h y no x la que está cambiando. Observe también que $f'(x) = 2x$ define una función de x, lo cual puede interpretarse como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en $(x, f(x))$. Por ejemplo, si $x = 1$, entonces la pendiente es $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2$, lo que confirma el resultado del ejemplo 1.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

¡ADVERTENCIA!

La notación $\frac{dy}{dx}$, que se denomina *notación de Leibniz*, **no** debe considerarse como una fracción, aunque lo parezca. Es sólo un símbolo para representar una derivada. Aún no le hemos dado un significado a símbolos individuales como dy y dx.

Además de la notación $f'(x)$, otras formas usadas para denotar a la derivada de $y = f(x)$ en x son

$\frac{dy}{dx}$	se lee "de y, de x"
$\frac{d}{dx}(f(x))$	"de $f(x)$, de x"
y'	y prima"
$D_x y$	("de x de y")
$D_x(f(x))$	("de x de $f(x)$")

Como la derivada proporciona la pendiente de la recta tangente, $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente para la gráfica de $y = f(x)$ en $(a, f(a))$.

Otras dos notaciones para la derivada de f en a son

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \quad \text{y} \quad y'(a)$$

EJEMPLO 3 **Determinación de una ecuación de una recta tangente**

Si $f(x) = 2x^2 + 2x + 3$, encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $(1, 7)$.

Solución:

Estrategia Primero se determinará la pendiente de la recta tangente calculando la derivada y evaluándola en $x = 1$. Mediante el uso de este resultado y del punto $(1, 7)$ en la forma punto-pendiente se obtiene una ecuación de la recta tangente.

En el ejemplo 3 ***no*** es correcto decir que, como la derivada es $4x + 2$, la recta tangente en $(1, 7)$ es $y - 7 = (4x + 2)(x - 1)$. (Esta ni siquiera es la ecuación de una recta). La derivada debe **evaluarse** en el punto de tangencia para determinar la pendiente de la recta tangente.

Se tiene,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(2(x+h)^2 + 2(x+h) + 3) - (2x^2 + 2x + 3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 2x + 2h + 3 - 2x^2 - 2x - 3}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{4xh + 2h^2 + 2h}{h} = \lim_{h\to 0} (4x + 2h + 2)
\end{aligned}$$

Por lo que,

$$f'(x) = 4x + 2$$

y

$$f'(1) = 4(1) + 2 = 6$$

Así, la recta tangente a la gráfica en $(1, 7)$ tiene pendiente de 6. Una forma punto-pendiente de esta tangente es

$$y - 7 = 6(x - 1)$$

cuya forma pendiente-intersección es

$$y = 6x + 1$$

Ahora resuelva el problema 25 ◁

EJEMPLO 4 **Determinación de la pendiente de una curva en un punto**

Encuentre la pendiente de la curva $y = 2x + 3$ en el punto donde $x = 6$.

Solución: La pendiente de la curva es la pendiente de la recta tangente. Si hacemos $y = f(x) = 2x + 3$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(2(x+h) + 3) - (2x + 3)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0} 2 = 2
\end{aligned}$$

Como $dy/dx = 2$, cuando $x = 6$, o de hecho en cualquier punto, la pendiente es 2. Observe que la curva es una línea recta que tiene la misma pendiente en cada punto.

Ahora resuelva el problema 19 ◁

EJEMPLO 5 **Una función con una recta tangente vertical**

Encuentre $\frac{d}{dx}(\sqrt{x})$.

Solución: Al hacer $f(x) = \sqrt{x}$, se tiene

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

Para calcular límites, con frecuencia es útil racionalizar los numeradores o denominadores de las fracciones.

Cuando $h \to 0$, tanto el numerador como el denominador tienden a cero. Esto puede evitarse racionalizando el *numerador*:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &= \frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim \frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

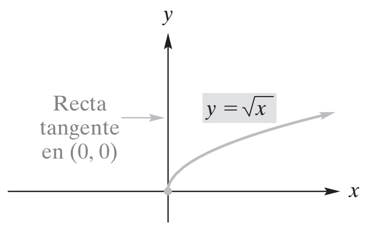


FIGURA 11.8 Recta tangente vertical en (0, 0).

Observe que la función original, $\sqrt{x}$, está definida para $x \geq 0$, pero su derivada $1/(2\sqrt{x})$, está definida sólo cuando $x > 0$. La razón para esto resulta evidente a partir de la gráfica de $y = \sqrt{x}$ mostrada en la figura 11.8. Cuando $x = 0$, la tangente es una recta vertical, por lo que su pendiente no está definida.

Ahora resuelva el problema 17 ◁

En el ejemplo 5 se vio que la función $y = \sqrt{x}$ no es diferenciable cuando $x = 0$, ya que la recta tangente es vertical en ese punto. Vale la pena mencionar que $y = |x|$ tampoco es diferenciable cuando $x = 0$, pero por una razón diferente: *no* existe recta tangente en ese punto. (Vea la figura 11.5). Ambos ejemplos muestran que el dominio de f' debe estar estrictamente contenido en el dominio de f.

Con frecuencia, resulta más natural utilizar variables diferentes a x y y en los problemas aplicados. El tiempo, denotado por t, la cantidad, por q, y el precio, por p, son ejemplos obvios. Lo anterior se ilustra en el ejemplo 6.

Con frecuencia, la notación de Leibniz es útil para indicar una derivada porque hace énfasis en las variables independiente y dependiente implicadas. Por ejemplo, si la variable p es una función de la variable q, se habla de la derivada de p con respecto a q, que se escribe como dp/dq.

APLÍQUELO ▶

1. Si una pelota se lanza hacia arriba a una velocidad de 40 pies/s desde una altura de 6 pies, su altura H en pies después de t segundos está dada por $H = 6 + 40t - 16t^2$. Encuentre $\frac{dH}{dt}$.

EJEMPLO 6 Determinación de la derivada de p con respecto a q

Si $p = f(q) = \frac{1}{2q}$, encuentre $\frac{dp}{dq}$.

Solución: Este problema se resolverá primero usando el límite $h \to 0$ (el único que se ha utilizado hasta ahora) y después se empleará $r \to q$ para ilustrar la otra variante del límite.

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dq} &= \frac{d}{dq}\left(\frac{1}{2q}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f(q+h)-f(q)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2(q+h)}-\frac{1}{2q}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{q-(q+h)}{2q(q+h)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{q-(q+h)}{h(2q(q+h))} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h(2q(q+h))}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{2q(q+h)} = -\frac{1}{2q^2}\end{aligned}$$

También se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dq} &= \lim_{r\to q}\frac{f(r)-f(q)}{r-q}\\ &= \lim_{r\to q}\frac{\frac{1}{2r}-\frac{1}{2q}}{r-q} = \lim_{r\to q}\frac{\frac{q-r}{2rq}}{r-q}\\ &= \lim_{r\to q}\frac{-1}{2rq} = \frac{-1}{2q^2}\end{aligned}$$

Se deja a criterio del lector decidir cuál de las dos formas conduce al cálculo más simple del límite en este caso.

Observe que cuando $q = 0$ la función no está definida, así que la derivada tampoco está definida cuando $q = 0$.

Ahora resuelva el problema 15 ◁

Tenga en mente que la derivada de $y = f(x)$ en x no es otra cosa que un límite, a saber

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

de manera equivalente

$$\lim_{z\to x} \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

cuyo uso acabamos de ilustrar. Aunque la derivada puede interpretarse como una función que da la pendiente de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$, esta interpretación sólo es una convención geométrica que nos ayuda a entender su significado. El límite anterior puede existir independientemente de cualquier consideración geométrica. Como se verá después, existen otras interpretaciones útiles de la derivada.

En la sección 11.4, se hará uso técnico de la siguiente relación entre diferenciabilidad y continuidad. Sin embargo, es de importancia fundamental y necesita entenderse desde el principio.

Si f es diferenciable en a, entonces f es continua en a.

Para establecer este resultado, se supondrá que f es diferenciable en a. Entonces $f'(a)$ existe y

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

Considere el numerador $f(a+h) - f(a)$ cuando $h \to 0$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} (f(a+h)-f(a)) &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot h\right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} h \\
&= f'(a) \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{h\to 0}(f(a+h)) - f(a)) = 0$. Esto significa que $f(a+h) - f(a)$ tiende a 0 cuando $h \to 0$. En consecuencia,

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

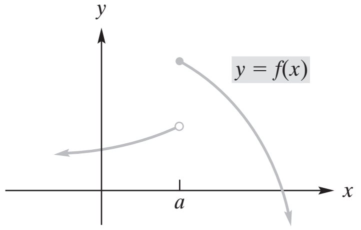


FIGURA 11.9 f no es continua en a, entonces f no es diferenciable en a.

Como se estableció en la sección 10.3, esta condición significa que f es continua en a. Entonces, lo anterior prueba que f es continua en a cuando f es diferenciable ahí. De manera más simple, se dice que la **diferenciabilidad en un punto implica continuidad en dicho punto**.

Si una función no es continua en un punto, entonces no puede tener una derivada ahí. Por ejemplo, la función de la figura 11.9 es discontinua en a. La curva no tiene tangente en ese punto, por lo tanto la función no es diferenciable ahí.

EJEMPLO 7 Continuidad y diferenciabilidad

a. Sea $f(x) = x^2$. La derivada, $2x$, está definida para todos los valores de x, de manera que $f(x) = x^2$ debe ser continua para todos los valores de x.

b. La función $f(p) = \dfrac{1}{2p}$ no es continua en $p = 0$ porque f no está definida ahí. Así que la derivada no existe en $p = 0$.

◁

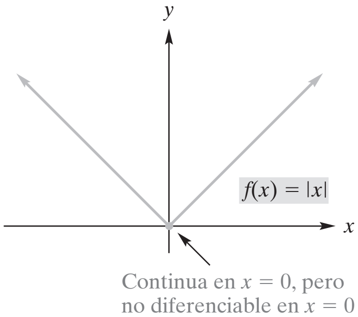


FIGURA 11.10 La continuidad no implica diferenciabilidad.

La inversión del enunciado de que la diferenciabilidad implica continuidad es *falsa*. Es decir, la continuidad no implica diferenciabilidad. En el ejemplo 8 se verá una función que es continua en un punto, pero que no es diferenciable ahí.

EJEMPLO 8 Continuidad no implica diferenciabilidad

La función $y = f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$. (Vea la figura 11.10). Como se mencionó antes, no existe una recta tangente en $x = 0$. Por lo tanto, no existe derivada ahí. Esto muestra que la continuidad *no* implica diferenciabilidad.

◁

Por último, es importante hacer la observación de que mientras que la diferenciabilidad de f en a implica continuidad de f en a, la función derivada, f', no es necesariamente continua en a. Desafortunadamente, el ejemplo clásico está construido a partir de una función que no se considera en este libro.

PROBLEMAS 11.1

En los problemas 1 y 2, se da una función f y un punto P sobre su gráfica.

(a) *Encuentre la pendiente de la recta secante PQ para cada punto $Q = (x, f(x))$ cuyo valor x está dado en la tabla. Redondee sus respuestas a cuatro decimales.*

(b) *Use sus resultados del inciso (a) para estimar la pendiente de la recta tangente en P.*

1. $f(x) = x^3 + 3, P = (-2, -5)$

Valor x de Q	-3	-2.5	-2.2	-2.1	-2.01	-2.001
m_{PQ}						

2. $f(x) = e^x, P = (0, 1)$

Valor x de Q	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
m_{PQ}						

En los problemas del 3 al 18, emplee la definición de la derivada para encontrarla en cada caso.

3. $f'(x)$ si $f(x) = x$
4. $f'(x)$ si $f(x) = 4x - 1$
5. $\frac{dy}{dx}$ si $y = 3x + 5$
6. $\frac{dy}{dx}$ si $y = -5x$
7. $\frac{d}{dx}(3 - 2x)$
8. $\frac{d}{dx}\left(1 - \frac{x}{2}\right)$
9. $f'(x)$ si $f(x) = 3$
10. $f'(x)$ si $f(x) = 7.01$
11. $\frac{d}{dx}(x^2 + 4x - 8)$
12. y' si $y = x^2 + 3x + 2$
13. $\frac{dp}{dq}$ si $p = 3q^2 + 2q + 1$
14. $\frac{d}{dx}(x^2 - x - 3)$
15. y' si $y = \frac{6}{x}$
16. $\frac{dC}{dq}$ si $C = 7 + 2q - 3q^2$
17. $f'(x)$ si $f(x) = \sqrt{2x}$
18. $H'(x)$ si $H(x) = \frac{3}{x - 2}$
19. Encuentre la pendiente de la curva $y = x^2 + 4$ en el punto $(-2, 8)$.
20. Encuentre la pendiente de la curva $y = 1 - x^2$ en el punto $(1, 0)$.
21. Encuentre la pendiente de la curva $y = 4x^2 - 5$ cuando $x = 0$.
22. Encuentre la pendiente de la curva $y = \sqrt{2x}$ cuando $x = 18$.

En los problemas del 23 al 28, encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

23. $y = x + 4$; (3, 7)
24. $y = 3x^2 - 4$; $(1, -1)$
25. $y = x^2 + 2x + 3$; (1, 6)
26. $y = (x - 7)^2$; (6, 1)
27. $y = \frac{4}{x + 1}$; (3, 1)
28. $y = \frac{5}{1 - 3x}$; $(2, -1)$

29. **Bancos** Algunas ecuaciones pueden incluir derivadas de funciones. En un artículo sobre desregulación de la tasa de interés, Christofi y Agapos[1] resuelven la ecuación

$$r = \left(\frac{\eta}{1 + \eta}\right)\left(r_L - \frac{dC}{dD}\right)$$

para η (letra griega "eta"). Aquí r es la tasa de depósito pagada por los bancos comerciales, r_L es la tasa ganada por estos bancos, C es el costo administrativo de transformar los depósitos en activos que pagan rendimiento, D es el nivel de los depósitos de ahorro y η es la elasticidad de los depósitos con respecto a la tasa de depósito. Encuentre η.

En los problemas 30 y 31, utilice la función "derivada numérica" de su calculadora gráfica para estimar las derivadas de las funciones en los valores indicados. Redondee sus respuestas a tres decimales.

30. $f(x) = \sqrt{2x^2 + 3x}$; $x = 1, x = 2$
31. $f(x) = e^x(4x - 7)$; $x = 0, x = 1.5$

En los problemas 32 y 33, utilice el enfoque del "límite del cociente de diferencias" para estimar $f'(x)$ en los valores indicados de x. Redondee sus respuestas a tres decimales.

32. $f(x) = x \ln x - x$; $x = 1, x = 10$
33. $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{x^3 - 3}$; $x = 2, x = -4$

[1] A. Christofi y A. Agapos, "Interest Rate Deregulation: An Empirical Justification", *Review of Business and Economic Research,* XX, núm. 1 (1984), pp. 39-49.

34. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 + x$ en el punto $(-2, 2)$. Grafique la curva y la recta tangente. Observe que la recta tangente es una buena aproximación a la curva cerca del punto de tangencia.

35. La derivada de $f(x) = x^3 - x + 2$ es $f'(x) = 3x^2 - 1$. Grafique f y su derivada f'. Observe que hay dos puntos sobre la gráfica de f donde la recta tangente es horizontal. Para los valores x de esos puntos, ¿cuáles son los valores correspondientes de $f'(x)$? ¿Por qué se esperan esos resultados? Observe los intervalos en los que $f'(x)$ es positiva. Note que las rectas tangentes a la gráfica de f tienen pendientes positivas en esos intervalos. Observe el intervalo donde $f'(x)$ es negativa. Note que las rectas tangentes a la gráfica de f tienen pendientes negativas en este intervalo.

En los problemas 36 y 37, verifique la identidad $(z - x)\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i}\right) = z^n - x^n$ *para los valores indicados de n y calcule la derivada usando la forma z → x de la definición de derivada que se dio en la ecuación (2).*

36. $n = 4, n = 3, n = 2$; $\quad f'(x)$ si $f(x) = 2x^4 + x^3 - 3x^2$

37. $n = 5, n = 3$; $\quad f'(x)$ si $f(x) = 4x^5 - 3x^3$

Objetivo

Desarrollar las reglas básicas para la diferenciación de funciones constantes y funciones de potencia, así como las reglas combinadas para diferenciar un múltiplo constante de una función y la suma de dos funciones.

11.2 Reglas para la diferenciación

La diferenciación de una función mediante el uso directo de la definición de la derivada puede ser tediosa. Sin embargo, si una función está construida a partir de funciones más simples, entonces la derivada de la función más complicada puede ser construida a partir de las derivadas de funciones más simples. En última instancia, sólo es necesario conocer las derivadas de algunas funciones básicas y las maneras de ensamblar derivadas de funciones construidas a partir de las derivadas de sus componentes. Por ejemplo, si las funciones f y g tienen derivadas de f' y g', respectivamente, entonces $f + g$ tiene una derivada dada por $(f + g)' = f' + g'$. Sin embargo, algunas *reglas* son menos intuitivas. Por ejemplo, si $f \cdot g$ denota la función cuyo valor en x está dado por $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, entonces $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$. En este capítulo se estudia la mayoría de estas reglas de combinación y algunas reglas básicas para calcular derivadas de ciertas funciones básicas.

Primero se mostrará que la derivada de una función constante es cero. Recuerde que la gráfica de una función constante $f(x) = c$ es una línea horizontal (vea la figura 11.11), la cual tiene pendiente nula en todo punto. Esto significa que $f'(x) = 0$, independientemente del valor de x. Como prueba formal de este resultado, se aplica la definición de la derivada a $f(x) = c$:

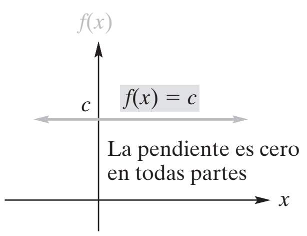


FIGURA 11.11 La pendiente de una función constante es 0.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \to 0} 0 = 0$$

De esta manera, se tiene la primera regla:

REGLA BÁSICA 0 Derivada de una constante

Si c es una constante, entonces

$$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Esto es, la derivada de una función constante es cero.

EJEMPLO 1 Derivadas de funciones constantes

a. $\frac{d}{dx}(3) = 0$ porque 3 es una función constante.

b. Si $g(x) = \sqrt{5}$, entonces $g'(x) = 0$ porque g es una función constante. Por ejemplo, la derivada de g cuando $x = 4$ es $g'(4) = 0$.

c. Si $s(t) = (1\,938\,623)^{807.4}$, entonces $ds/dt = 0$.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

La siguiente regla da una fórmula para la derivada de "x elevada a una potencia constante" —esto es, la derivada de $f(x) = x^a$, donde a es un número real arbitrario—. Una función que tenga esta forma se llama **función potencia**. Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es una función potencia. Aunque la regla enunciada es válida para todo número real a, se establecerá sólo para el caso en que a es un entero positivo, n. La regla es tan importante para el cálculo diferencial que justifica un desarrollo detallado —sólo en el caso donde a es un entero positivo, n—. Ya sea que se use la forma $h \to 0$ de la definición de derivada o la forma $z \to x$, el cálculo de $\dfrac{dx^n}{dx}$ resulta muy instructivo y proporciona una buena práctica con la notación de suma (notación sigma), cuyo uso es más esencial en capítulos posteriores. Se proporciona un cálculo para cada posibilidad. Como veremos, para usar la forma $h \to 0$ de la ecuación 2 de la sección 11.1, es necesario expandir $(x + h)^n$, y para emplear la forma $z \to x$, debe factorizarse $z^n - x^n$.

Para la primera de estas opciones se recuerda el *teorema binomial* de la sección 9.2:

$$(x+h)^n = \sum_{i=0}^{n} {}_nC_i x^{n-i} h^i$$

donde las ${}_nC_i$ son los coeficientes binomiales, cuyas descripciones precisas, excepto para ${}_nC_0 = 1$ y ${}_nC_1 = n$, no son necesarias aquí (pero están dadas en la sección 8.2). Para la segunda opción se tiene

$$(z-x)\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i}\right) = z^n - x^n$$

que se verifica de manera sencilla realizando la multiplicación y usando las reglas que se dieron en la sección 1.5 para manipular notaciones de suma. De hecho, se tiene

$$\begin{aligned}
(z-x)\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i}\right) &= z\sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i} - x\sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} x^{i+1} z^{n-1-i} \\
&= \left(z^n + \sum_{i=1}^{n-1} x^i z^{n-i}\right) - \left(\sum_{i=0}^{n-2} x^{i+1} z^{n-1-i} + x^n\right) \\
&= z^n - x^n
\end{aligned}$$

donde se deja al lector la verificación de que las notaciones de suma desde el segundo hasta el último renglón realmente se cancelan como se muestra.

REGLA BÁSICA 1 Derivada de x^a

Si a es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}$$

Esto es, la derivada de una potencia constante de x es igual al exponente multiplicado por x elevada a una potencia menor en una unidad que la de la potencia dada.

¡ADVERTENCIA!

En el cálculo, existe mucho más que esta regla.

Para una n que es un entero positivo, si $f(x) = x^n$, la definición de la derivada da

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

De acuerdo con el desarrollo anterior de $(x + h)^n$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{i=0}^{n} {}_nC_i x^{n-i} h^i - x^n}{h} \\
&\overset{(1)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} {}_nC_i x^{n-i} h^i}{h}
\end{aligned}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{h \displaystyle\sum_{i=1}^{n} {}_nC_i x^{n-i} h^{i-1}}{h}$$

$$\stackrel{(3)}{=} \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} {}_nC_i x^{n-i} h^{i-1}$$

$$\stackrel{(4)}{=} \lim_{h\to 0} \left(nx^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} {}_nC_i x^{n-i} h^{i-1} \right)$$

$$\stackrel{(5)}{=} nx^{n-1}$$

donde los pasos faltantes se justifican de la manera siguiente:

(1) En la notación de suma, el término $i = 0$ es ${}_nC_0 x^n h^0 = x^n$, de manera que se cancela con el último término separado: $-x^n$.
(2) Es posible extraer un factor común de h a partir de cada término de la suma.
(3) Este es el paso crucial. Las expresiones separadas por el signo de igual son límites, cuando $h \to 0$, de funciones de h que son iguales para $h \neq 0$.
(4) En la notación de suma, el término $i = 1$ es ${}_nC_1 x^{n-1} h^0 = nx^{n-1}$. Es el único que no contiene un factor de h y se separa de los otros términos.
(5) Por último, en la determinación del límite se utiliza el hecho de que el término aislado es independiente de h; mientras que los otros términos contienen a h como un factor y, por lo tanto, tienen límite igual a 0 cuando $h \to 0$.

Ahora, usando el límite $z \to x$ para la definición de la derivada y $f(x) = x^n$, se tiene

$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{h\to 0} \frac{z^n - x^n}{z - x}$$

Por el estudio previo sobre la factorización de $z^n - x^n$, se tiene

$$f'(x) = \lim_{z\to x} \frac{(z - x)\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i} \right)}{z - x}$$

$$\stackrel{(1)}{=} \lim_{z\to x} \sum_{i=0}^{n-1} x^i z^{n-1-i}$$

$$\stackrel{(2)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} x^i x^{n-1-i}$$

$$\stackrel{(3)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} x^{n-1}$$

$$\stackrel{(4)}{=} nx^{n-1}$$

donde, ahora, los pasos faltantes se justifican de la manera siguiente:

(1) Aquí, el paso crucial se da primero. Las expresiones separadas por el signo de igual son límites cuando $z \to x$ de funciones de z que son iguales para $z \neq x$.
(2) El límite se da por evaluación porque la expresión es un polinomio en la variable z.
(3) Se emplea una regla obvia de los exponentes.
(4) Cada término de la suma es x^{n-1}, independiente de i, y hay n de esos términos.

EJEMPLO 2 Derivadas de potencias de x

a. Según la regla básica 1, $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x^{2-1} = 2x$.

b. Si $F(x) = x = x^1$, entonces $F'(x) = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1$. Así, la derivada de x con respecto a x es 1.

c. Si $f(x) = x^{-10}$, entonces $f'(x) = -10x^{-10-1} = -10x^{-11}$.

Ahora resuelva el problema 3 ◁

Cuando se aplica una regla de diferenciación a una función, algunas veces, la función debe reescribirse primero de manera que tenga la forma apropiada para esa regla. Por ejemplo, para diferenciar $f(x) = \frac{1}{x^{10}}$ primero debe escribirse f como $f(x) = x^{-10}$ y luego proceder como en el ejemplo 2(c).

EJEMPLO 3 Reescribir funciones en la forma x^a

a. Para diferenciar $y = \sqrt{x}$, se escribe $\sqrt{x}$ como $x^{1/2}$ de modo que tenga la forma x^n. Así,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{(1/2)-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

la cual coincide con el cálculo del límite del ejemplo 5 visto en la sección 11.1.

b. Sea $h(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$. Para aplicar la regla básica 1, debe reescribirse $h(x)$ como $h(x) = x^{-3/2}$ de modo que tenga la forma x^n. Se tiene

$$h'(x) = \frac{d}{dx}(x^{-3/2}) = -\frac{3}{2}x^{(-3/2)-1} = -\frac{3}{2}x^{-5/2}$$

Ahora resuelva el problema 39 ◁

¡ADVERTENCIA!

En el ejemplo 3(b), no reescriba $\frac{1}{x\sqrt{x}}$ como $\frac{1}{x^{3/2}}$ y después sólo derive el denominador.

Ahora que puede decirse inmediatamente que la derivada de x^3 es $3x^2$, surge la pregunta de qué hacer con la derivada de un *múltiplo* de x^3, como $5x^3$. La siguiente regla trata sobre la diferenciación de una constante por una función.

REGLA COMBINADA 1 Regla del factor constante

Si f es una función diferenciable y c una constante, entonces $cf(x)$ es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$$

Esto es, la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.

Demostración. Si $g(x) = cf(x)$, al aplicar la definición de la derivada de g se obtiene

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(c \cdot \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) = c \cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Pero $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ es $f'(x)$; por lo que $g'(x) = cf'(x)$.

EJEMPLO 4 **Diferenciación de una constante por una función**

Diferencie las siguientes funciones.

a. $g(x) = 5x^3$

Solución: Aquí g es una constante (5) por una función (x^3). Así,

$$\frac{d}{dx}(5x^3) = 5\frac{d}{dx}(x^3) \qquad \text{Regla combinada 1}$$

$$= 5(3x^{3-1}) = 15x^2 \qquad \text{Regla básica 1}$$

b. $f(q) = \dfrac{13q}{5}$

Solución:

Estrategia Primero se reescribe f como una constante por una función y después se aplica la regla básica 1.

Como $\dfrac{13q}{5} = \dfrac{13}{5}q$, f es la constante $\dfrac{13}{5}$ por la función q. Así,

$$f'(q) = \frac{13}{5}\frac{d}{dq}(q) \qquad \text{Regla combinada 1}$$

$$= \frac{13}{5} \cdot 1 = \frac{13}{5} \qquad \text{Regla básica 1}$$

c. $y = \dfrac{0.25}{\sqrt[5]{x^2}}$

Solución: y puede expresarse como una constante por una función:

$$y = 0.25 \cdot \frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} = 0.25x^{-2/5}$$

De modo que,

$$y' = 0.25\frac{d}{dx}(x^{-2/5}) \qquad \text{Regla combinada 1}$$

$$= 0.25\left(-\frac{2}{5}x^{-7/5}\right) = -0.1x^{-7/5} \qquad \text{Regla básica 1}$$

Ahora resuelva el problema 7 ◁

¡ADVERTENCIA!

Para diferenciar $f(x) = (4x)^3$, la regla básica 1 no se puede aplicar de manera directa. Se aplica a una potencia de la variable x, *no* a una potencia de una expresión que incluya a x, como $4x$. Para aplicar estas reglas, se escribe $f(x) = (4x)^3 = 4^3x^3 = 64x^3$. Así,

$$f'(x) = 64\frac{d}{dx}(x^3) = 64(3x^2) = 192x^2.$$

La regla siguiente se refiere a la derivada de sumas y diferencias de funciones.

REGLA COMBINADA 2 Regla de una suma o una diferencia

Si f y g son funciones diferenciables, entonces $f + g$ y $f - g$ son diferenciables y

$$\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = f'(x) + g'(x)$$

y

$$\frac{d}{dx}(f(x) - g(x)) = f'(x) - g'(x)$$

Esto es, la derivada de la suma (o diferencia) de dos funciones es la suma (o diferencia) de sus derivadas.

Demostración. Para el caso de una suma, si $F(x) = f(x) + g(x)$, al aplicar la definición de la derivada de F se obtiene

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) + g(x+h)) - (f(x) + g(x))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)-f(x)) + (g(x+h)-g(x))}{h} \qquad \text{reagrupación}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \right)$$

Como el límite de una suma es la suma de los límites,

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

Pero estos dos límites son $f'(x)$ y $g'(x)$. Entonces,

$$F'(x) = f'(x) + g'(x)$$

La demostración para la derivada de una diferencia de dos funciones es similar.

La regla combinada 2 puede extenderse a la derivada de cualquier número de sumas y diferencias de funciones. Por ejemplo,

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x) + h(x) + k(x)] = f'(x) - g'(x) + h'(x) + k'(x)$$

APLÍQUELO ▶

2. Si la función de ingreso para cierto producto es $r(q) = 50q - 0.3q^2$, determine la derivada de esta función, también conocida como ingreso marginal.

EJEMPLO 5 Diferenciación de sumas y diferencias de funciones

Diferencie las siguientes funciones.

a. $F(x) = 3x^5 + \sqrt{x}$

Solución: Aquí F es la suma de las dos funciones $3x^5$ y $\sqrt{x}$. Por lo tanto,

$$F'(x) = \frac{d}{dx}(3x^5) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \qquad \text{Regla combinada 2}$$

$$= 3\frac{d}{dx}(x^5) + \frac{d}{dx}(x^{1/2}) \qquad \text{Regla combinada 1}$$

$$= 3(5x^4) + \frac{1}{2}x^{-1/2} = 15x^4 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{Regla básica 1}$$

b. $f(z) = \dfrac{z^4}{4} - \dfrac{5}{z^{1/3}}$

Solución: Para aplicar las reglas, se reescribe $f(z)$ en la forma $f(z) = \frac{1}{4}z^4 - 5z^{-1/3}$. Como f es la diferencia de dos funciones,

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{4}z^4\right) - \frac{d}{dz}(5z^{-1/3}) \qquad \text{Regla combinada 2}$$

$$= \frac{1}{4}\frac{d}{dz}(z^4) - 5\frac{d}{dz}(z^{-1/3}) \qquad \text{Regla combinada 1}$$

$$= \frac{1}{4}(4z^3) - 5\left(-\frac{1}{3}z^{-4/3}\right) \qquad \text{Regla básica 1}$$

$$= z^3 + \frac{5}{3}z^{-4/3}$$

c. $y = 6x^3 - 2x^2 + 7x - 8$

Solución

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(6x^3) - \frac{d}{dx}(2x^2) + \frac{d}{dx}(7x) - \frac{d}{dx}(8)$$

$$= 6\frac{d}{dx}(x^3) - 2\frac{d}{dx}(x^2) + 7\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(8)$$

$$= 6(3x^2) - 2(2x) + 7(1) - 0$$

$$= 18x^2 - 4x + 7$$

Ahora resuelva el problema 47 ◁

En los ejemplos 6 y 7 es necesario reescribir la función dada de una forma en la que se apliquen las reglas de diferenciación.

EJEMPLO 6 **Determinación de una derivada**

Encuentre la derivada de $f(x) = 2x(x^2 - 5x + 2)$ cuando $x = 2$.

Solución: Se multiplica y después se diferencia cada término:

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 - 10x^2 + 4x \\ f'(x) &= 2(3x^2) - 10(2x) + 4(1) \\ &= 6x^2 - 20x + 4 \\ f'(2) &= 6(2)^2 - 20(2) + 4 = -12 \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 75 ◁

EJEMPLO 7 **Determinación de una ecuación de una recta tangente**

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \frac{3x^2 - 2}{x}$$

cuando $x = 1$.

Solución:

Estrategia Primero se encuentra $\frac{dy}{dx}$, que da la pendiente de la recta tangente en cualquier punto. Al evaluar $\frac{dy}{dx}$ en $x = 1$, se obtiene la pendiente de la recta tangente requerida. Después se determina la coordenada y del punto sobre la curva cuando $x = 1$. Por último, se sustituyen la pendiente y ambas coordenadas del punto en la forma punto-pendiente para obtener la ecuación de la recta tangente.

Si se reescribe y como una diferencia de dos funciones, se tiene

$$y = \frac{3x^2}{x} - \frac{2}{x} = 3x - 2x^{-1}$$

Por lo que,

$$\frac{dy}{dx} = 3(1) - 2((-1)x^{-2}) = 3 + \frac{2}{x^2}$$

La pendiente de la recta tangente a la curva cuando $x = 1$ es

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 3 + \frac{2}{1^2} = 5$$

Para encontrar la coordenada y del punto sobre la curva en $x = 1$, se evalúa $y = \frac{3x^2 - 2}{x}$ en $x = 1$. Esto da como resultado

$$y = \frac{3(1)^2 - 2}{1} = 1$$

¡ADVERTENCIA!

Para obtener el valor de y del punto sobre la curva cuando $x = 1$, se evalúa la función *original* en $x = 1$.

De modo que el punto (1, 1) está tanto sobre la curva como sobre la recta tangente. Entonces, una ecuación de la recta tangente es

$$y - 1 = 5(x - 1)$$

En la forma pendiente-intersección, se tiene

$$y = 5x - 4$$

Ahora resuelva el problema 81 ◁

PROBLEMAS 11.2

En los problemas del 1 al 74, diferencie las funciones.

1. $f(x) = \pi$
2. $f(x) = \left(\frac{6}{7}\right)^{2/3}$
3. $y = x^6$
4. $f(x) = x^{21}$
5. $y = x^{80}$
6. $y = x^{2.1}$
7. $f(x) = 9x^2$
8. $y = 4x^3$
9. $g(w) = 8w^7$
10. $v(x) = x^e$
11. $y = \frac{3}{5}x^6$
12. $f(p) = \sqrt{3}p^4$
13. $f(t) = \dfrac{t^7}{25}$
14. $y = \dfrac{x^7}{7}$
15. $f(x) = x + 3$
16. $f(x) = 5x - e$
17. $f(x) = 4x^2 - 2x + 3$
18. $F(x) = 5x^2 - 9x$
19. $g(p) = p^4 - 3p^3 - 1$
20. $f(t) = -13t^2 + 14t + 1$
21. $y = x^4 - \sqrt[3]{x}$
22. $y = -8x^4 + \ln 2$
23. $y = -13x^3 + 14x^2 - 2x + 3$
24. $V(r) = r^8 - 7r^6 + 3r^2 + 1$
25. $f(x) = 2(13 - x^4)$
26. $\psi(t) = e(t^7 - 5^3)$
27. $g(x) = \dfrac{13 - x^4}{3}$
28. $f(x) = \dfrac{5(x^4 - 6)}{2}$
29. $h(x) = 4x^4 + x^3 - \dfrac{9x^2}{2} + 8x$
30. $k(x) = -2x^2 + \dfrac{5}{3}x + 11$
31. $f(x) = \dfrac{5}{7}x^9 + \dfrac{3}{5}x^7$
32. $p(x) = \dfrac{x^7}{7} + \dfrac{2x}{3}$
33. $f(x) = x^{3/5}$
34. $f(x) = 2x^{-14/5}$
35. $y = x^{3/4} + 2x^{5/3}$
36. $y = 4x^2 - x^{-3/5}$
37. $y = 11\sqrt{x}$
38. $y = \sqrt{x^7}$
39. $f(r) = 6\sqrt[3]{r}$
40. $y = 4\sqrt[8]{x^2}$
41. $f(x) = x^{-6}$
42. $f(s) = 2s^{-3}$
43. $f(x) = x^{-3} + x^{-5} - 2x^{-6}$
44. $f(x) = 100x^{-3} + 10x^{1/2}$
45. $y = \dfrac{1}{x}$
46. $f(x) = \dfrac{3}{x^4}$
47. $y = \dfrac{8}{x^5}$
48. $y = \dfrac{1}{4x^5}$
49. $g(x) = \dfrac{4}{3x^3}$
50. $y = \dfrac{1}{x^2}$
51. $f(t) = \dfrac{3}{5t^3}$
52. $g(x) = \dfrac{7}{9x}$
53. $f(x) = \dfrac{x}{7} + \dfrac{7}{x}$
54. $\Phi(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{3}{x^3}$
55. $f(x) = -9x^{1/3} + 5x^{-2/5}$
56. $f(z) = 5z^{3/4} - 6^2 - 8z^{1/4}$
57. $q(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8x^2}}$
58. $f(x) = \dfrac{3}{\sqrt[4]{x^3}}$
59. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$
60. $y = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
61. $y = x^3\sqrt[3]{x}$
62. $f(x) = (2x^3)(4x^2)$
63. $f(x) = x(3x^2 - 10x + 7)$
64. $f(x) = x^3(3x^6 - 5x^2 + 4)$
65. $f(x) = x^3(3x)^2$
66. $s(x) = \sqrt{x}(\sqrt[5]{x} + 7x + 2)$
67. $v(x) = x^{-2/3}(x + 5)$
68. $f(x) = x^{3/5}(x^2 + 7x + 11)$
69. $f(q) = \dfrac{3q^2 + 4q - 2}{q}$
70. $f(w) = \dfrac{w - 5}{w^5}$
71. $f(x) = (x - 1)(x + 2)$
72. $f(x) = x^2(x - 2)(x + 4)$
73. $w(x) = \dfrac{x^2 + x^3}{x^2}$
74. $f(x) = \dfrac{7x^3 + x}{6\sqrt{x}}$

Para cada curva descrita en los problemas del 75 al 78, encuentre las pendientes en los puntos indicados.

75. $y = 3x^2 + 4x - 8; (0, -8), (2, 12), (-3, 7)$
76. $y = 3 + 5x - 3x^3; (0, 3), (\frac{1}{2}, \frac{41}{8}), (2, -11)$
77. $y = 4$; cuando $x = -4, x = 7, x = 22$
78. $y = 3x - 4\sqrt{x}$; cuando $x = 4, x = 9, x = 25$

En los problemas del 79 al 82, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto indicado.

79. $y = 4x^2 + 5x + 6; (1, 15)$
80. $y = \dfrac{1 - x^2}{5}; (4, -3)$
81. $y = \dfrac{1}{x^2}; (2, \frac{1}{4})$
82. $y = -\sqrt[3]{x}; (8, -2)$

83. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva
$$y = 3 + x - 5x^2 + x^4$$
cuando $x = 0$.

84. Repita el problema 83 para la curva
$$y = \frac{\sqrt{x}(2 - x^2)}{x}$$
cuando $x = 4$.

85. Encuentre todos los puntos sobre la curva
$$y = \frac{5}{2}x^2 - x^3$$
en los que la recta tangente es horizontal.

86. Repita el problema 85 para la curva
$$y = \frac{x^6}{6} - \frac{x^2}{2} + 1$$

87. Encuentre todos los puntos sobre la curva
$$y = x^2 - 5x + 3$$
en los que la pendiente es 1.

88. Repita el problema 87 para la curva
$$y = x^4 - 31x + 11$$

89. Si $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, evalúe la expresión
$$\frac{x - 1}{2x\sqrt{x}} - f'(x)$$

90. Economía Eswaran y Kotwal[2] estudian economías agrarias en las que hay dos tipos de trabajadores, permanentes y eventuales. Los trabajadores permanentes son empleados que tienen contratos a largo plazo y pueden recibir prestaciones como vacaciones y atención médica. Los trabajadores eventuales se contratan por día y realizan trabajos menores y rutinarios como deshierbado, recolección y trillado. La diferencia z en el costo del valor presente de contratar a un trabajador permanente y a uno eventual está dada por

$$z = (1 + b)w_p - bw_c$$

donde w_p y w_c son los salarios de trabajo permanente y eventual, respectivamente, b es una constante y w_p es una función de w_c. Eswaran y Kotwal afirman que

$$\frac{dz}{dw_c} = (1 + b)\left[\frac{dw_p}{dw_c} - \frac{b}{1 + b}\right]$$

Verifique esta afirmación.

91. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = x^3 - 2x + 1$ en el punto $(1, 0)$. Grafique la función y la recta tangente sobre la misma pantalla.

92. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = \sqrt[3]{x}$ en el punto $(-8, -2)$. Grafique la función y la recta tangente sobre la misma pantalla. Observe que la línea pasa por $(-8, -2)$ y parece ser tangente a la curva.

Objetivo

Explicar la tasa instantánea de cambio de una función por medio de la velocidad e interpretar la derivada como una tasa instantánea de cambio. Desarrollar el concepto "marginal" que se utiliza con frecuencia en administración y economía.

11.3 La derivada como una razón de cambio

Se ha dado una interpretación geométrica de la derivada como la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto. Históricamente, una aplicación importante de la derivada implica el movimiento de un objeto que viaja en línea recta. Esto proporciona una manera conveniente de interpretar la derivada como una *razón de cambio*.

Para denotar el cambio en una variable como x, comúnmente se usa el símbolo Δx (se lee "delta x"). Por ejemplo, si x cambia de 1 a 3, entonces el cambio en x es $\Delta x = 3 - 1 = 2$. El nuevo valor de $x(= 3)$ es el valor previo más el cambio, que es $1 + \Delta x$. De manera similar, si t se incrementa en Δt, el nuevo valor es $t + \Delta t$. Se usará la notación Δ en el análisis siguiente.

Suponga que un objeto se desplaza a lo largo de la recta numérica de la figura 11.12 de acuerdo con la ecuación

$$s = f(t) = t^2$$

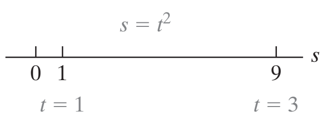


FIGURA 11.12 Movimiento a lo largo de una recta numérica.

donde s es la posición del objeto en el tiempo t. Esta ecuación se llama **ecuación de movimiento** y f se denomina ***función de posición***. Suponga que t está en segundos y s en metros. En $t = 1$, la posición es $s = f(1) = 1^2 = 1$, y en $t = 3$ la posición es $s = f(3) = 3^2 = 9$. En este intervalo de 2 segundos el objeto tuvo un cambio de posición, o *desplazamiento*, de $9 - 1 = 8$ metros y la *velocidad promedio* del objeto se define como

$$\begin{aligned} v_{\text{prom}} &= \frac{\text{desplazamiento}}{\text{longitud del intervalo de tiempo}} \qquad (1) \\ &= \frac{8}{2} = 4 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Decir que la velocidad promedio es de 4 m/s desde $t = 1$ hasta $t = 3$ significa que, *en promedio*, la posición del objeto cambia 4 m hacia la derecha cada segundo durante ese intervalo de tiempo. Sean Δs y Δt los cambios en los valores s y t, respectivamente. Entonces la velocidad promedio está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = 4 \text{ m/s} \quad (\text{para el intervalo de } t = 1 \text{ a } t = 3)$$

La razón $\Delta s/\Delta t$ se llama también **razón de cambio promedio de s con respecto a** t en el intervalo de $t = 1$ a $t = 3$.

Ahora, consideremos que el intervalo de tiempo es de sólo 1 segundo (esto es, $\Delta t = 1$). Entonces, para el intervalo *más corto* de $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t = 2$, se tiene $f(2) = 2^2 = 4$, por lo que

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(2) - f(1)}{\Delta t} = \frac{4 - 1}{1} = 3 \text{ m/s}$$

[2]M. Eswaran y A. Kotwal, "A Theory of Two-Tier Labor Markets in Agrarian Economies", *The American Economic Review,* 75, núm. 1 (1985), pp. 162-177.

Tabla 11.2

Duración del intervalo Δt	Intervalo de tiempo $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t$	Velocidad promedio $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}$
0.1	$t = 1$ a $t = 1.1$	2.1 m/s
0.07	$t = 1$ a $t = 1.07$	2.07 m/s
0.05	$t = 1$ a $t = 1.05$	2.05 m/s
0.03	$t = 1$ a $t = 1.03$	2.03 m/s
0.01	$t = 1$ a $t = 1.01$	2.01 m/s
0.001	$t = 1$ a $t = 1.001$	2.001 m/s

De manera más general, en el intervalo de $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t$, el objeto se desplaza a partir de la posición $f(1)$ hasta la posición $f(1 + \Delta t)$. Entonces, su desplazamiento es

$$\Delta s = f(1 + \Delta t) - f(1)$$

Como el intervalo de tiempo tiene una duración Δt, la velocidad promedio del objeto está dada por

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}$$

Si Δt se volviera cada vez más pequeño, la velocidad promedio en el intervalo de $t = 1$ a $t = 1 + \Delta t$ sería cercana a lo que podría llamarse *velocidad instantánea* en el tiempo $t = 1$; esto es, la velocidad registrada en un *punto* en el tiempo ($t = 1$), en oposición a la velocidad registrada en un *intervalo* de tiempo. Para algunos valores representativos de Δt entre 0.1 y 0.001, se obtuvieron las velocidades promedio mostradas en la tabla 11.2, las cuales usted puede verificar.

La tabla sugiere que conforme la duración del intervalo de tiempo se aproxima a 0, la velocidad promedio tiende al valor de 2 m/s. En otras palabras, cuando Δt tiende a 0, $\Delta s/\Delta t$ se aproxima 2 m/s. El límite de la velocidad promedio, cuando $\Delta t \to 0$, se define como la **velocidad instantánea** (o simplemente la **velocidad**), v, en el tiempo $t = 1$. A este límite se le llama también la **razón de cambio instantánea** de s con respecto a t en $t = 1$:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{prom}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(1 + \Delta t) - f(1)}{\Delta t}$$

Si se piensa en Δt como h, entonces el límite a la derecha es simplemente la derivada de s con respecto a t en $t = 1$. Así, la velocidad instantánea del objeto en $t = 1$ es justo ds/dt en $t = 1$. Como $s = t^2$ y

$$\frac{ds}{dt} = 2t$$

la velocidad en $t = 1$ es

$$v = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=1} = 2(1) = 2 \text{ m/s}$$

lo cual confirma la conclusión previa.

En resumen, si $s = f(t)$ es la función posición de un objeto que se desplaza en línea recta, entonces la velocidad promedio del objeto en el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ está dada por

$$\boxed{v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}}$$

y la velocidad en el tiempo t está dada por

$$\boxed{v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}}$$

En forma selectiva, al combinar las ecuaciones para v, se tiene

$$\frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

que proporciona la explicación para la notación de Leibniz, la cual sin esta justificación podría parecer extraña. (Después de todo, Δ es la letra griega [mayúscula] correspondiente a d).

EJEMPLO 1 **Determinación de la velocidad promedio y la velocidad**

Suponga que la función de posición de un objeto que se desplaza a lo largo de una recta numérica está dada por $s = f(t) = 3t^2 + 5$, donde t está en segundos y s en metros.

a. Encuentre la velocidad promedio en el intervalo [10, 10.1].
b. Encuentre la velocidad cuando $t = 10$.

Solución:

a. Aquí $t = 10$ y $\Delta t = 10.1 - 10 = 0.1$. Se tiene

$$\begin{aligned} v_{\text{prom}} &= \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{f(10+0.1) - f(10)}{0.1} \\ &= \frac{f(10.1) - f(10)}{0.1} \\ &= \frac{311.03 - 305}{0.1} = \frac{6.03}{0.1} = 60.3 \text{ m/s} \end{aligned}$$

b. La velocidad en el tiempo t está dada por

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t$$

Cuando $t = 10$, la velocidad es

$$\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=10} = 6(10) = 60 \text{ m/s}$$

Observe que la velocidad promedio en el intervalo [10, 10.1] es cercana a la velocidad en $t = 10$. Esto era de esperarse porque la duración del intervalo es pequeña.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

El análisis de la razón de cambio de s con respecto a t se aplica a *cualquier* función $y = f(x)$. Así, puede enunciarse lo siguiente:

Si $y = f(x)$, entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \begin{cases} \text{tasa promedio de cambio} \\ \text{de } y \text{ con respecto a } x \\ \text{en el intervalo de} \\ x \text{ a } x + \Delta x \end{cases}$$

y

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} \text{tasa instantánea de cambio} \\ \text{de } y \text{ con respecto a } x. \end{cases} \qquad (2)$$

Como la razón instantánea de cambio de $y = f(x)$ en un punto es una derivada, es también *la pendiente de la recta tangente* a la gráfica de $y = f(x)$ en ese punto. Por conveniencia, a la razón de cambio instantánea se le llama simplemente **razón de cambio**. La interpretación de una derivada como una razón de cambio es extremadamente importante.

Ahora se interpretará el significado de la razón de cambio de y con respecto a x. A partir de la ecuación (2), si Δx (un cambio en x) es cercano a 0, entonces $\Delta y/\Delta x$ está próximo a dy/dx. Esto es,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$$

Por lo tanto,

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x \tag{3}$$

Es decir, si x cambia en Δx, entonces el cambio en y, Δy, es aproximadamente dy/dx por el cambio en x. En particular,

si x cambia en 1, una estimación del cambio en y es $\dfrac{dy}{dx}$

APLÍQUELO ▶

3. Suponga que la utilidad de P, obtenida mediante la venta de cierto producto a un precio p por unidad, está dada por $P = f(p)$ y la tasa de cambio de esa utilidad con respecto al cambio en el precio es $\dfrac{dP}{dp} = 5$ en $p = 25$. Estime el cambio en la utilidad P si el precio cambia de 25 a 25.5.

EJEMPLO 2 Estimación de Δy mediante el uso de dy/dx

Suponga que $y = f(x)$ y $\dfrac{dy}{dx} = 8$ cuando $x = 3$. Estime el cambio en y si x cambia de 3 a 3.5.

Solución: Se tiene $dy/dx = 8$ y $\Delta x = 3.5 - 3 = 0.5$. El cambio en y está dado por Δy y, a partir de la ecuación (3),

$$\Delta y \approx \frac{dy}{dx}\Delta x = 8(0.5) = 4$$

Se destaca que, como $\Delta y = f(3.5) - f(3)$, se tiene $f(3.5) = f(3) + \Delta y$. Por ejemplo, si $f(3) = 5$, entonces $f(3.5)$ puede estimarse como $5 + 4 = 9$.

◁

APLÍQUELO ▶

4. La posición de un objeto que se lanza hacia arriba a una velocidad de 16 pies/seg desde una altura de 0 pies está dada por $y(t) = 16t - 16t^2$. Determine la tasa de cambio de y con respecto a t y evalúela cuando $t = 0.5$. Utilice su calculadora gráfica para graficar $y(t)$. Emplee la gráfica para interpretar el comportamiento del objeto cuando $t = 0.5$.

EJEMPLO 3 Determinación de una razón de cambio

Encuentre la razón de cambio de $y = x^4$ con respecto a x y evalúela cuando $x = 2$ y cuando $x = -1$. Interprete los resultados.

Solución: La razón de cambio es

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3$$

Cuando $x = 2$, $dy/dx = 4(2)^3 = 32$. Esto significa que si x aumenta a partir de 2 en una cantidad pequeña, entonces y aumenta aproximadamente 32 veces esa cantidad. O en forma más sencilla, se dice que cuando $x = 2$, y está creciendo 32 veces más rápido que x. Cuando $x = -1$, $dy/dx = 4(-1)^3 = -4$. El significado del signo menos en -4 es que, cuando $x = -1$, y está *decreciendo* a un ritmo 4 veces más rápido que el aumento de x.

Ahora resuelva el problema 11 ◁

EJEMPLO 4 Razón de cambio del precio con respecto a la cantidad

Sea $p = 100 - q^2$ la función de demanda del producto de un fabricante. Encuentre la razón de cambio del precio p por unidad con respecto a la cantidad q. ¿Qué tan rápido está cambiando el precio con respecto a q cuando $q = 5$?

Solución: La razón de cambio de p con respecto a q es

$$\frac{dp}{dq} = \frac{d}{dq}(100 - q^2) = -2q$$

Así,

$$\left.\frac{dp}{dq}\right|_{q=5} = -2(5) = -10$$

Esto significa que cuando se demandan 5 unidades, un *incremento* de una unidad extra demandada corresponde a una disminución de aproximadamente 10 dólares en el precio por unidad que los consumidores están dispuestos a pagar.

◁

EJEMPLO 5 Razón de cambio de volumen

Un globo esférico está siendo inflado. Encuentre la razón de cambio de su volumen con respecto a su radio. Evalúe esta razón de cambio cuando el radio es de 2 pies.

Solución: La fórmula para calcular el volumen V de una esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. La razón de cambio de V con respecto a r es

$$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi(3r^2) = 4\pi r^2$$

Cuando $r = 2$ pies, la razón de cambio es

$$\left.\frac{dV}{dr}\right|_{r=2} = 4\pi(2)^2 = 16\pi \frac{\text{pie}^3}{\text{pie}}$$

Esto significa que cuando el radio es de 2 pies, al cambiar el radio en 1 pie, el volumen cambiará aproximadamente en 16π pies^3.

◁

EJEMPLO 6 Razón de cambio de inscripciones

Un sociólogo estudia varios programas que pueden ayudar en la educación de niños de edad preescolar en cierta ciudad. El sociólogo cree que x años después de iniciado un programa particular, $f(x)$ miles de niños estarán inscritos, donde

$$f(x) = \frac{10}{9}(12x - x^2) \quad 0 \leq x \leq 12$$

¿Cuál es la razón a la que cambiaría la matrícula (a) después de tres años de iniciado el programa y (b) después de nueve años?

Solución: La razón de cambio de $f(x)$ es

$$f'(x) = \frac{10}{9}(12 - 2x)$$

a. Después de tres años, la razón de cambio es

$$f'(3) = \frac{10}{9}(12 - 2(3)) = \frac{10}{9} \cdot 6 = \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}$$

Así, las inscripciones estarían creciendo a razón de $6\frac{2}{3}$ mil niños por año.

b. Después de nueve años, la razón de cambio es

$$f'(9) = \frac{10}{9}(12 - 2(9)) = \frac{10}{9}(-6) = -\frac{20}{3} = -6\frac{2}{3}$$

Así, las inscripciones estarían *decreciendo* a razón de $6\frac{2}{3}$ mil niños por año.

Ahora resuelva el problema 9 ◁

Aplicaciones de la razón de cambio a la economía

La **función de costo total** de un fabricante, $c = f(q)$, proporciona el costo total c de producir y comerciar q unidades de un producto. La razón de cambio de c con respecto a q se llama **costo marginal**. Así,

$$\text{costo marginal} = \frac{dc}{dq}$$

Por ejemplo, suponga que $c = f(q) = 0.1q^2 + 3$ es una función de costo, donde c está en dólares y q en libras. Entonces.

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q$$

El costo marginal cuando se producen 4 libras es dc/dq, evaluado cuando $q = 4$:

$$\left.\frac{dc}{dq}\right|_{q=4} = 0.2(4) = 0.80$$

Esto significa que si la producción se incrementa en 1 libra, desde 4 hasta 5 libras, entonces el cambio en el costo es aproximadamente de \$0.80. Es decir, la libra adicional cuesta casi \$0.80. En general, *se interpreta el costo marginal como el costo aproximado de una unidad adicional producida*. Después de todo, la diferencia $f(q + 1) - f(q)$ puede verse como un cociente de diferencias

$$\frac{f(q+1) - f(q)}{1}$$

(el caso donde $h = 1$). Cualquier cociente de diferencias puede verse como una aproximación de la derivada correspondiente y, de manera inversa, cualquier derivada puede considerarse como una aproximación de cualquiera de sus cocientes de diferencias correspondientes. Así, para cualquier función f de q siempre se puede ver a $f'(q)$ y $f(q+1) - f(q)$ como aproximaciones una de la otra. En economía, esto último puede verse como el valor exacto del costo —o de la utilidad, dependiendo de la función— del $(q + 1)$-ésimo artículo cuando se produce q. Con frecuencia, la derivada es más fácil de calcular que el valor exacto. [En el caso estudiado aquí, el costo real de producir una libra después de 4 lb es $f(5) - f(4) = 5.5 - 4.6 = \$0.90$].

Si c es el costo total de producir q unidades de un producto, entonces el **costo promedio por unidad** $\bar{c}$ es

$$\bar{c} = \frac{c}{q} \tag{4}$$

Por ejemplo, si el costo total de 20 unidades es de \$100, entonces el costo promedio por unidad es $\bar{c} = 100/20 = \$5$. Multiplicando ambos lados de la ecuación (4) por q se obtiene,

$$c = q\bar{c}$$

Esto es, el costo total es el producto del número de unidades producidas multiplicado por el costo promedio unitario.

EJEMPLO 7 **Costo marginal**

Si la ecuación del costo promedio de un fabricante es

$$\bar{c} = 0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q}$$

encuentre la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal cuando se producen 50 unidades?

Solución:

Estrategia: La función de costo marginal es la derivada de la función de costo total c. Por lo que primero se encuentra c multiplicando $\bar{c}$ por q. Se tiene

$$\begin{aligned} c &= q\bar{c} \\ &= q\left(0.0001q^2 - 0.02q + 5 + \frac{5000}{q}\right) \\ c &= 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 5q + 5000 \end{aligned}$$

Al diferenciar c, se obtiene la función de costo marginal:

$$\begin{aligned}\frac{dc}{dq} &= 0.0001(3q^2) - 0.02(2q) + 5(1) + 0 \\ &= 0.0003q^2 - 0.04q + 5\end{aligned}$$

El costo marginal cuando se producen 50 unidades es

$$\left.\frac{dc}{dq}\right|_{q=50} = 0.0003(50)^2 - 0.04(50) + 5 = 3.75$$

Si la producción se incrementa en 1 unidad, digamos de $q = 50$ a $q = 51$, entonces el costo c de la unidad adicional es aproximadamente de \$3.75. Si la producción se incrementa en $\frac{1}{3}$ de unidad a partir de $q = 50$, el costo de la producción adicional es aproximadamente de $\left(\frac{1}{3}\right)(3.75) = \$1.25$.

Ahora resuelva el problema 21 ◁

Suponga que $r = f(q)$ es la **función de ingreso total** para un fabricante. La ecuación $r = f(q)$ establece que el valor monetario total recibido al vender q unidades de un producto es r. El **ingreso marginal** se define como la razón de cambio del valor total recibido con respecto al número total de unidades vendidas. Por consiguiente, el ingreso marginal es solamente la derivada de r con respecto a q:

$$\text{ingreso marginal} = \frac{dr}{dq}$$

El ingreso marginal indica la rapidez a la que cambia el ingreso con respecto a las unidades vendidas. Se interpreta como el *ingreso aproximado recibido al vender una unidad adicional de producción*.

EJEMPLO 8 **Ingreso marginal**

Suponga que un fabricante vende un producto a \$2 por unidad. Si se venden q unidades, el ingreso total está dado por

$$r = 2q$$

La función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{d}{dq}(2q) = 2$$

que es una función constante. Entonces, el ingreso marginal es igual a 2 sin importar el número de unidades vendidas. Esto es lo que se esperaría, puesto que el fabricante recibe \$2 por cada unidad vendida.

Ahora resuelva el problema 23 ◁

Razones de cambio relativa y porcentual

Para la función de ingreso total del ejemplo 8, a saber, $r = f(q) = 2q$, se tiene

$$\frac{dr}{dq} = 2$$

Esto significa que el ingreso está cambiando a razón de \$2 por unidad, sin importar el número de unidades vendidas. Aunque ésta es una información valiosa, puede ser más significativa cuando se compara con la propia r. Por ejemplo, si $q = 50$, entonces $r = 2(50) = 100$. Así, la razón de cambio del ingreso es $2/100 = 0.02$ *de* r. Por otra parte, si $q = 5000$, entonces $r = 2(5000) = \$10\,000$, de modo que la razón de cambio de r es $2/10\,000 = 0.0002$ *de* r.

Aunque r cambia a la misma razón en cada nivel, al compararla con la propia r, esta razón es relativamente menor cuando $r = 10\,000$ que cuando $r = 100$. Considerando el cociente

$$\frac{dr/dq}{r}$$

se tiene un medio de comparar la razón de cambio de r con la propia r. Esta razón se llama *razón de cambio relativa* de r. Ya vimos que la razón de cambio relativa cuando $q = 50$ es

$$\frac{dr/dq}{r} = \frac{2}{100} = 0.02$$

y cuando $q = 5000$, es

$$\frac{dr/dq}{r} = \frac{2}{10\,000} = 0.0002$$

¡ADVERTENCIA!

Los porcentajes pueden ser confusos. Recuerde que *porcentaje* significa "por cien". Entonces $100\% = \frac{100}{100} = 1$, $2\% = \frac{2}{100} = 0.02$, etcétera.

Al multiplicar las razones relativas por 100% se obtienen las *razones de cambio porcentuales*. La razón de cambio porcentual cuando $q = 50$ es $(0.02)(100\%) = 2\%$; cuando $q = 5000$, es $(0.0002)(100\%) = 0.02\%$. Así, por ejemplo, si se vende una unidad adicional a 50, el ingreso aumenta aproximadamente en 2 por ciento.

En general, para cualquier función f, se tiene la siguiente definición:

Definición

La ***razón de cambio relativa*** de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

La ***razón de cambio porcentual*** de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)} \cdot 100\%$$

APLÍQUELO ▶

5. El volumen V de un contenedor en forma de cápsula con altura cilíndrica de 4 pies y radio r está dado por

$$V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + 4\pi r^2$$

Determine las tasas de cambio relativa y porcentual del volumen con respecto al radio cuando el radio es de 2 pies.

EJEMPLO 9 Razones de cambio relativa y porcentual

Determine las razones de cambio relativa y porcentual de

$$y = f(x) = 3x^2 - 5x + 25$$

cuando $x = 5$.

Solución: Aquí

$$f'(x) = 6x - 5$$

Como $f'(5) = 6(5) - 5 = 25$ y $f(5) = 3(5)^2 - 5(5) + 25 = 75$, la razón de cambio relativa de y cuando $x = 5$ es

$$\frac{f'(5)}{f(5)} = \frac{25}{75} \approx 0.333$$

Al multiplicar 0.333 por 100% se obtiene la razón de cambio porcentual: $(0.333)(100\%) = 33.3$ por ciento.

Ahora resuelva el problema 35 ◁

PROBLEMAS 11.3

1. Suponga que la función de posición de un objeto que se desplaza a lo largo de una línea recta es $s = f(t) = 2t^2 + 3t$, donde t está en segundos y s en metros. Encuentre la velocidad promedio $\Delta s/\Delta t$ para el intervalo $[1, 1 + \Delta t]$, donde Δt está dado en la tabla siguiente:

Δt	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\Delta s/\Delta t$						

Con base en sus resultados, estime la velocidad cuando $t = 1$. Verifique sus cálculos usando diferenciación.

2. Si $y = f(x) = \sqrt{2x + 5}$, encuentre la razón de cambio promedio de y con respecto a x en el intervalo $[3, 3 + \Delta x]$, donde Δx está dado en la tabla siguiente:

Δx	1	0.5	0.2	0.1	0.01	0.001
$\Delta y / \Delta x$						

Con base en sus resultados, estime la razón de cambio de y con respecto a x cuando $x = 3$.

En cada uno de los problemas del 3 al 8, se da una función de posición, donde t está en segundos y s en metros.

(a) *Encuentre la posición en el valor dado de t.*
(b) *Encuentre la velocidad promedio para el intervalo dado.*
(c) *Encuentre la velocidad en el valor dado de t.*

3. $s = 2t^2 - 4t; [7, 7.5]; t = 7$

4. $s = \frac{1}{2}t + 1; [2, 2.1]; t = 2$

5. $s = 5t^3 + 3t + 24; [1, 1.01]; t = 1$

6. $s = -3t^2 + 2t + 1; [1, 1.25]; t = 1$

7. $s = t^4 - 2t^3 + t; [2, 2.1]; t = 2$

8. $s = 3t^4 - t^{7/2}; [0, \frac{1}{4}]; t = 0$

9. Ingreso-educación Los sociólogos han estudiado la relación entre el ingreso y el número de años de educación en miembros de un grupo urbano particular. Encontraron que una persona con x años de educación, antes de buscar empleo regular puede esperar recibir un ingreso anual medio y anual, donde

$$y = 5x^{5/2} + 5900 \qquad 4 \leq x \leq 16$$

Encuentre la razón de cambio del ingreso con respecto al número de años de educación. Evalúela cuando $x = 9$.

10. Encuentre la razón de cambio del volumen V de una pelota, con respecto a su radio r, cuando $r = 1.5$ m. El volumen V de una pelota como una función de su radio r está dado por

$$V = V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

11. Temperatura de la piel La temperatura aproximada T de la piel en términos de la temperatura T_e del medio ambiente está dada por

$$T = 32.8 + 0.27(T_e - 20)$$

donde T y T_e están en grados Celsius.[3] Encuentre la razón de cambio de T con respecto a T_e.

12. Biología El volumen V de una célula esférica está dado por $V = V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio. Encuentre la razón de cambio del volumen con respecto al radio cuando $r = 6.3 \times 10^{-4}$ centímetros.

En los problemas del 13 al 18 se dan funciones de costo, donde c es el costo de producir q unidades de cierto artículo. Para cada caso, encuentre la función de costo marginal. ¿Cuál es el costo marginal para el valor o valores dados de q?

13. $c = 500 + 10q; q = 100$

14. $c = 5000 + 6q; q = 36$

15. $c = 0.2q^2 + 4q + 50; q = 10$

16. $c = 0.1q^2 + 3q + 2; q = 3$

17. $c = q^2 + 50q + 1000; q = 15, q = 16, q = 17$

[3]R. W. Stacy *et al.*, *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

18. $c = 0.04q^3 - 0.5q^2 + 4.4q + 7500; q = 5, q = 25, q = 1000$

En los problemas del 19 al 22, $\overline{c}$ representa el costo promedio por unidad, que es una función del número q de unidades producidas. Encuentre la función de costo marginal y el costo marginal para los valores indicados de q.

19. $\overline{c} = 0.01q + 5 + \frac{500}{q}; q = 50, q = 100$

20. $\overline{c} = 5 + \frac{2000}{q}; q = 25, q = 250$

21. $\overline{c} = 0.00002q^2 - 0.01q + 6 + \frac{20\,000}{q}; q = 100, q = 500$

22. $\overline{c} = 0.002q^2 - 0.5q + 60 + \frac{7000}{q}; q = 15, q = 25$

En los problemas del 23 al 26, r representa el ingreso total y es una función del número q de unidades vendidas. Encuentre la función de ingreso marginal y el ingreso marginal para los valores indicados de q.

23. $r = 0.8q; q = 9, q = 300, q = 500$

24. $r = q\left(15 - \frac{1}{30}q\right); q = 5, q = 15, q = 150$

25. $r = 240q + 40q^2 - 2q^3; q = 10; q = 15; q = 20$

26. $r = 2q(30 - 0.1q); q = 10, q = 20$

27. Fábrica de calcetas La función de costo total de una fábrica de calcetas es estimada por Dean[4] como

$$c = -10\,484.69 + 6.750q - 0.000328q^2$$

donde q es la producción en docenas de pares y c el costo total. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 2000$.

28. Planta de luz y energía La función de costo total para una planta de luz y energía eléctrica es estimada por Nordin[5] como

$$c = 32.07 - 0.79q + 0.02142q^2 - 0.0001q^3 \qquad 20 \leq q \leq 90$$

donde q es la producción total en ocho horas (como porcentaje de la capacidad) y c el costo monetario total del combustible. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 70$.

29. Concentración urbana Suponga que las 100 ciudades más grandes de Estados Unidos en 1920 se clasificaron de acuerdo con su extensión (área de cada ciudad). Según Lotka,[6] la siguiente relación se cumple de manera aproximada:

$$PR^{0.93} = 5\,000\,000$$

Aquí, P es la población de la ciudad con la clasificación R respectiva. Esta relación se llama *ley de la concentración urbana* para 1920. Despeje P en términos de R y luego encuentre qué tan rápido cambia la población con respecto a la clasificación.

30. Depreciación Según el método de depreciación lineal, el valor v de cierta máquina después de t años está dado por

$$v = 120\,000 - 15\,500t$$

donde $0 \leq t \leq 6$. ¿Qué tan rápido cambia v con respecto a t cuando $t = 2$?, ¿cuando $t = 4$?, ¿en cualquier momento?

[4]J. Dean, "Statistical Cost Functions of a Hosiery Mill", *Studies in Business Administration*, XI, núm. 4 (Chicago: University of Chicago Press, 1941).

[5]J. A. Nordin, "Note on a Light Plant's Cost Curves". *Econometrica*, 15 (1947), pp. 231-235.

[6]A. J. Lotka, *Elements of Mathematical Biology* (Nueva York: Dover Publications, Inc., 1956).

31. Polilla de invierno En Nueva Escocia se realizó un estudio sobre la polilla de invierno (adaptado de Embree).[7] Las larvas de la polilla caen al pie de los árboles huésped. A una distancia de x pies de la base del árbol, la densidad de larvas (número de larvas por pie cuadrado de suelo) fue de y, donde

$$y = 59.3 - 1.5x - 0.5x^2 \quad 1 \leq x \leq 9$$

(a) ¿Con qué rapidez cambia la densidad de larvas con respecto a la distancia desde la base del árbol cuando $x = 6$?
(b) ¿Para qué valor de x disminuye la densidad de larvas a razón de 6 larvas por pie cuadrado por pie?

32. Función de costo Para la función de costo

$$c = 0.4q^2 + 4q + 5$$

encuentre la razón de cambio de c con respecto a q cuando $q = 2$. Además, ¿qué valor tiene $\Delta c/\Delta q$ en el intervalo [2, 3]?

En los problemas del 33 al 38, encuentre **(a)** *la razón de cambio y con respecto a x y* **(b)** *la razón de cambio relativa de y. En el valor dado de x, encuentre* **(c)** *la razón de cambio de y,* **(d)** *la razón de cambio relativa de y y* **(e)** *la razón de cambio porcentual de y.*

33. $y = f(x) = x + 4; x = 5$
34. $y = f(x) = 7 - 3x; x = 6$
35. $y = 2x^2 + 5; x = 10$
36. $y = 5 - 3x^3; x = 1$
37. $y = 8 - x^3; x = 1$
38. $y = x^2 + 3x - 4; x = -1$

39. Función de costo Para la función de costo

$$c = 0.3q^2 + 3.5q + 9$$

¿qué tan rápido cambia c con respecto a q cuando $q = 10$? Determine la razón de cambio porcentual de c con respecto a q cuando $q = 10$.

40. Materia orgánica/diversidad de especies En un estudio reciente sobre las aguas de mares poco profundos, Odum[8] afirma que en tales aguas la materia orgánica total y (en miligramos por litro) es una función de la diversidad x de las especies (en número de especies por cada mil individuos). Si $y = 100/x$, ¿con qué rapidez estará cambiando la materia orgánica total con respecto a la diversidad de especies cuando $x = 10$? ¿Cuál es la razón de cambio porcentual cuando $x = 10$?

41. Ingreso Para cierto fabricante, el ingreso obtenido al vender q unidades de un producto está dado por

$$r = 30q - 0.3q^2$$

(a) ¿Qué tan rápido cambia r con respecto a q? Cuando $q = 10$, **(b)** encuentre la razón de cambio relativo de r y **(c)** encuentre la razón de cambio porcentual de r, redondeada al punto porcentual más cercano.

42. Ingreso Repita el problema 43 para la función de ingreso dada por $r = 10q - 0.2q^2$ y $q = 25$.

43. Peso de una rama El peso de la rama de un árbol está dado por $W = 2t^{0.432}$, donde t es el tiempo. Encuentre la razón de cambio relativa de W con respecto a t.

44. Respuesta a un choque eléctrico Se realizó un experimento[9] psicológico para analizar la respuesta humana a choques eléctricos (estímulos). Las personas recibieron descargas eléctricas de varias intensidades. La respuesta R a una descarga de intensidad I (en microamperes) debía ser un número que indicase la magnitud percibida con relación a la de una descarga "estándar". A la descarga estándar se le asignó una magnitud de 10. Dos grupos de personas fueron objeto del estudio bajo condiciones ligeramente diferentes. Las respuestas R_1 y R_2 de los grupos primero y segundo a una descarga de intensidad I estuvieron dadas por

$$R_1 = \frac{I^{1.3}}{1855.24} \quad 800 \leq I \leq 3500$$

y

$$R_2 = \frac{I^{1.3}}{1101.29} \quad 800 \leq I \leq 3500$$

(a) Para cada grupo, determine la razón de cambio relativa de la respuesta con respecto a la intensidad.
(b) ¿Cómo son esos cambios comparados entre sí?
(c) En general, si $f(x) = C_1x^n$ y $g(x) = C_2x^n$, donde C_1 y C_2 son constantes, ¿cómo son las razones de cambio relativas de f y g comparadas entre sí?

45. Costo Un fabricante de bicicletas de montaña determinó que cuando se producen 20 bicicletas por día, el costo promedio es de \$200 y el costo marginal de \$150. Con base en esta información, determine el costo total de producir 21 bicicletas por día.

46. Costos marginal y promedio Suponga que la función de costo para cierto producto es $c = f(q)$. Si la razón de cambio relativa de c (con respecto a q) es $\frac{1}{q}$, demuestre que la función de costo marginal y la función de costo promedio son iguales.

En los problemas 47 y 48, utilice la capacidad de su calculadora gráfica para derivar de manera numérica.

47. Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2}{\sqrt{q^2 + 3}} + 5000$$

donde c representa el costo, encuentre el costo marginal cuando se producen 10 unidades. Redondee su respuesta al centavo más cercano.

48. La población de una ciudad dentro de t años está dada por

$$P = 250\,000e^{0.04t}$$

Encuentre la razón de cambio de la población con respecto al tiempo t dentro de tres años. Redondee su respuesta al entero más cercano.

Objetivo

Encontrar derivadas mediante la aplicación de las reglas del producto y del cociente y desarrollar los conceptos de propensión marginal al consumo y propensión marginal al ahorro.

11.4 Regla del producto y regla del cociente

La ecuación $F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5)$ expresa $F(x)$ como un producto de dos funciones: $x^2 + 3x$ y $4x + 5$. Para encontrar $F'(x)$ usando sólo las reglas previas, se multiplican primero

[7] D. G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia. 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).
[8] H. T. Odum, "Biological Circuits and the Marine System of Texas", en *Pollution and Marine Biology*, T. A. Olsen y F. J. Burgess, eds. (Nueva York: Interscience Publishers, 1967).
[9] H. Babkoff, "Magnitude Estimation of Short Electrocutaneous Pulses", *Psychological Research*, 39, núm. 1 (1976), pp. 39-49.

las funciones. Después se diferencia el resultado término por término:

$$F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5) = 4x^3 + 17x^2 + 15x$$

$$F'(x) = 12x^2 + 34x + 15 \tag{1}$$

Sin embargo, en muchos problemas que implican diferenciar un producto de funciones, la multiplicación no es tan sencilla como en este caso. En ocasiones, ni siquiera resulta práctico intentarlo. Por fortuna, existe una regla para diferenciar un producto que evita tener que efectuar tales multiplicaciones. Como la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas, podría pensarse en una regla similar para los productos. No obstante, la situación es bastante sutil.

REGLA COMBINADA 3 La regla del producto

Si f y g son funciones diferenciables, entonces el producto fg es diferenciable y

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Esto es, la derivada del producto de dos funciones es la derivada de la primera función por la segunda, más la primera función por la derivada de la segunda.

$$\frac{d}{dx}(\text{producto}) = \begin{pmatrix}\text{derivada de}\\ \text{la primera}\end{pmatrix}(\text{segunda}) + (\text{primera})\begin{pmatrix}\text{derivada de}\\ \text{la segunda}\end{pmatrix}$$

Demostración. Si $F(x) = f(x)g(x)$, entonces, por la definición de la derivada de F,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \end{aligned}$$

Ahora se emplea un "truco". Sumando y restando $f(x)g(x+h)$ en el numerador, se tiene

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) + f(x)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h}$$

Reagrupando se obtiene

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)) + (f(x)g(x+h) - f(x)g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))g(x+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h\to 0} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

Como se ha supuesto que f y g son diferenciables,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

y

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = g'(x)$$

La diferenciabilidad de g implica que g es continua, por lo que, con base en la sección 10.3,

$$\lim_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$$

Entonces,

$$F'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

EJEMPLO 1 Aplicación de la regla del producto

Si $F(x) = (x^2 + 3x)(4x + 5)$, encuentre $F'(x)$.

Solución: Se considerará a F como un producto de dos funciones:

$$F(x) = \underbrace{(x^2 + 3x)}_{f(x)}\underbrace{(4x + 5)}_{g(x)}$$

Por lo tanto, es posible aplicar la regla del producto:

$$\begin{aligned}
F'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\
&= \underbrace{\frac{d}{dx}(x^2 + 3x)}_{\substack{\text{Derivada de} \\ \text{la primera}}}\underbrace{(4x + 5)}_{\text{Segunda}} + \underbrace{(x^2 + 3x)}_{\text{Primera}}\underbrace{\frac{d}{dx}(4x + 5)}_{\substack{\text{Derivada de} \\ \text{la segunda}}} \\
&= (2x + 3)(4x + 5) + (x^2 + 3x)(4) \\
&= 12x^2 + 34x + 15 \qquad \text{simplificación}
\end{aligned}$$

Esto concuerda con nuestro resultado previo. [Vea la ecuación (1)]. Aunque aquí la regla del producto no parece tener mucha utilidad práctica, se verá que en ocasiones resulta impráctico evitarla.

Ahora resuelva el problema 1 ◁

¡ADVERTENCIA!

Vale la pena repetir que la derivada del producto de dos funciones es algo sutil. Resista la tentación de intentar desarrollar una regla más simple.

EJEMPLO 2 Aplicación de la regla del producto

Si $y = (x^{2/3} + 3)(x^{-1/3} + 5x)$, encuentre dy/dx.

Solución: Al aplicar la regla del producto se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(x^{2/3} + 3)(x^{-1/3} + 5x) + (x^{2/3} + 3)\frac{d}{dx}(x^{-1/3} + 5x) \\
&= \left(\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)(x^{-1/3} + 5x) + (x^{2/3} + 3)\left(\frac{-1}{3}x^{-4/3} + 5\right) \\
&= \frac{25}{3}x^{2/3} + \frac{1}{3}x^{-2/3} - x^{-4/3} + 15
\end{aligned}$$

De manera alternativa, se podría haber encontrado la derivada sin la regla del producto al determinar primero el producto $(x^{2/3} + 3)(x^{-1/3} + 5x)$ para después diferenciar el resultado término por término.

Ahora resuelva el problema 15 ◁

APLÍQUELO ▶

6. Un puesto de tacos vende, por lo general, 225 tacos por día a \$2 cada uno. La investigación de un estudiante de administración dice que por cada \$0.15 de disminución en el precio, el puesto vendería 20 tacos más por día. La función de ingreso para el puesto de tacos es $R(x) = (2 - 0.15x)(225 + 20x)$, donde x es el número de reducciones de \$0.15 en el precio. Encuentre $\frac{dR}{dx}$.

EJEMPLO 3 Diferenciación de un producto de tres factores

Si $y = (x + 2)(x + 3)(x + 4)$, encuentre y'.

Solución:

Estrategia Sería deseable utilizar la regla del producto, pero ésta se aplica sólo cuando se tienen *dos* factores. Considerando los primeros dos factores como uno solo, puede tratarse a y como un producto de dos funciones:

$$y = [(x + 2)(x + 3)](x + 4)$$

La regla del producto da

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{d}{dx}[(x + 2)(x + 3)](x + 4) + [(x + 2)(x + 3)]\frac{d}{dx}(x + 4) \\
&= \frac{d}{dx}[(x + 2)(x + 3)](x + 4) + [(x + 2)(x + 3)](1)
\end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la regla del producto, se tiene

$$\begin{aligned} y' &= \left(\frac{d}{dx}(x+2)(x+3) + (x+2)\frac{d}{dx}(x+3)\right)(x+4) + (x+2)(x+3) \\ &= [(1)(x+3) + (x+2)(1)](x+4) + (x+2)(x+3) \end{aligned}$$

Después de simplificar, se obtiene

$$y' = 3x^2 + 18x + 26$$

Otras dos maneras de encontrar la derivada son:

1. Multiplicar los primeros dos factores de y para obtener

$$y = (x^2 + 5x + 6)(x + 4)$$

y luego aplicar la regla del producto.

2. Multiplicar los tres factores para obtener

$$y = x^3 + 9x^2 + 26x + 24$$

y luego diferenciar término por término.

Ahora resuelva el problema 19 ◁

En ocasiones resulta útil recordar las reglas de diferenciación con una notación más eficiente. Por ejemplo,

$$(fg)' = f'g + fg'$$

es una igualdad de funciones correcta que expresa la regla del producto. Entonces, es posible calcular

$$\begin{aligned} (fgh)' &= ((fg)h)' \\ &= (fg)'h + (fg)h' \\ &= (f'g + fg')h + (fg)h' \\ &= f'gh + fg'h + fgh' \end{aligned}$$

No se sugiere que el estudiante trate de memorizar reglas de la derivada, tales como

$$(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$$

Dado que $f'g + fg' = gf' + fg'$, usando la conmutatividad del producto de funciones, se puede expresar la regla del producto con las derivadas como segundos factores:

$$(fg)' = gf' + fg'$$

y usando la conmutatividad de la suma

$$(fg)' = fg' + gf'$$

Hay quien prefiere utilizar estas formas.

APLÍQUELO ▶

7. Una hora después de que a una persona se le dan x miligramos de cierto medicamento, el cambio en la temperatura del cuerpo, $T(x)$, en grados Fahrenheit, está dado de manera aproximada por $T(x) = x^2\left(1 - \frac{x}{3}\right)$. La razón a la cual cambia T con respecto al tamaño de la dosis x, $T'(x)$, se denomina *sensibilidad* del cuerpo a la dosis. Determine la sensibilidad cuando la dosis es de 1 miligramo. No utilice la regla del producto.

EJEMPLO 4 Uso de la regla del producto para encontrar la pendiente

Encuentre la pendiente de la gráfica de $f(x) = (7x^3 - 5x + 2)(2x^4 + 7)$ cuando $x = 1$.

Solución:

Estrategia La pendiente se encuentra al evaluar la derivada en $x = 1$. Como f es un producto de dos funciones, es posible encontrar la derivada usando la regla del producto.

Se tiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= (7x^3 - 5x + 2)\frac{d}{dx}(2x^4 + 7) + (2x^4 + 7)\frac{d}{dx}(7x^3 - 5x + 2) \\ &= (7x^3 - 5x + 2)(8x^3) + (2x^4 + 7)(21x^2 - 5) \end{aligned}$$

Puesto que se debe calcular $f'(x)$ cuando $x = 1$, *no hay necesidad de simplificar* $f'(x)$ *antes de evaluarla*. Al sustituir en $f'(x)$, se obtiene

$$f'(1) = 4(8) + 9(16) = 176$$

Ahora resuelva el problema 49 ◁

La regla del producto (y la regla del cociente que se muestra enseguida) no debe aplicarse cuando esté disponible un método más directo y eficiente.

Por lo general, no se usa la regla del producto cuando es obvio que se puede aplicar un procedimiento más sencillo. Por ejemplo, si $f(x) = 2x(x + 3)$, entonces resulta más rápido escribir $f(x) = 2x^2 + 6x$, a partir de lo cual $f'(x) = 4x + 6$. De manera similar, no suele emplearse la regla del producto para diferenciar $y = 4(x^2 - 3)$. Como el 4 es un factor constante, según la regla del factor constante se sabe que $y' = 4(2x) = 8x$.

La regla siguiente se usa para diferenciar un *cociente* de dos funciones.

REGLA COMBINADA 4 Regla del cociente

Si f y g son funciones diferenciables y $g(x) \neq 0$, entonces el cociente f/g es también diferenciable y

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

Con el entendimiento de que el denominador no debe ser 0, es posible escribir

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^2}$$

Esto es, la derivada del cociente de dos funciones es el denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador, todo ello dividido entre el cuadrado del denominador.

$$\frac{d}{dx}(\text{cociente}) = \frac{(\text{denominador})\begin{pmatrix}\text{derivada}\\ \text{del numerador}\end{pmatrix} - (\text{numerador})\begin{pmatrix}\text{derivada}\\ \text{del denominador}\end{pmatrix}}{(\text{denominator})^2}$$

Demostración. Si $F(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, entonces

$$F(x)g(x) = f(x)$$

Por la regla del producto,

$$F(x)g'(x) + g(x)F'(x) = f'(x)$$

Al despejar $F'(x)$, se obtiene

$$F'(x) = \frac{f'(x) - F(x)g'(x)}{g(x)}$$

Pero $F(x) = f(x)/g(x)$. Así,

$$F'(x) = \frac{f'(x) - \dfrac{f(x)g'(x)}{g(x)}}{g(x)}$$

Al simplificar[10] se obtiene

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

¡ADVERTENCIA!

La derivada del cociente de dos funciones es aún más complicada que la regla del producto. Es necesario recordar dónde va el signo menos.

[10] La demostración dada supone la existencia de $F'(x)$. Sin embargo, esta regla puede demostrarse sin dicho supuesto.

EJEMPLO 5 **Aplicación de la regla del cociente**

Si $F(x) = \dfrac{4x^2+3}{2x-1}$, encuentre $F'(x)$.

Solución:

Estrategia Se considera a F como un cociente y se aplica la regla del cociente.

Sea $f(x) = 4x^2 + 3$ y $g(x) = 2x - 1$. Entonces

$$F'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$= \frac{\overbrace{(2x-1)}^{\text{Denominador}} \overbrace{\frac{d}{dx}(4x^2+3)}^{\text{Derivada del denominador}} - \overbrace{(4x^2+3)}^{\text{Numerador}} \overbrace{\frac{d}{dx}(2x-1)}^{\text{Derivada del numerador}}}{\underbrace{(2x-1)^2}_{\text{Cuadrado del denominador}}}$$

$$= \frac{(2x-1)(8x) - (4x^2+3)(2)}{(2x-1)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 8x - 6}{(2x-1)^2} = \frac{2(2x+1)(2x-3)}{(2x-1)^2}$$

Ahora resuelva el problema 21 ◁

EJEMPLO 6 **Reescribir antes de diferenciar**

Diferenciemos $y = \dfrac{1}{x + \dfrac{1}{x+1}}$.

Solución:

Estrategia Para simplificar la diferenciación, se reescribirá la función de manera que ninguna fracción aparezca en el denominador.

Se tiene

$$y = \frac{1}{x + \dfrac{1}{x+1}} = \frac{1}{\dfrac{x(x+1)+1}{x+1}} = \frac{x+1}{x^2+x+1}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+x+1)(1) - (x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} \qquad \text{regla del cociente}$$

$$= \frac{(x^2+x+1) - (2x^2+3x+1)}{(x^2+x+1)^2}$$

$$= \frac{-x^2-2x}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{x^2+2x}{(x^2+x+1)^2}$$

Ahora resuelva el problema 45 ◁

Aunque una función puede tener la forma de un cociente, esto no implica necesariamente que se deba usar la regla del cociente para encontrar su derivada. El ejemplo siguiente ilustra algunas situaciones típicas donde, aunque puede emplearse la regla del cociente, se dispone de un procedimiento más sencillo y eficiente.

EJEMPLO 7 **Diferenciación de cocientes sin usar la regla del cociente**

Diferenciemos las funciones siguientes.

a. $f(x) = \dfrac{2x^3}{5}$

Solución: Se reescribe la función para tener $f(x) = \frac{2}{5}x^3$. Por la regla del factor constante,

$$f'(x) = \frac{2}{5}(3x^2) = \frac{6x^2}{5}$$

b. $f(x) = \dfrac{4}{7x^3}$

Solución: Se reescribe la función para tener $f(x) = \frac{4}{7}(x^{-3})$. Entonces,

$$f'(x) = \frac{4}{7}(-3x^{-4}) = -\frac{12}{7x^4}$$

c. $f(x) = \dfrac{5x^2 - 3x}{4x}$

¡ADVERTENCIA!

Para diferenciar $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 2}$, se podría intentar reescribir primero el cociente como $(x^2 - 2)^{-1}$. Por ahora sería un error hacerlo ya que por el momento no se tiene una regla para diferenciar esa forma. En resumen, no hay otra opción más que utilizar la regla del cociente. Sin embargo, en la sección siguiente se desarrollará una regla que permitirá diferenciar $(x^2 - 2)^{-1}$ de manera directa y eficiente.

Solución: Se reescribe la función y se tiene $f(x) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5x^2 - 3x}{x}\right) = \dfrac{1}{4}(5x - 3)$ para $x \neq 0$. Por lo que,

$$f'(x) = \frac{1}{4}(5) = \frac{5}{4} \qquad \text{para } x \neq 0$$

Como la función f no está definida para $x = 0$, f' tampoco está definida para $x = 0$.

Ahora resuelva el problema 17 ◁

EJEMPLO 8 **Ingreso marginal**

Si la ecuación de demanda para el producto de un fabricante es

$$p = \frac{1000}{q + 5}$$

donde p es el valor monetario, encuentre la función de ingreso marginal y evalúela cuando $q = 45$.

Solución:

Estrategia Primero se debe encontrar la función de ingreso. El ingreso r recibido por vender q unidades cuando el precio por unidad es p está dado por

$$\textbf{ingreso} = (\textbf{precio})(\textbf{cantidad}); \quad \text{esto es,} \quad r = pq$$

Usando la ecuación de demanda, se expresará r sólo en términos de q. Luego se diferencia para encontrar la función de ingreso marginal, dr/dq.

La función de ingreso es

$$r = \left(\frac{1000}{q + 5}\right)q = \frac{1000q}{q + 5}$$

Así, la función de ingreso marginal está dada por

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dq} &= \frac{(q + 5)\dfrac{d}{dq}(1000q) - (1000q)\dfrac{d}{dq}(q + 5)}{(q + 5)^2} \\ &= \frac{(q + 5)(1000) - (1000q)(1)}{(q + 5)^2} = \frac{5000}{(q + 5)^2}\end{aligned}$$

y

$$\left.\frac{dr}{dq}\right|_{q=45} = \frac{5000}{(45+5)^2} = \frac{5000}{2500} = 2$$

Esto significa que vender una unidad adicional por arriba de 45 resulta en aproximadamente \$2 más de ingreso.

Ahora resuelva el problema 59 ◁

Función de consumo

Una función que desempeña un papel importante en el análisis económico es la **función de consumo**. Esta función, $C = f(I)$, expresa una relación entre el ingreso nacional total, I, y el consumo nacional total, C. Por lo general, tanto I como C se expresan en miles de millones e I se restringe a cierto intervalo. La *propensión marginal al consumo* se define como la razón de cambio del consumo con respecto al ingreso. Es simplemente la derivada de C con respecto a I:

$$\text{Propensión marginal al consumo} = \frac{dC}{dI}$$

Si asumimos que la diferencia entre el ingreso I y el consumo C es el ahorro S, entonces

$$S = I - C$$

Al diferenciar ambos lados de la ecuación con respecto a I se obtiene

$$\frac{dS}{dI} = \frac{d}{dI}(I) - \frac{d}{dI}(C) = 1 - \frac{dC}{dI}$$

Se define dS/dI como la **propensión marginal al ahorro**. Así, la propensión marginal al ahorro indica qué tan rápido cambia el ahorro con respecto al ingreso, y

$$\begin{matrix}\text{Propensión marginal}\\ \text{al ahorro}\end{matrix} = 1 - \begin{matrix}\text{Propensión marginal}\\ \text{al consumo}\end{matrix}$$

EJEMPLO 9 **Determinación de las propensiones marginales al consumo y al ahorro**

Si la función de consumo está dada por

$$C = \frac{5(2\sqrt{I^3}+3)}{I+10}$$

determine la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando $I = 100$.

Solución:

$$\frac{dC}{dI} = 5\left(\frac{(I+10)\frac{d}{dI}(2I^{3/2}+3) - (2\sqrt{I^3}+3)\frac{d}{dI}(I+10)}{(I+10)^2}\right)$$

$$= 5\left(\frac{(I+10)(3I^{1/2}) - (2\sqrt{I^3}+3)(1)}{(I+10)^2}\right)$$

Cuando $I = 100$, la propensión marginal al consumo es

$$\left.\frac{dC}{dI}\right|_{I=100} = 5\left(\frac{1297}{12\,100}\right) \approx 0.536$$

La propensión marginal al ahorro cuando $I = 100$ es $1 - 0.536 = 0.464$. Esto significa que si un ingreso actual de \$100 000 millones aumenta en \$1000 millones, la nación consume aproximadamente el 53.6% (536/1000) y ahorra 46.4% (464/1000) de ese incremento.

Ahora resuelva el problema 69 ◁

PROBLEMAS 11.4

En los problemas del 1 al 48, diferencie las funciones.

1. $f(x) = (4x+1)(6x+3)$
2. $f(x) = (3x-1)(7x+2)$
3. $s(t) = (5-3t)(t^3-2t^2)$
4. $Q(x) = (x^2+3x)(7x^2-5)$
5. $f(r) = (3r^2-4)(r^2-5r+1)$
6. $C(I) = (2I^2-3)(3I^2-4I+1)$
7. $f(x) = x^2(2x^2-5)$
8. $f(x) = 3x^3(x^2-2x+2)$
9. $y = (x^2+5x-7)(6x^2-5x+4)$
10. $\phi(x) = (3-5x+2x^2)(2+x-4x^2)$
11. $f(w) = (w^2+3w-7)(2w^3-4)$
12. $f(x) = (3x-x^2)(3-x-x^2)$
13. $y = (x^2-1)(3x^3-6x+5)-4(4x^2+2x+1)$
14. $h(x) = 5(x^7+4)+4(5x^3-2)(4x^2+7x)$
15. $F(p) = \frac{3}{2}(5\sqrt{p}-2)(3p-1)$
16. $g(x) = (\sqrt{x}+5x-2)(\sqrt[3]{x}-3\sqrt{x})$
17. $y = 7 \cdot \frac{2}{3}$
18. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$
19. $y = (5x+3)(2x-5)(7x+9)$
20. $y = \dfrac{2x-3}{4x+1}$
21. $f(x) = \dfrac{5x}{x-1}$
22. $H(x) = \dfrac{-5x}{5-x}$
23. $f(x) = \dfrac{-13}{3x^5}$
24. $f(x) = \dfrac{3(5x^2-7)}{4}$
25. $y = \dfrac{x+2}{x-1}$
26. $h(w) = \dfrac{3w^2+5w-1}{w-3}$
27. $h(z) = \dfrac{6-2z}{z^2-4}$
28. $z = \dfrac{2x^2+5x-2}{3x^2+5x+3}$
29. $y = \dfrac{4x^2+3x+2}{3x^2-2x+1}$
30. $f(x) = \dfrac{x^3-x^2+1}{x^2+1}$
31. $y = \dfrac{x^2-4x+3}{2x^2-3x+2}$
32. $F(z) = \dfrac{z^4+4}{3z}$
33. $g(x) = \dfrac{1}{x^{100}+7}$
34. $y = \dfrac{-8}{7x^6}$
35. $u(v) = \dfrac{v^3-8}{v}$
36. $y = \dfrac{x-5}{8\sqrt{x}}$
37. $y = \dfrac{3x^2-x-1}{\sqrt[3]{x}}$
38. $y = \dfrac{x^{0.3}-2}{2x^{2.1}+1}$
39. $y = 1 - \dfrac{5}{2x+5} + \dfrac{2x}{3x+1}$
40. $q(x) = 2x^3 + \dfrac{5x+1}{3x-5} - \dfrac{2}{x^3}$
41. $y = \dfrac{x-5}{(x+2)(x-4)}$
42. $y = \dfrac{(9x-1)(3x+2)}{4-5x}$
43. $s(t) = \dfrac{t^2+3t}{(t^2-1)(t^3+7)}$
44. $f(s) = \dfrac{17}{s(4s^3+5s-23)}$
45. $y = 3x - \dfrac{\frac{2}{x} - \frac{3}{x-1}}{x-2}$
46. $y = 3 - 12x^3 + \dfrac{1 - \frac{5}{x^2+}}{x^2+5}$
47. $f(x) = \dfrac{a+x}{a-x}$, donde a es una constante.
48. $f(x) = \dfrac{x^{-1}+a^{-1}}{x^{-1}-a^{-1}}$, donde a es una constante.
49. Encuentre la pendiente de la curva $y = (2x^2-x+3)(x^3+x+1)$ en $(1, 12)$.
50. Encuentre la pendiente de la curva $y = \dfrac{x^3}{x^4+1}$ en $(-1, -\frac{1}{2})$.

En los problemas del 51 al 54, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

51. $y = \dfrac{6}{x-1}$; $(3, 3)$
52. $y = \dfrac{x+5}{x^2}$; $(1, 6)$
53. $y = (2x+3)[2(x^4-5x^2+4)]$; $(0, 24)$
54. $y = \dfrac{x-1}{x(x^2+1)}$; $(2, \frac{1}{10})$

En los problemas 55 y 56, determine la razón de cambio relativa de y con respecto a x para el valor dado de x.

55. $y = \dfrac{x}{2x-6}$; $x = 1$
56. $y = \dfrac{1-x}{1+x}$; $x = 5$

57. **Movimiento** La función de posición de un objeto que se desplaza en línea recta es
$$s = \frac{2}{t^3+1}$$
donde t está en segundos y s en metros. Encuentre la posición y la velocidad del objeto en $t = 1$.

58. **Movimiento** La función de posición de un objeto que se desplaza en línea recta es
$$s = \frac{t+3}{t^2+7}$$
donde t está en segundos y s en metros. Encuentre el o los valores positivos de t para los cuales la velocidad del objeto es 0.

En los problemas del 59 al 62, cada ecuación representa una función de demanda para cierto producto, donde p denota el precio por unidad para q unidades. En cada caso, encuentre la función de ingreso marginal. Recuerde que ingreso = pq.

59. $p = 80 - 0.02q$
60. $p = 500/q$
61. $p = \dfrac{108}{q+2} - 3$
62. $p = \dfrac{q+750}{q+50}$

63. **Función de consumo** Para Estados Unidos (1922-1942), la función de consumo se estimó por medio de la ecuación[11]
$$C = 0.672I + 113.1$$
Encuentre la propensión marginal al consumo.

64. **Función de consumo** Repita el problema 63 para $C = 0.836I + 127.2$.

En los problemas del 65 al 68, cada ecuación representa una función de consumo. Encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro para el valor dado de I.

65. $C = 3 + \sqrt{I} + 2\sqrt[3]{I}$; $I = 1$
66. $C = 6 + \dfrac{3I}{4} - \dfrac{\sqrt{I}}{3}$; $I = 25$

[11] T. Haavelmo, "Methods of Measuring the Marginal Propensity to Consume", *Journal of the American Statistical Association*, XLII (1947), pp. 105-122.

67. $C = \dfrac{16\sqrt{I} + 0.8\sqrt{I^3} - 0.2I}{\sqrt{I} + 4}; I = 36$

68. $C = \dfrac{20\sqrt{I} + 0.5\sqrt{I^3} - 0.4I}{\sqrt{I} + 5}; I = 100$

69. Función de consumo Suponga que la función de consumo de un país está dada por

$$C = \frac{9\sqrt{I} + 0.8\sqrt{I^3} - 0.3I}{\sqrt{I}}$$

donde C e I se expresan en miles de millones.
(a) Encuentre la propensión marginal al ahorro cuando el ingreso es de $25 000 millones.
(b) Determine la razón de cambio relativa de C con respecto a I cuando el ingreso es de $25 000 millones.

70. Propensiones marginales a consumir y ahorrar Suponga que la función de ahorro de un país es

$$S = \frac{I - 2\sqrt{I} - 8}{\sqrt{I} + 2}$$

donde el ingreso nacional (I) y el ahorro nacional (S) se miden en miles de millones. Encuentre la propensión marginal del país a consumir y su propensión marginal al ahorro cuando el ingreso nacional es de $150 000 millones. (*Sugerencia:* Puede ser útil factorizar primero el numerador).

71. Costo marginal Si la función de costo total de un fabricante está dada por

$$c = \frac{6q^2}{q + 2} + 6000$$

encuentre la función de costo marginal.

72. Costo marginal y costo promedio Dada la función de costo $c = f(q)$, demuestre que si $\dfrac{d}{dq}(\overline{c}) = 0$, entonces la función de costo marginal y la de costo promedio son iguales.

73. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se determinó que cuando la densidad de huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes que tienen parásitos es y, donde

$$y = \frac{900x}{10 + 45x}$$

¿A qué razón está cambiando el número de huéspedes que tienen parásitos con respecto a la densidad de huésped cuando $x = 2$?

74. Acústica La persistencia del sonido en un recinto después de que la fuente del sonido se ha apagado se llama *reverberación*. El *tiempo de reverberación* RT del recinto es el periodo necesario para que el nivel de intensidad del sonido caiga a 60 decibeles. En el diseño acústico de un auditorio, puede utilizarse la fórmula siguiente para calcular el RT del recinto:[12]

$$\text{RT} = \frac{0.05V}{A + xV}$$

Aquí V es el volumen del recinto, A la absorción total de éste y x el coeficiente de absorción del aire. Suponiendo que A y x son constantes positivas, demuestre que la razón de cambio de RT con respecto al V siempre es positiva. Si el volumen total del recinto se incrementa en una unidad, ¿aumenta o disminuye el tiempo de reverberación?

75. Depredador-presa En un experimento[13] que estudió la relación depredador-presa, se determinó de manera estadística que el número de presas consumidas, y, por un depredador individual es una función de la densidad x de presas (el número de presas por unidad de área), donde

$$y = \frac{0.7355x}{1 + 0.02744x}$$

Determine la razón de cambio de las presas consumidas con respecto a su densidad.

76. Beneficios de seguridad social En un estudio sobre los beneficios de la seguridad social, Feldstein[14] diferencia una función de la forma

$$f(x) = \frac{a(1 + x) - b(2 + n)x}{a(2 + n)(1 + x) - b(2 + n)x}$$

donde a, b y n son constantes. Feldstein determina que

$$f'(x) = \frac{-1(1 + n)ab}{(a(1 + x) - bx)^2(2 + n)}$$

Verifique esto. (*Sugerencia:* Por conveniencia, haga $2 + n = c$). Después observe que la función f de Feldestein tiene la forma

$$g(x) = \frac{A + Bx}{C + Dx}, \quad \text{donde } A, B, C \text{ y } D \text{ son constantes}$$

Demuestre que $g'(x)$ es una constante dividida entre una función no negativa de x. ¿Qué significa esto?

77. Negocios El fabricante de un producto encontró que cuando se producen 20 unidades por día, el costo promedio es de $150 y el costo marginal de $125. ¿Cuál es la razón de cambio relativa del costo promedio con respecto a la cantidad cuando $q = 20$?

78. Utilice el resultado $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$ para encontrar dy/dx si

$$y = (3x + 1)(2x - 1)(x - 4)$$

Objetivo

Introducir y aplicar la regla de la cadena, derivar un caso especial de la regla de la cadena y desarrollar el concepto de producto del ingreso marginal como una aplicación de la regla de la cadena.

11.5 Regla de la cadena

La siguiente regla, *regla de la cadena*, es una de las más importantes para obtener derivadas. Implica una situación en la que y es una función de la variable u, pero u es una función de x

[12] L. L. Doelle, *Environmental Acoustics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1972).
[13] C. S. Holling, "Some Characteristics of Simple Types of Predation and Parasitism", *The Canadian Entomologist*, XCI, núm. 7 (1959), pp. 385-398.
[14] M. Feldstein, "The Optimal Level of Social Security Benefits", *The Quarterly Journal of Economics*, C, núm. 2 (1985), pp. 303-320.

y se desea encontrar la derivada de y con respecto a x. Por ejemplo, las ecuaciones

$$y = u^2 \quad \text{y} \quad u = 2x + 1$$

definen a y como una función de u y a u como una función de x. Si se sustituye u por $2x + 1$ en la primera ecuación, se puede considerar a y como una función de x:

$$y = (2x + 1)^2$$

Para encontrar dy/dx, primero se desarrolla $(2x + 1)^2$:

$$y = 4x^2 + 4x + 1$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = 8x + 4$$

En este ejemplo, puede verse que encontrar dy/dx efectuando primero una sustitución puede ser bastante complicado. Por ejemplo, si se hubiera tenido $y = u^{100}$ en vez de $y = u^2$, ni siquiera se intentaría efectuar la sustitución. Por fortuna, la regla de la cadena permite manejar tales situaciones con facilidad.

REGLA COMBINADA 5 Regla de la cadena

Si y es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, entonces y es una función diferenciable de x y

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Se puede mostrar por qué la regla de la cadena es razonable considerando razones de cambio. Suponga

$$y = 8u + 5 \quad \text{y} \quad u = 2x - 3$$

Si x cambia en una unidad, ¿cómo cambia u? Para responder esta pregunta, se deriva y se encuentra que $du/dx = 2$. Pero para *cada* cambio de una unidad en u hay un cambio en y de $dy/du = 8$. Por lo tanto, ¿cuál es el cambio en y si x cambia en una unidad?; esto es, ¿qué valor tiene dy/dx? La respuesta es $8 \cdot 2$, que es $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Así, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Ahora se utilizará la regla de la cadena para volver a resolver el problema planteado al principio de esta sección. Si

$$y = u^2 \qquad \text{y} \qquad u = 2x + 1$$

entonces

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= \frac{d}{du}(u^2) \cdot \frac{d}{dx}(2x + 1)\\ &= (2u)2 = 4u\end{aligned}$$

Al reemplazar u por $2x + 1$ se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = 4(2x + 1) = 8x + 4$$

lo cual concuerda con el resultado previo.

APLÍQUELO ▶

8. Si un objeto se desplaza en forma horizontal de acuerdo con $x = 6t$, donde t está en segundos, y verticalmente de acuerdo con $y = 4x^2$, encuentre su velocidad vertical $\frac{dy}{dt}$.

EJEMPLO 1 Uso de la regla de la cadena

a. Si $y = 2u^2 - 3u - 2$ y $u = x^2 + 4$, encuentre dy/dx.

Solución: Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} &= \frac{d}{du}(2u^2 - 3u - 2) \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 4)\\ &= (4u - 3)(2x)\end{aligned}$$

Se puede escribir la respuesta sólo en términos de x reemplazando u por $x^2 + 4$.

$$\frac{dy}{dx} = [4(x^2 + 4) - 3](2x) = [4x^2 + 13](2x) = 8x^3 + 26x$$

b. Si $y = \sqrt{w}$ y $w = 7 - t^3$, encuentre dy/dt.

Solución: Aquí, y es una función de w y w es una función de t, por lo que se puede considerar a y como una función de t. Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{dy}{dw}\cdot\frac{dw}{dt} = \frac{d}{dw}(\sqrt{w})\cdot\frac{d}{dt}(7-t^3)\\ &= \left(\frac{1}{2}w^{-1/2}\right)(-3t^2) = \frac{1}{2\sqrt{w}}(-3t^2)\\ &= -\frac{3t^2}{2\sqrt{w}} = -\frac{3t^2}{2\sqrt{7-t^3}}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 1 ◁

EJEMPLO 2 **Uso de la regla de la cadena**

Si $y = 4u^3 + 10u^2 - 3u - 7$ y $u = 4/(3x-5)$, encuentre dy/dx cuando $x = 1$.

Solución: Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{d}{du}(4u^3+10u^2-3u-7)\cdot\frac{d}{dx}\left(\frac{4}{3x-5}\right)\\ &= (12u^2+20u-3)\cdot\frac{(3x-5)\frac{d}{dx}(4) - 4\frac{d}{dx}(3x-5)}{(3x-5)^2}\\ &= (12u^2+20u-3)\cdot\frac{-12}{(3x-5)^2}\end{aligned}$$

Cuando x se reemplaza por a, $u = u(x)$ debe reemplazarse por $u(a)$.

Aun cuando dy/dx está en términos de x y u, se puede evaluar cuando $x = 1$ si se determina el valor correspondiente de u. Cuando $x = 1$,

$$u = \frac{4}{3(1)-5} = -2$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} &= [12(-2)^2 + 20(-2) - 3]\cdot\frac{-12}{[3(1)-5]^2}\\ &= 5\cdot(-3) = -15\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 5 ◁

La regla de la cadena establece que si $y = f(u)$ y $u = g(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

En realidad, la regla de la cadena se aplica a una composición de funciones, ya que

$$y = f(u) = f(g(x)) = (f\circ g)(x)$$

Así y, como una función de x, es $f\circ g$. Esto significa que se puede utilizar la regla de la cadena para diferenciar una función cuando se identifica a la función como una composición. Sin embargo, primero es necesario descomponer la función.

Por ejemplo, para diferenciar

$$y = (x^3 - x^2 + 6)^{100}$$

se piensa en la función como una composición. Sea

$$y = f(u) = u^{100} \quad \text{y} \quad u = g(x) = x^3 - x^2 + 6$$

Entonces $y = (x^3 - x^2 + 6)^{100} = (g(x))^{100} = f(g(x))$. Ahora que se tiene una composición, es posible diferenciarla. Como $y = u^{100}$ y $u = x^3 - x^2 + 6$, por la regla de la cadena se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= (100u^{99})(3x^2 - 2x)\\ &= 100(x^3 - x^2 + 6)^{99}(3x^2 - 2x)\end{aligned}$$

Se acaba de utilizar la regla de la cadena para diferenciar $y = (x^3 - x^2 + 6)^{100}$, que es una potencia de una *función* de x, no simplemente una potencia de x. La regla siguiente, llamada **regla de la potencia**, generaliza el resultado y es un caso especial de la regla de la cadena.

Regla de la potencia $\qquad \dfrac{d}{dx}(u^a) = au^{a-1}\dfrac{du}{dx}$

donde se entiende que u es una función diferenciable de x y a es un número real.

Demostración. Sea $y = u^a$. Como y es una función diferenciable de u y u es una función diferenciable de x, la regla de la cadena da

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

Pero $dy/du = au^{a-1}$. Por lo que,

$$\frac{dy}{dx} = au^{a-1}\frac{du}{dx}$$

que es la regla de la potencia.

EJEMPLO 3 Uso de la regla de la potencia

Si $y = (x^3 - 1)^7$, encuentre y'.

Solución: Como y es una potencia de una *función* de x, es aplicable la regla de la potencia. Al hacer $u(x) = x^3 - 1$ y $a = 7$, se tiene

$$\begin{aligned}y' &= a[u(x)]^{a-1}u'(x)\\ &= 7(x^3 - 1)^{7-1}\frac{d}{dx}(x^3 - 1)\\ &= 7(x^3 - 1)^6(3x^2) = 21x^2(x^3 - 1)^6\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 9 ◁

EJEMPLO 4 Uso de la regla de la potencia

Si $y = \sqrt[3]{(4x^2 + 3x - 2)^2}$, encuentre dy/dx cuando $x = -2$.

Solución: Como $y = (4x^2 + 3x - 2)^{2/3}$, se utiliza la regla de la potencia con

$$u = 4x^2 + 3x - 2$$

y $a = \frac{2}{3}$. Se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{2}{3}(4x^2 + 3x - 2)^{(2/3)-1}\frac{d}{dx}(4x^2 + 3x - 2)\\ &= \frac{2}{3}(4x^2 + 3x - 2)^{-1/3}(8x + 3)\\ &= \frac{2(8x + 3)}{3\sqrt[3]{4x^2 + 3x - 2}}\end{aligned}$$

Así,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=-2} = \frac{2(-13)}{3\sqrt[3]{8}} = -\frac{13}{3}$$

Ahora resuelva el problema 19 ◁

EJEMPLO 5 Uso de la regla de la potencia

La técnica usada en el ejemplo 5 se utiliza con frecuencia cuando el numerador de un cociente es una constante y el denominador no lo es.

Si $y = \dfrac{1}{x^2-2}$, encuentre $\dfrac{dy}{dx}$.

Solución: Aunque aquí puede emplearse la regla del cociente, un procedimiento más eficiente consiste en tratar el lado derecho como la potencia $(x^2-2)^{-1}$ y utilizar la regla de la potencia. Sea $u = x^2 - 2$. Entonces $y = u^{-1}$ y

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= (-1)(x^2-2)^{-1-1}\frac{d}{dx}(x^2-2)\\ &= (-1)(x^2-2)^{-2}(2x)\\ &= -\frac{2x}{(x^2-2)^2}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 27 ◁

EJEMPLO 6 Diferenciación de una potencia de un cociente

Si $z = \left(\dfrac{2s+5}{s^2+1}\right)^4$, encuentre $\dfrac{dz}{ds}$.

Aquí el problema es reconocer la forma de la función que se va a diferenciar. En este caso, es una potencia, no un cociente.

Solución: Como z es una potencia de una función, primero se utiliza la regla de la potencia:

$$\frac{dz}{ds} = 4\left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)^{4-1}\frac{d}{ds}\left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)$$

Ahora se emplea la regla del cociente:

$$\frac{dz}{ds} = 4\left(\frac{2s+5}{s^2+1}\right)^3\left(\frac{(s^2+1)(2)-(2s+5)(2s)}{(s^2+1)^2}\right)$$

Al simplificar, se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{dz}{ds} &= 4\cdot\frac{(2s+5)^3}{(s^2+1)^3}\left(\frac{-2s^2-10s+2}{(s^2+1)^2}\right)\\ &= -\frac{8(s^2+5s-1)(2s+5)^3}{(s^2+1)^5}\end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 41 ◁

EJEMPLO 7 Diferenciación de un producto de potencias

Si $y = (x^2-4)^5(3x+5)^4$, encuentre y'.

Solución: Como y es un producto, se aplica primero la regla del producto:

$$y' = (x^2-4)^5\frac{d}{dx}((3x+5)^4) + (3x+5)^4\frac{d}{dx}((x^2-4)^5)$$

Ahora se emplea la regla de la potencia:

$$\begin{aligned}y' &= (x^2-4)^5(4(3x+5)^3(3)) + (3x+5)^4(5(x^2-4)^4(2x))\\ &= 12(x^2-4)^5(3x+5)^3 + 10x(3x+5)^4(x^2-4)^4\end{aligned}$$

Al diferenciar un producto en el que al menos un factor es una potencia, la simplificación de la derivada implica, por lo general, factorizar.

Para simplificar, primero se eliminan los factores comunes:

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^2 - 4)^4(3x + 5)^3[6(x^2 - 4) + 5x(3x + 5)] \\ &= 2(x^2 - 4)^4(3x + 5)^3(21x^2 + 25x - 24) \end{aligned}$$

Ahora resuelva el problema 39 ◁

Usualmente, se usaría la regla de la potencia para diferenciar $y = [u(x)]^n$. Aunque una función como $y = (x^2 + 2)^2$ puede escribirse como $y = x^4 + 4x^2 + 4$ y diferenciarse con facilidad, este procedimiento no es práctico para una función como $y = (x^2 + 2)^{1000}$. Como $y = (x^2 + 2)^{1000}$ es de la forma $y = [u(x)]^n$, se tiene que

$$y' = 1000(x^2 + 2)^{999}(2x)$$

Producto del ingreso marginal

Ahora se utilizará lo aprendido en cálculo para desarrollar un concepto de importancia en el estudio de la economía. Suponga que un fabricante emplea m personas para producir un total de q unidades de cierto artículo por día. Se puede pensar que q es una función de m. Si r es el ingreso total que el fabricante recibe al vender esas unidades, entonces r también puede considerarse como una función de m. Así, podemos ver a dr/dm como la razón de cambio del ingreso con respecto al número de empleados. La derivada dr/dm se llama **producto del ingreso marginal**. Es aproximadamente igual al cambio en el ingreso que resulta cuando un fabricante emplea un trabajador adicional.

EJEMPLO 8 Producto del ingreso marginal

Un fabricante determina que m empleados producirán un total de q unidades de cierto artículo por día, donde

$$q = \frac{10m^2}{\sqrt{m^2 + 19}} \tag{1}$$

Si la ecuación de demanda para el producto es $p = 900/(q + 9)$, determine el producto del ingreso marginal cuando $m = 9$.

Solución: Es necesario encontrar dr/dm, donde r es el ingreso. Observe que por la regla de la cadena,

$$\frac{dr}{dm} = \frac{dr}{dq} \cdot \frac{dq}{dm}$$

Así, se debe encontrar dr/dq y dq/dm cuando $m = 9$. Se comienza con dr/dq. La función de ingreso está dada por

$$r = pq = \left(\frac{900}{q + 9}\right)q = \frac{900q}{q + 9}$$

por lo que, a partir de la regla del cociente,

$$\frac{dr}{dq} = \frac{(q + 9)(900) - 900q(1)}{(q + 9)^2} = \frac{8100}{(q + 9)^2}$$

Para evaluar esta expresión cuando $m = 9$, se utiliza primero la ecuación $q = 10m^2/\sqrt{m^2 + 19}$ para encontrar el valor correspondiente de q:

$$q = \frac{10(9)^2}{\sqrt{9^2 + 19}} = 81$$

De modo que,

$$\left.\frac{dr}{dq}\right|_{m=9} = \left.\frac{dr}{dq}\right|_{q=81} = \frac{8100}{(81 + 9)^2} = 1$$

Ahora se calcula dq/dm. A partir de las reglas del cociente y la potencia se tiene

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dm} &= \frac{d}{dm}\left(\frac{10m^2}{\sqrt{m^2+19}}\right)\\ &= \frac{(m^2+19)^{1/2}\frac{d}{dm}(10m^2) - (10m^2)\frac{d}{dm}[(m^2+19)^{1/2}]}{[(m^2+19)^{1/2}]^2}\\ &= \frac{(m^2+19)^{1/2}(20m) - (10m^2)[\frac{1}{2}(m^2+19)^{-1/2}(2m)]}{m^2+19}\end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned}\left.\frac{dq}{dm}\right|_{m=9} &= \frac{(81+19)^{1/2}(20\cdot 9) - (10\cdot 81)[\frac{1}{2}(81+19)^{-1/2}(2\cdot 9)]}{81+19}\\ &= 10.71\end{aligned}$$

Una fórmula directa para obtener el producto del ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dm} = \frac{dq}{dm}\left(p + q\frac{dp}{dq}\right)$$

Entonces, por la regla de la cadena,

$$\left.\frac{dr}{dm}\right|_{m=9} = (1)(10.71) = 10.71$$

Esto significa que al emplear a un décimo trabajador, el ingreso aumentará en aproximadamente \$10.71 por día.

Ahora resuelva el problema 80 ◁

PROBLEMAS 11.5

En los problemas del 1 al 8, utilice la regla de la cadena.

1. Si $y = u^2 - 2u$ y $u = x^2 - x$, encuentre dy/dx.
2. Si $y = 2u^3 - 8u$ y $u = 7x - x^3$, encuentre dy/dx.
3. Si $y = \frac{1}{w}$ y $w = 3x - 5$, encuentre dy/dx.
4. Si $y = \sqrt[4]{z}$ y $z = x^5 - x^4 + 3$, encuentre dy/dx.
5. Si $w = u^3$ y $u = \frac{t-1}{t+1}$, encuentre dw/dt cuando $t = 1$.
6. Si $z = u^2 + \sqrt{u} + 9$ y $u = 2s^2 - 1$, encuentre dz/ds cuando $s = -1$.
7. Si $y = 3w^2 - 8w + 4$ y $w = 2x^2 + 1$, encuentre dy/dx cuando $x = 0$.
8. Si $y = 2u^3 + 3u^2 + 5u - 1$ y $u = 3x + 1$, encuentre dy/dx cuando $x = 1$.

En los problemas del 9 al 52, encuentre y'.

9. $y = (3x+2)^6$
10. $y = (x^2-4)^4$
11. $y = (3+2x^3)^5$
12. $y = (x^2+x)^4$
13. $y = 5(x^3-3x^2+2x)^{100}$
14. $y = \frac{(2x^2+1)^4}{2}$
15. $y = (x^2-2)^{-3}$
16. $y = (2x^3-8x)^{-12}$
17. $y = 2(x^2+5x-2)^{-5/7}$
18. $y = 3(5x-2x^3)^{-5/3}$
19. $y = \sqrt{5x^2-x}$
20. $y = \sqrt{3x^2-7}$
21. $y = \sqrt[4]{2x-1}$
22. $y = \sqrt[3]{8x^2-1}$
23. $y = 4\sqrt[7]{(x^2+1)^3}$
24. $y = 7\sqrt[3]{(x^5-3)^5}$
25. $y = \frac{6}{2x^2-x+1}$
26. $y = \frac{3}{x^4+2}$
27. $y = \frac{1}{(x^2-3x)^2}$
28. $y = \frac{1}{(3+5x)^3}$
29. $y = \frac{4}{\sqrt{9x^2+1}}$
30. $y = \frac{3}{(3x^2-x)^{2/3}}$
31. $y = \sqrt[3]{7x} + \sqrt[3]{7}x$
32. $y = \sqrt{2x} + \frac{1}{\sqrt{2x}}$
33. $y = x^3(2x+3)^7$
34. $y = x(x+4)^4$
35. $y = 4x^2\sqrt{5x+1}$
36. $y = 4x^3\sqrt{1-x^2}$
37. $y = (x^2+2x-1)^3(5x)$
38. $y = x^4(x^4-1)^5$
39. $y = (8x-1)^3(2x+1)^4$
40. $y = (3x+2)^5(4x-5)^2$
41. $y = \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{12}$
42. $y = \left(\frac{2x}{x+2}\right)^4$
43. $y = \sqrt{\frac{x+1}{x-5}}$
44. $y = \sqrt[3]{\frac{8x^2-3}{x^2+2}}$
45. $y = \frac{2x-5}{(x^2+4)^3}$
46. $y = \frac{(4x-2)^4}{3x^2+7}$
47. $y = \frac{(8x-1)^5}{(3x-1)^3}$
48. $y = \sqrt[3]{(x-3)^3(x+5)}$
49. $y = 6(5x^2+2)\sqrt{x^4+5}$
50. $y = 6 + 3x - 4x(7x+1)^2$
51. $y = 8t + \frac{t-1}{t+4} - \left(\frac{8t-7}{4}\right)^2$
52. $y = \frac{(2x^3+6)(7x-5)}{(2x+4)^2}$

En los problemas 53 y 54, utilice las reglas del cociente y de la potencia para encontrar y'. No simplifique su respuesta.

53. $y = \frac{(3x+2)^3(x+1)^4}{(x^2-7)^3}$
54. $y = \frac{\sqrt{x+2}(4x^2-1)^2}{9x-3}$

55. Si $y = (5u+6)^3$ y $u = (x^2+1)^4$, encuentre dy/dx cuando $x = 0$.
56. Si $z = 2y^2 - 4y + 5$, $y = 6x - 5$ y $x = 2t$, encuentre dz/dt cuando $t = 1$.
57. Encuentre la pendiente de la curva $y = (x^2 - 7x - 8)^3$ en el punto $(8, 0)$.

58. Encuentre la pendiente de la curva $y = \sqrt{x+2}$ en el punto $(7, 3)$.

En los problemas del 59 al 62, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto dado.

59. $y = \sqrt[3]{(x^2-8)^2}$; $(3, 1)$

60. $y = (x+3)^3$; $(-1, 8)$

61. $y = \dfrac{\sqrt{7x+2}}{x+1}$; $\left(1, \dfrac{3}{2}\right)$

62. $y = \dfrac{-3}{(3x^2+1)^3}$; $(0, -3)$

En los problemas 63 y 64, determine la razón de cambio porcentual de y con respecto a x para el valor dado de x.

63. $y = (x^2+1)^4$; $x = 1$

64. $y = \dfrac{1}{(x^2-1)^3}$; $x = 2$

En los problemas del 65 al 68, q es el número total de unidades producidas al día por m empleados de un fabricante y p es el precio de venta por unidad en el que se venden las q unidades. En cada caso, encuentre el producto del ingreso marginal para el valor dado de m.

65. $q = 5m$, $p = -0.4q + 50$; $m = 6$

66. $q = (200m - m^2)/20$, $p = -0.1q + 70$; $m = 40$

67. $q = 10m^2/\sqrt{m^2+9}$, $p = 525/(q+3)$; $m = 4$

68. $q = 50m/\sqrt{m^2+11}$, $p = 100/(q+10)$; $m = 5$

69. Ecuación de demanda Suponga que $p = 100 - \sqrt{q^2+20}$ es una ecuación de demanda para el producto de un fabricante.
(a) Encuentre la razón de cambio de p con respecto a q.
(b) Calcule la razón de cambio relativa de p con respecto a q.
(c) Determine la función de ingreso marginal.

70. Producto de ingreso marginal Si $p = k/q$, donde k es una constante, es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante y $q = f(m)$ define una función que da el número total de unidades producidas al día por m empleados, demuestre que el producto del ingreso marginal es siempre igual a 0.

71. Función de costo El costo c de producir q unidades de un producto está dado por

$$c = 5500 + 12q + 0.2q^2$$

Si el precio de p unidades está dado por la ecuación

$$q = 900 - 1.5p$$

utilice la regla de la cadena para encontrar la razón de cambio del costo con respecto al precio unitario cuando $p = 85$.

72. Altas de hospital Una dependencia gubernamental de salud examinó los registros de un grupo de individuos que estuvieron hospitalizados por una enfermedad específica. Se encontró que la cantidad total de personas que fueron dadas de alta al final de t días de hospitalización estaba dada por

$$f(t) = 1 - \left(\frac{250}{250+t}\right)^3$$

Encuentre $f'(100)$ e interprete su respuesta.

73. Costo marginal Si la función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{4q^2}{\sqrt{q^2+2}} + 6000$$

encuentre la función de costo marginal.

74. Salario y educación Para cierta población, si E es el número de años de educación de una persona y S representa el salario anual promedio, entonces para $E \geq 7$,

$$S = 340E^2 - 4360E + 42\,800$$

(a) ¿Qué tan rápido estará cambiando el salario con respecto a la educación cuando $E = 16$?
(b) ¿A qué nivel educativo la tasa de cambio del salario es igual a \$5000 por año de educación?

75. Biología El volumen de una célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde r es el radio. En un tiempo de t segundos, el radio (en centímetros) está dado por

$$r = 10^{-8}t^2 + 10^{-7}t$$

Use la regla de la cadena para encontrar dV/dt cuando $t = 10$.

76. Presión en tejidos vivos Bajo ciertas condiciones, la presión p desarrollada en los tejidos vivos por la radiación ultrasónica está dada como una función de la intensidad de la radiación mediante la ecuación[15]

$$p = (2\rho VI)^{1/2}$$

donde ρ (letra griega que se lee "ro") es la densidad del tejido afectado y V la velocidad de propagación de la radiación. Aquí ρ y V son constantes. (a) Encuentre la razón de cambio de p con respecto a I. (b) Encuentre la razón de cambio relativa de p con respecto a I.

77. Demografía Suponga que para cierto grupo de 20 000 nacimientos, el número de personas que alcanzan a vivir x años es

$$l_x = -0.000354x^4 + 0.00452x^3 + 0.848x^2 - 34.9x + 20\,000$$
$$0 \leq x \leq 95.2$$

(a) Encuentre la razón de cambio de I_x con respecto a x y evalúe su respuesta para $x = 65$.
(b) Encuentre la razón de cambio relativa y la razón de cambio porcentual de I_x cuando $x = 65$. Redondee sus respuestas a tres decimales.

78. Contracción muscular Un músculo tiene la capacidad de contraerse al estar sometido a una carga impuesta, por ejemplo, un peso. La ecuación

$$(P + a)(v + b) = k$$

se llama "ecuación fundamental de la contracción muscular".[16] Aquí, P es la carga impuesta al músculo, v es la velocidad de contracción de las fibras musculares y a, b y k son constantes positivas. Exprese v como una función de P. Utilice su resultado para encontrar dv/dP.

79. Economía Suponga que $pq = 100$ es la ecuación de demanda para el producto de un fabricante. Sea c el costo total y suponga que el costo marginal es 0.01 cuando $q = 200$. Utilice la regla de la cadena para encontrar dc/dp cuando $q = 200$.

80. Producto del ingreso marginal Un empresario que emplea m trabajadores encuentra que ellos producen

$$q = 2m(2m+1)^{3/2}$$

unidades de cierto artículo diariamente. El ingreso total r está dado por

$$r = \frac{50q}{\sqrt{1000+3q}}$$

[15]R. W. Stacy *et al*., *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).
[16]*Ibid*.

(a) ¿Cuál es el precio por unidad (al centavo más cercano) cuando hay 12 trabajadores?
(b) Determine el ingreso marginal cuando hay 12 trabajadores.
(c) Determine el producto del ingreso marginal cuando $m = 12$.

81. Suponga que $y = f(x)$, donde $x = g(t)$. Dado que $g(2) = 3, g'(2) = 4, f(2) = 5, f'(2) = 6, g(3) = 7, g'(3) = 8, f(3) = 9$ y $f'(3) = 10$, determine el valor de $\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=2}$.

82. Negocios Un fabricante determinó que, para su producto, el costo promedio diario (en cientos) está dado por

$$\bar{c} = \frac{324}{\sqrt{q^2 + 35}} + \frac{5}{q} + \frac{19}{18}$$

(a) Conforme la producción diaria crece, el costo promedio se aproxima a una cantidad constante. ¿Cuál es esta cantidad?
(b) Determine el costo marginal del fabricante cuando se producen 17 unidades por día.
(c) El fabricante determina que si la producción y las ventas se incrementaran a 18 unidades diarias, el ingreso crecería a \$275. ¿Deberá realizar este aumento? ¿Por qué?

83. Si

$$y = (u + 2)\sqrt{u + 3}$$

y

$$u = x(x^2 + 3)^3$$

encuentre dy/dx cuando $x = 0.1$. Redondee su respuesta a dos decimales.

84. Si

$$y = \frac{2u + 3}{u^3 - 2}$$

y

$$u = \frac{x + 4}{(2x + 3)^3}$$

encuentre dy/dx cuando $x = -1$. Redondee su respuesta a dos decimales.

Repaso del capítulo 11

Términos y símbolos importantes

		Ejemplos
Sección 11.1	**La derivada**	
	recta secante recta tangente pendiente de una curva	Ej. 1, p. 494
	derivada $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ $\lim\limits_{z \to x} \dfrac{f(z) - f(x)}{z - x}$	Ej. 2, p. 495
	cociente de diferencias $f'(x)$ y' $\dfrac{d}{dx}(f(x))$ $\dfrac{dy}{dx}$	Ej. 4, p. 496
Sección 11.2	**Reglas para la diferenciación**	
	función potencia regla del factor constante regla de la suma o la diferencia	Ej. 5, p. 505
Sección 11.3	**La derivada como una razón de cambio**	
	función de posición Δx velocidad razón de cambio	Ej. 1, p. 510
	función de costo total costo marginal costo promedio	Ej. 7, p. 513
	función de ingreso total ingreso marginal	Ej. 8, p. 514
	razón de cambio relativa razón de cambio porcentual	Ej. 9, p. 515
Sección 11.4	**Regla del producto y regla del cociente**	
	regla del producto regla del cociente	Ej. 5, p. 522
	función de consumo propensión marginal al consumo y al ahorro	Ej. 9, p. 524
Sección 11.5	**Regla de la cadena**	
	regla de la cadena regla de la potencia producto del ingreso marginal	Ej. 8, p. 531

Resumen

La recta tangente (o tangente) a una curva en el punto P es la posición límite de las rectas secantes PQ cuando Q se acerca a P a lo largo de la curva. La pendiente de la tangente en P se llama pendiente de la curva en P.

Si $y = f(x)$, la derivada de f en x es la función $f'(x)$ definida por el límite de la ecuación

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

En forma geométrica, la derivada proporciona la pendiente de la curva $y = f(x)$ en el punto $(x, f(x))$. Una ecuación de la recta tangente en un punto particular $(a, f(a))$ se obtiene evaluando $f'(a)$, que es la pendiente de la recta tangente, y utilizando la forma punto-pendiente de una recta: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Cualquier función que es diferenciable en un punto, también debe ser continua ahí.

Hasta ahora, las reglas analizadas para encontrar derivadas son las siguientes, para las cuales se supone que todas las funciones son diferenciables:

$\dfrac{d}{dx}(c) = 0$, donde c es cualquier constante.

$\dfrac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}$, donde a es cualquier número real.

$\dfrac{d}{dx}(cf(x)) = cf'(x)$, donde c es una constante.

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}(f(x)-g(x)) = f'(x)-g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$
$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$, donde y es una función de u y u es una función de x.

$\frac{d}{dx}(u^a) = au^{a-1}\frac{du}{dx}$, donde u es una función de x y a es cualquier número real.

La derivada dy/dx también puede interpretarse como dar la razón de cambio (instantánea) de y con respecto a x:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\text{cambio en } y}{\text{cambio en } x}$$

En particular, si $s = f(t)$ es una función de posición, donde s es la posición en el tiempo t, entonces

$$\frac{ds}{dt} = \text{velocidad en el tiempo } t$$

En economía, el término *marginal* se utiliza para describir derivadas de tipos específicos de funciones. Si $c = f(q)$ es una función de costo total (c es el costo total de q unidades de un producto), entonces la razón de cambio

$$\frac{dc}{dq} \text{ se llama costo marginal}$$

El costo marginal se interpreta como el costo aproximado de una unidad adicional de producción. (El costo promedio por unidad, $\overline{c}$, está relacionado con el costo total c mediante $\overline{c} = c/q$, o, de manera equivalente, $c = \overline{c}q$).

Una función de ingreso total $r = f(q)$ proporciona el ingreso r de un fabricante al vender q unidades de un producto. (El ingreso r y el precio p se relacionan mediante $r = pq$). La razón de cambio

$$\frac{dr}{dq} \text{ se llama ingreso marginal}$$

y se interpreta como el ingreso aproximado que se obtiene al vender una unidad adicional de producto.

Si r es el ingreso que un fabricante recibe cuando se vende la producción total de sus m empleados, entonces la derivada $dr/dm = dr\ /\ dq \cdot dq\ /dm$ se llama producto del ingreso marginal y proporciona el cambio aproximado que resulta en el ingreso cuando el fabricante contrata un empleado extra.

Si $C = f(I)$ es una función de consumo, donde I es el ingreso nacional y C es el consumo nacional, entonces

$$\frac{dC}{dI} \text{ es la propensión marginal al consumo}$$
y
$$1 - \frac{dC}{dI} \text{ es la propensión marginal al ahorro}$$

Para cualquier función, la razón de cambio relativa de $f(x)$ es

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

que compara la razón de cambio de $f(x)$ con la propia función $f(x)$. La razón de cambio porcentual es

$$\frac{f'(x)}{f(x)}\cdot 100\%$$

Problemas de repaso

En los problemas del 1 al 4, utilice la definición de derivada para encontrar $f'(x)$.

1. $f(x) = 2 - x^2$
2. $f(x) = 5x^3 - 2x + 1$
3. $f(x) = \sqrt{3x}$
4. $f(x) = \frac{2}{1+4x}$

En los problemas del 5 al 38, diferencie.

5. $y = 7^4$
6. $y = ex$
7. $y = \pi x^4 - \sqrt{2}x^3 + 2x^2 + 4$
8. $y = 4(x^2+5) - 7x$
9. $f(s) = s^2(s^2+2)$
10. $y = \sqrt{x+3}$
11. $y = \frac{x^2+1}{5}$
12. $y = -\frac{1}{nx^n}$
13. $y = (x^3+7x^2)(x^3-x^2+5)$
14. $y = (x^2+1)^{100}(x-6)$
15. $f(x) = (2x^2+4x)^{100}$
16. $f(w) = w\sqrt{w} + w^2$
17. $y = \frac{c}{ax+b}$
18. $y = \frac{5x^2-8x}{2x}$
19. $y = (8+2x)(x^2+1)^4$
20. $g(z) = (2z)^{3/5} + 5$
21. $f(z) = \frac{z^2-1}{z^2+4}$
22. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$
23. $y = \sqrt[3]{4x-1}$
24. $f(x) = (1+2^3)^{12}$
25. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
26. $y = \frac{x(x+1)}{2x^2+3}$
27. $h(x) = (ax+b)^m(cx+d)^n$
28. $y = \frac{(x+3)^5}{x}$
29. $y = \frac{5x-4}{x+6}$
30. $f(x) = 5x^3\sqrt{3+2x^4}$
31. $y = 2x^{-3/8} + (2x)^{-3/8}$
32. $y = \sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{a}{x}}$
33. $y = \frac{x^2+6}{\sqrt{x^2+5}}$
34. $y = \sqrt[3]{(7-3x^2)^2}$
35. $y = (x^3+6x^2+9)^{3/5}$
36. $z = 0.4x^2(x+1)^{-3} + 0.5$
37. $g(z) = \frac{-3z}{(z-2)^{-3}}$
38. $g(z) = \frac{-3}{4(z^5+2z-5)^4}$

En los problemas del 39 al 42, encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente al valor dado de x.

39. $y = x^2 - 6x + 4, x = 1$

40. $y = -2x^3 + 6x + 1, x = 2$

41. $y = \sqrt[3]{x}, x = 8$

42. $y = \dfrac{x^2}{x - 10}, x = 11$

43. Si $f(x) = 4x^2 + 2x + 8$, encuentre las razones de cambio relativa y porcentual de $f(x)$ cuando $x = 1$.

44. Si $f(x) = x/(x + 4)$, encuentre las razones de cambio relativa y porcentual de $f(x)$ cuando $x = 1$.

45. Ingreso marginal Si $r = q(20 - 0.1q)$ es una función de ingreso total, encuentre la función de ingreso marginal.

46. Costo marginal Si

$$c = 0.0001q^3 - 0.02q^2 + 3q + 6000$$

es una función de costo total, encuentre el costo marginal cuando $q = 100$.

47. Función de consumo Si

$$C = 9 + 0.7I - 0.2\sqrt{I}$$

es una función de consumo, encuentre la propensión marginal al consumo y al ahorro cuando $I = 25$.

48. Ecuación de demanda Si $p = \dfrac{q + 12}{q + 5}$ es una ecuación de demanda, encuentre la razón de cambio del precio p con respecto a la cantidad q.

49. Ecuación de demanda Si $p = -0.1q + 500$ es una ecuación de demanda, encuentre la función de ingreso marginal.

50. Costo promedio Si $\overline{c} = 0.03q + 1.2 + \dfrac{3}{q}$ es una función de costo promedio, encuentre el costo marginal cuando $q = 100$.

51. Función de costo en una planta de energía La función de costo total de una planta de energía eléctrica se estima mediante la ecuación[17]

$$c = 16.68 + 0.125q + 0.00439q^2 \qquad 20 \leq q \leq 90$$

donde q es la producción total en 8 horas (como porcentaje de la capacidad) y c es el costo total del combustible. Encuentre la función de costo marginal y evalúela cuando $q = 70$.

52. Producto del ingreso marginal Un fabricante determina que m empleados producirán un total de q unidades por día, donde

$$q = m(60 - m)$$

Si la función de demanda está dada por

$$p = -0.02q + 12$$

encuentre el producto del ingreso marginal cuando $m = 10$.

53. Polilla de invierno En un estudio relativo a la polilla de invierno realizado en Nueva Escocia,[18] se determinó que el número promedio, y, de huevecillos en una polilla hembra es una función de su ancho abdominal x (en milímetros), donde

$$y = f(x) = 14x^3 - 17x^2 - 16x + 34$$

y $1.5 \leq x \leq 3.5$. ¿A qué razón cambia el número de huevecillos con respecto al ancho abdominal cuando $x = 2$?

54. Relación huésped-parásito Para una relación particular huésped-parásito, se encontró que cuando la densidad de huésped (número de huéspedes por unidad de área) es x, el número de huéspedes con parásitos es

$$y = 12\left(1 - \frac{1}{1 + 3x}\right) \qquad x \geq 0$$

¿Para qué valor de x la derivada dy/dx es igual a $\frac{1}{3}$?

55. Crecimiento de bacterias En cierto cultivo se tienen bacterias en crecimiento. El tiempo t (en horas) necesario para que el número de bacterias se duplique (tiempo de generación) es una función de la temperatura T (en grados Celsius) del cultivo y está dado por

$$t = f(T) = \begin{cases} \frac{1}{24}T + \frac{11}{4} & \text{si } 30 \leq T \leq 36 \\ \frac{4}{3}T - \frac{175}{4} & \text{si } 36 < T \leq 39 \end{cases}$$

Encuentre dt/dT cuando (a) $T = 38$ y (b) $T = 35$.

56. Movimiento La función de posición de una partícula que se desplaza en línea recta es

$$s = \frac{9}{2t^2 + 3}$$

donde t está en segundos y s en metros. Encuentre la velocidad de la partícula en $t = 1$.

57. Razón de cambio El volumen de una esfera está dado por $V = \frac{1}{6}\pi d^3$, donde d es el diámetro. Encuentre la razón de cambio de V con respecto a d cuando $d = 2$ pies.

58. Movimiento La función de posición para una pelota lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo es

$$s = 218t - 16t^2$$

donde s es la altura en pies desde el suelo después de t segundos. ¿Para qué valor o valores de t la velocidad es igual a 64 pies/segundo?

59. Encuentre la función de costo marginal si la función de costo promedio es

$$\overline{c} = 2q + \frac{10\,000}{q^2}$$

60. Encuentre una ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = \frac{(x^3 + 2)\sqrt{x + 1}}{x^4 + 2x}$$

en el punto sobre la curva donde $x = 1$.

61. Un fabricante encontró que con m empleados trabajando, el número de unidades producidas por día es

$$q = 10\sqrt{m^2 + 4900} - 700$$

La ecuación de demanda para el producto es

$$8q + p^2 - 19\,300 = 0$$

donde p es el precio de venta cuando la demanda para el producto es de q unidades por día.

[17] J. A. Nordin, "Note on a Light Plant's Cost Curves", *Econometrica*, 15 (1947), pp. 231-255.

[18] D. G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia, 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

(a) Determine el producto de ingreso marginal del fabricante cuando $m = 240$.
(b) Encuentre la razón de cambio relativa del ingreso con respecto al número de empleados cuando $m = 240$.
(c) Suponga que al fabricante le costaría $400 más por día contratar un empleado adicional. ¿Aconsejaría usted al fabricante contratar al empleado número 241? ¿Por qué sí o por qué no?

62. Si $f(x) = xe^{-x}$, utilice la definición de derivada ("límite de un cociente de diferencias") para estimar $f'(1)$. Redondee su respuesta a tres decimales.

63. Si $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 3x - 4}$, utilice la función de derivación numérica de su calculadora gráfica para estimar la derivada cuando $x = 10$. Redondee su respuesta a tres decimales.

64. La función de costo total para un fabricante está dada por

$$c = \frac{5q^2 + 4}{\sqrt{q^2 + 6}} + 2500$$

Utilice la función de derivación numérica de su calculadora gráfica para estimar el costo marginal cuando se producen 15 unidades. Redondee su respuesta al centavo más cercano.

65. Demuestre que la regla básica 0 es en realidad una consecuencia de la regla combinada 1 y el caso en que $a = 0$ de la regla básica 1.

66. Demuestre que la regla básica 1 *para los enteros positivos* es una consecuencia de la regla combinada 3 (la regla del producto) y el caso en que $a = 1$ de la regla básica 1.

EXPLORE Y AMPLÍE Propensión marginal al consumo

Una función de consumo puede definirse ya sea para una nación, como en la sección 11.4, o para una familia individual. En cualquier caso, la función relaciona el consumo total con el ingreso total. Una función de ahorro, de manera análoga, relaciona el ahorro total con el ingreso total, ya sea en una nación o a nivel familiar.

Los datos acerca del ingreso, consumo y ahorro para Estados Unidos como un todo pueden encontrarse en las tablas de Cuentas del Producto e Ingreso Nacional (NIPA, por sus siglas en inglés) recopiladas por la oficina de Análisis Económicos, una división del Departamento de Comercio de Estados Unidos. Las tablas pueden descargarse de `www.bea.gov`. Para los años 1959 a 1999, la función de consumo nacional se indica por medio del diagrama de dispersión de la figura 11.13.

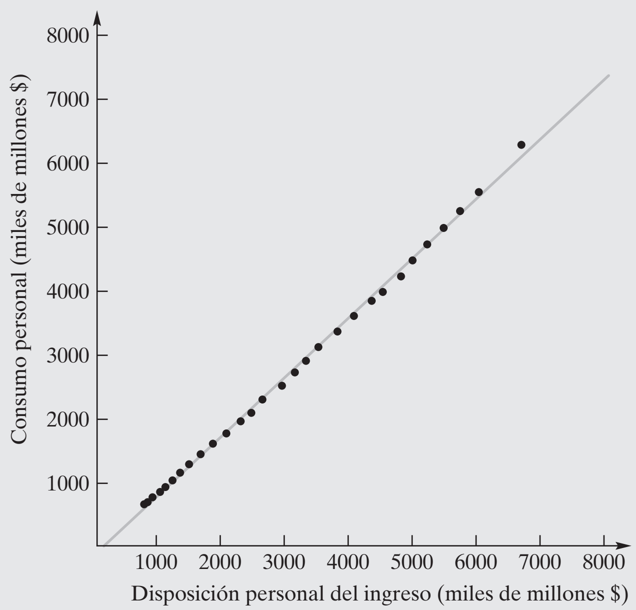


FIGURA 11.13 Función del consumo nacional para Estados Unidos.

Observe que los puntos están ubicados más o menos a lo largo de una línea recta. Una regresión lineal da la ecuación para esta recta como $y = 0.9314x - 99.1936$.

La propensión marginal al consumo derivada de esta gráfica es simplemente la pendiente de la recta, esto es, alrededor de 0.931 o 93.1%. Entonces, a nivel nacional, un incremento de mil millones de dólares en el ingreso total disponible produce un incremento de $931 millones en el consumo. Y de suponer que el resto se ahorra, existe un aumento de $69 millones en ahorros totales.[19]

Quizá algo más sencillo para relacionar, por los números más pequeños involucrados, es la función de consumo para una familia. Esta función está documentada en Encuestas de Gastos del Consumidor llevadas a cabo por la Oficina de Estadísticas de Trabajo, que es parte del Departamento de Trabajo de Estados Unidos. Los resultados de las encuestas para cada año pueden descargarse de `www.bls.gov/cex/`.

La encuesta de cada año proporciona información para cinco quintiles, donde un quintil representa un quinto de las familias de Estados Unidos. Los quintiles se ordenan de acuerdo con el ingreso, de modo que el quintil inferior representa al 20% más pobre de las familias de Estados Unidos y el quintil superior representa al 20% más rico.

Tabla 11.3 Ingresos y gastos familiares de Estados Unidos, 1999

Ingreso después de impuestos	Gastos totales
$7101	$16 766
$17 576	$24 850
$30 186	$33 078
$48 607	$46 015
$98 214	$75 080

Para el año 1999, el ingreso y el consumo son como se muestra en la tabla 11.3. Los números son valores promedio

[19]En realidad, también deben tomarse en cuenta los pagos de intereses y otros gastos no contabilizados como consumos. Pero de ahora en adelante se ignorará esta complicación.

dentro de cada quintil. Si estos datos se grafican por medio de una calculadora gráfica, los puntos caen en un patrón que podría aproximarse de manera razonable a una línea recta, pero podría aproximarse mejor mediante la forma de una curva —cualitativamente, parecida a una función raíz cuadrada (figura 11.14).

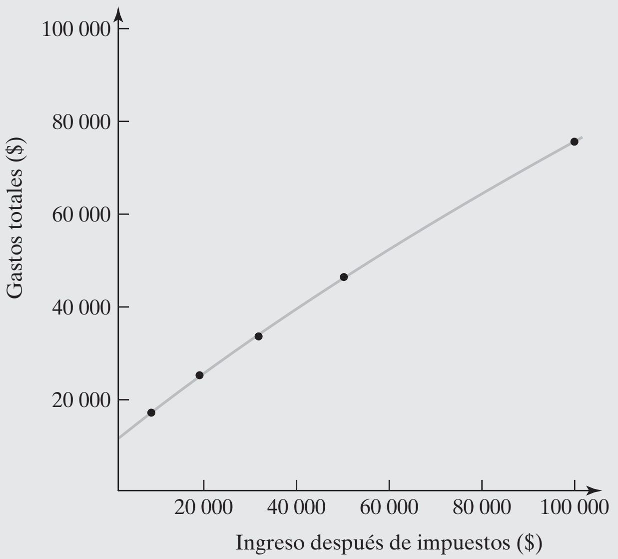


FIGURA 11.14 Función del consumo familiar (Estados Unidos).

La mayoría de las calculadoras gráficas no tienen una función de regresión para una función de tipo raíz cuadrada. Sin embargo, sí tienen una función de regresión cuadrática —y la inversa de una función cuadrática es una función de tipo raíz cuadrada—. (Las funciones inversas se definieron en la sección 2.4). Así que se procede como sigue. Primero, se utilizan las capacidades estadísticas de una calculadora para introducir los números de la *segunda* columna de la tabla 11.3 como valores de x y los de la *primera* columna como valores de y. Segundo, se realiza una regresión cuadrática. La función obtenida está dada por

$$y = (4.4627 \times 10^{-6})x^2 + 1.1517x - 13\,461$$

Tercero, se intercambian las listas de los valores de x y y en preparación para la gráfica. Cuarto, se reemplaza y por x y x por y en la ecuación de regresión cuadrática, enseguida se despeja y (usando la fórmula cuadrática) para obtener la ecuación

$$y = \frac{-1.1517 \pm \sqrt{\begin{array}{c}1.1517^2 - 4(4.4627 \times 10^{-6})\\ (-13\,461 - x)\end{array}}}{2(4.4627 \times 10^{-6})}$$

o, de manera más simple,

$$y = -129\,036 \pm \sqrt{1.9667 \times 10^{10} + 224\,080x}$$

Por último, se introduce la mitad superior de la curva (que corresponde a la parte + del signo ±) como una función para graficar; luego se despliega junto con una gráfica de los datos. El resultado se parece al que se muestra en la figura 11.15.

Para encontrar el consumo marginal para un ingreso dado, ahora se usa la función dy/dx. Por ejemplo, para encontrar el consumo marginal en \$50 000, se selecciona dy/dx y luego se introduce 50000. La calculadora regresa el valor 0.637675, el cual representa un consumo marginal de alrededor del 63.8%. En otras palabras, una familia con ingresos de \$50 000 anuales, si tiene un ingreso adicional de \$1000, gastaría \$638 de estos últimos y el resto lo ahorraría.

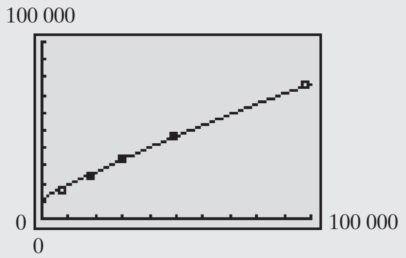


FIGURA 11.15 Gráfica de la curva de regresión.

Problemas

1. Compare la función de consumo de la figura 11.13 con las funciones de consumo de los problemas 63 y 64 de la sección 11.5. Proporcione dos formas en las que estas funciones de consumo difieren de manera significativa e interprete las diferencias de manera cualitativa.

2. En la primera columna, el primer renglón de la tabla 11.3 tiene \$7101 y en la segunda columna tiene \$16 766. ¿Qué significa esto?

3. Suponga que una familia tiene ingresos anuales de \$25 000 y en 1999 recibió un bono extra inesperado por \$1000. ¿Cuánto de ese cheque esperaría usted que la familia gastara? ¿Cuánto ahorraría?

4. Suponga que una familia con ingresos de \$90 000 anuales recibió en 1999 un bono extra inesperado por \$1000. ¿Cuánto de ese bono gastaría?

5. ¿Cuáles son las razones de la vida real para explicar la diferencia entre las respuestas de los problemas 3 y 4?