



7

Valores propios y vectores propios

COMPETENCIAS POR DESARROLLAR

- 1 Comprender los conceptos fundamentales relacionados con los valores propios y los vectores propios de una matriz que son útiles en matemáticas puras y aplicadas.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

- ◆ Definir valor propio, vector propio y espacio propio. Determinar si un vector es vector propio de una matriz y encontrar el valor propio correspondiente; si un número real es un valor propio de una matriz y encontrar el espacio propio y una base para éste; dar la dimensión del espacio. Identificar los valores propios de una matriz triangular.
 - ◆ Para una matriz, encontrar el polinomio característico, la ecuación característica, los valores propios y determinar la multiplicidad algebraica de cada uno de ellos.
 - ◆ Trabajar con matrices reales de 2×2 que tengan valores propios y vectores propios complejos, y encontrarlos.
 - ◆ Utilizar software matemático para encontrar los valores propios y los vectores propios. (*)
- 2 Comprender los conceptos de matrices similares y matrices diagonalizables.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

- ◆ Definir matrices similares y encontrarlas. Verificar si dos matrices son similares con la matriz invertible P que las relaciona.
- ◆ Determinar si una matriz es diagonalizable y diagonalizarla. Proporcionar los valores propios y los vectores propios de una matriz A si se tiene la factorización $A = PDP^{-1}$ con D una matriz diagonal. Calcular A^k si A es diagonalizable.
- ◆ Utilizar software matemático para encontrar una factorización PDP^{-1} con D diagonal. (*)

(*) Si cuenta la escuela o el alumno con Maple, Matlab, Matemática, calculadora TI-83 o TI-89, puede consultar las actividades sugeridas en la página Web del libro. En caso de que no cuente con esta herramienta, puede intentar conseguir algún software matemático gratuito de los que se encuentran en la Web.

- 3 Utilizar la definición de los valores propios y los vectores propios de una matriz asociada a una transformación lineal para hacer más sencilla su aplicación a un conjunto de vectores; y reconocer la importancia de utilizarlos para simplificar las operaciones al aplicar la transformación o encontrar la solución del sistema.
- 4 Visualizar el efecto de una transformación para valores propios reales o complejos de la matriz asociada.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

- ◆ Dibujar sobre un mismo sistema de coordenadas dos vectores propios correspondientes a dos valores propios diferentes y sus imágenes.
 - ◆ Visualizar en el plano el resultado de aplicar una transformación lineal (cuya matriz asociada tiene valores propios complejos) a un par de puntos del plano.
 - ◆ Identificar el ángulo de rotación y el factor de escalamiento en transformaciones que involucren la composición de éstas.
 - ◆ Relacionar analítica y gráficamente el vector al que se aplica la transformación y el resultado de aplicarla.
 - ◆ Analizar conjuntos de vectores y el resultado de la aplicación de una transformación lineal.
 - ◆ Utilizar algún paquete de cómputo para visualizar el resultado de aplicar una transformación lineal. (*)
- 5 Entender la factorización matricial $A = PDP^{-1}$ como una transformación lineal y utilizarla para facilitar el cálculo de la imagen de la transformación que es multiplicar por la matriz A .

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

- ◆ Construir la matriz de una transformación $T : V \rightarrow W$ respecto a las bases B y C de V y W .
- ◆ Ver que cualquier transformación lineal $T : R^n \rightarrow R^m$ se puede calcular multiplicando por una matriz. Determinar si existe una base B tal que si la transformación lineal definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, entonces $[T]_B$ sea diagonal. Para la transformación lineal, encontrar una base B tal que $[T]_B$ sea diagonal, si existe.



COMPETENCIAS POR DESARROLLAR

- 6 Reconocer la importancia de utilizar los valores propios y los vectores propios de una matriz A asociada a un sistema dinámico del tipo $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, para analizar su evolución y su comportamiento a largo plazo, y relacionarlos con la forma de encontrar la solución de un sistema dinámico discreto descrito mediante una ecuación en diferencias.
- 7 Plantear y resolver problemas de aplicación en ecología, administración, etc. cuya solución requiere de un sistema dinámico descrito mediante una ecuación en diferencias de la forma $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$.
- 8 Modificar datos o parámetros para analizar su efecto en el comportamiento a largo plazo del sistema dinámico que modela un problema de aplicación en ecología.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

- ◆ Plantear problemas de aplicación que requieran la solución de una ecuación en diferencias.
 - ◆ Considerando que hay una base de vectores propios de una matriz, expresar un vector inicial $\mathbf{x}_0$ como combinación de dichos vectores para el cálculo de varios $\mathbf{x}_k$. Determinar una fórmula para calcular $\mathbf{x}_k$ en la que sólo se requiera conocer sus valores propios y sus vectores propios.
 - ◆ Analizar el comportamiento de la sucesión $\{\mathbf{x}_k\}$ utilizando los valores propios y los vectores propios de la matriz. Analizar el comportamiento a la larga del sistema.
 - ◆ Dar ejemplos de aplicación en los que el planteamiento corresponda a un sistema dinámico, observar la evolución del sistema y su comportamiento a largo plazo.
 - ◆ Para distintos $\mathbf{x}_0 \in R^2$ calcular varios $\mathbf{x}_k$ y graficarlos. Identificar en trayectorias si hay un punto atractor, repulsor o punto silla, y relacionar estos puntos con los tipos de valores propios y vectores propios.
 - ◆ Plantear y resolver problemas de aplicación en ecología cuya solución requiere de un sistema dinámico descrito mediante una ecuación en diferencias.
 - ◆ Analizar el efecto de cambiar los datos o los parámetros en el comportamiento a largo plazo de un sistema dinámico.
- 9 Comprender la importancia de los valores propios en el estudio de ecuaciones diferenciales de matrices.
 - 10 Plantear problemas de aplicación en ingeniería, física, etc. cuya solución requiera de ecuaciones

diferenciales de matrices del tipo $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ o cuyo planteamiento corresponda a un problema de valor inicial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ y resolverlos con la ayuda de los valores propios y los vectores propios de la matriz A .

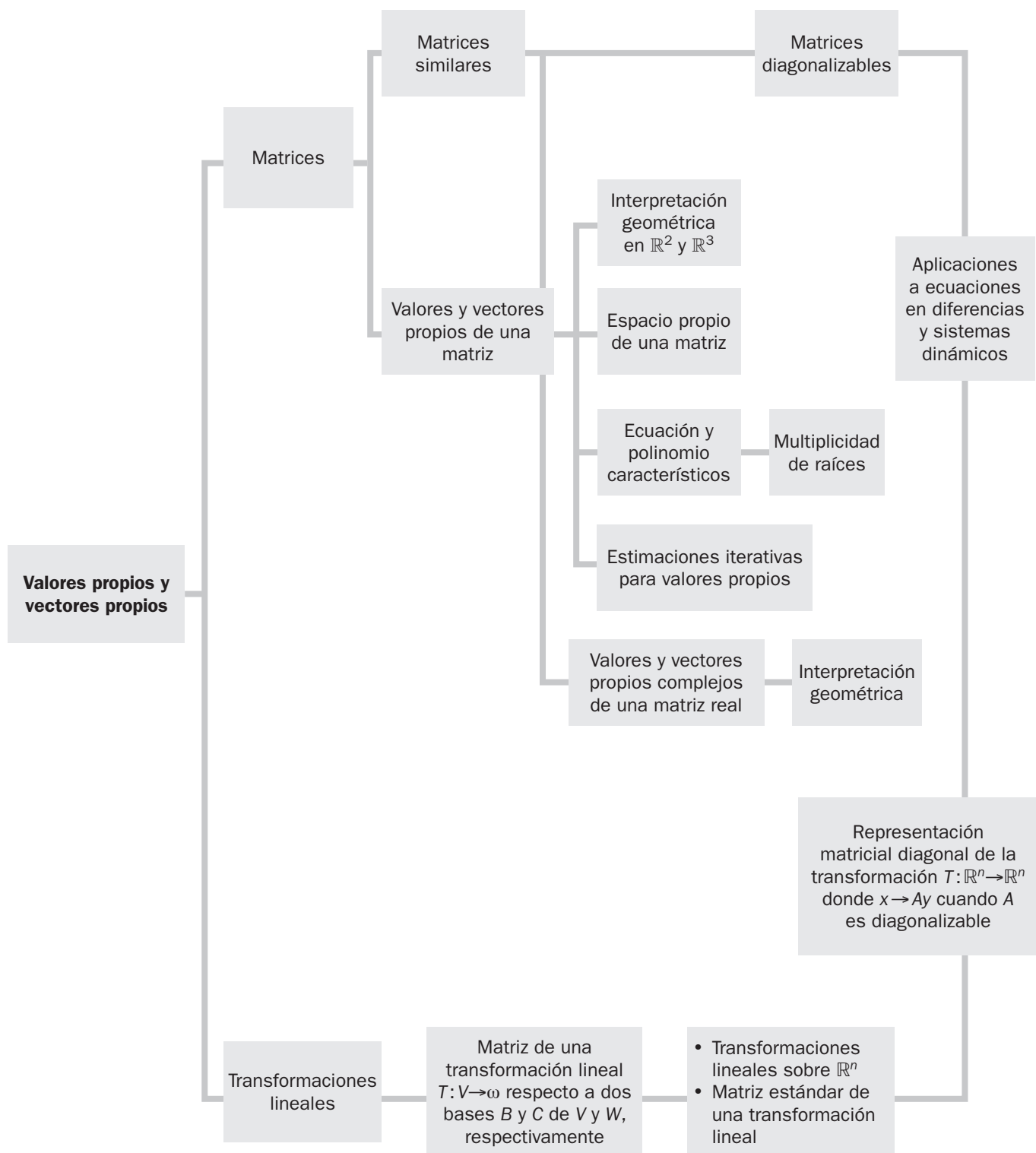
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

- ◆ Encontrar el conjunto fundamental de soluciones de una ecuación diferencial de matrices.
 - ◆ Encontrar una función propia de una ecuación diferencial del tipo $\mathbf{x}(t) = e^{At} \mathbf{v}$.
 - ◆ Resolver problemas del tipo $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ con un valor inicial y mostrar en el plano cartesiano la trayectoria de la solución. Identificar si un punto es atractor, repulsor o punto espiral.
 - ◆ Resolver problemas con valor inicial dados los valores propios y los vectores propios. Clasificar con la ayuda de los valores propios la naturaleza de un punto como atractor, repulsor o punto espiral del sistema dinámico.
 - ◆ Aplicar un cambio de variable en un sistema con una matriz diagonalizable y ver el efecto.
 - ◆ Encontrar la solución general usando funciones propias complejas.
 - ◆ Plantear y resolver problemas de aplicación de física e ingeniería.
- 11 Conocer y aplicar algunos métodos de estimaciones iterativas para encontrar los valores propios de una matriz.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

- ◆ Describir cuándo y por qué son útiles las estimaciones iterativas para encontrar los valores propios de una matriz.
- ◆ Describir el algoritmo QR para determinar los valores propios de una matriz.
- ◆ Describir el método de potencias para estimar el valor propio estrictamente dominante de una matriz. Indicar ventajas y desventajas. Aplicar el método para encontrar una estimación de su valor propio estrictamente dominante.
- ◆ Describir el método de potencias inversas para estimar un valor propio de una matriz. Indicar las ventajas y desventajas. Aplicar el método para encontrar una estimación de alguno de sus valores propios.

ORGANIZADOR GRÁFICO



Sistemas dinámicos y búhos manchados



En 1990 el búho manchado norteamericano se convirtió en el centro de una controversia nacional sobre el uso y el mal uso de los majestuosos bosques en el Pacífico Noroccidental de Estados Unidos. Los ambientalistas convencieron al gobierno federal de que el búho estaría en riesgo de extinción si continuaba la tala en los antiguos bosques (con árboles de más de 200 años de edad), donde el búho prefiere vivir. La industria maderera, anticipando la pérdida de 30,000 a 100,000 puestos de trabajo como resultado de las nuevas restricciones gubernamentales sobre la tala, argumentó que el búho no debería estar clasificado como “especie amenazada” y citó diferentes reportes científicos publicados para apoyar su caso.¹

En medio del fuego cruzado entre los grupos antagónicos, los ecologistas matemáticos intensificaron su afán de comprender la dinámica poblacional del búho. El ciclo de vida de un búho manchado se divide naturalmente en tres etapas: juvenil (hasta un año de edad), subadulto (de 1 a 2 años) y adulto (más de 2 años). Los búhos se aparean de por vida en las etapas de subadulto y adulto, y empiezan a criar cuando son adultos. Viven alrededor de 20 años y cada pareja requiere aproximadamente 1000 hectáreas (4 millas cuadradas) como su propio territorio. Un tiempo fundamental en el ciclo de vida es cuando los búhos juveniles dejan el nido. Para sobrevivir y convertirse en un subadulto, un búho juvenil debe tener éxito para encontrar un nuevo territorio para vivir (y en general, una pareja).

Un primer paso en el estudio de la dinámica poblacional consiste en modelar la población a intervalos anuales, en tiempos que se denotan con $k = 0, 1, 2, \dots$. En general, se supone que hay una relación 1:1 de machos a hembras en cada etapa del ciclo de vida y se cuentan solamente las hembras. La población en cada año k se describe con un vector $\mathbf{x}_k = (j_k, s_k, a_k)$, donde j_k , s_k y a_k son los números de hembras en las etapas juvenil, subadulto y adulto, respectivamente.

Utilizando datos reales de estudios demográficos, R. Lamberson y sus colaboradores consideraron el siguiente *modelo matricial por etapas*:²

$$\begin{bmatrix} j_{k+1} \\ s_{k+1} \\ a_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & .33 \\ .18 & 0 & 0 \\ 0 & .71 & .94 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_k \\ s_k \\ a_k \end{bmatrix}$$

Aquí, el número de nuevas hembras juveniles en el año $k + 1$ es .33 veces el número de hembras adultas en el año k (según la tasa promedio de nacimientos por pareja de búhos). Asimismo, 18% de los búhos juveniles sobreviven para convertirse en subadultos, en tanto que 71% de los subadultos y 94% de los adultos sobreviven para contarse como adultos.

El modelo matricial por etapas es una ecuación en diferencias de la forma $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$. A esta ecuación con frecuencia se le llama **sistema dinámico** (o **sistema**

¹ “The Great Spotted Owl War”, *Reader’s Digest*, noviembre de 1992, pp. 91-95.

² R. H. Lamberson, R. McKelvey, B. R. Noon y C. Voss, “A Dynamic Analysis of the Viability of the Northern Spotted Owl in a Fragmented Forest Environment”, *Conservation Biology* 6 (1992), pp. 505-512. También, una comunicación privada del profesor Lamberson, 1993.

dinámico lineal discreto), ya que describe los cambios en un sistema conforme transcurre el tiempo.

La tasa de sobrevivencia del 18% de búhos juveniles en la matriz por etapas de Lamberson es la entrada más afectada por la cantidad de bosque antiguo disponible. En realidad, el 60% de los búhos juveniles normalmente sobreviven para dejar el nido, pero en la región de Willow Creek, California, estudiada por Lamberson y sus colaboradores, tan solo al 30% de los búhos juveniles que dejaron el nido les fue posible encontrar un nuevo territorio para vivir. Los restantes perecieron durante la búsqueda.

Un motivo significativo para el fracaso de los búhos en encontrar nuevas áreas de distribución es el aumento en la fragmentación de las áreas con árboles antiguos, debido a la tala total de áreas dispersas en terrenos con árboles antiguos. Cuando un búho sale de la región protectora del bosque y cruza un área talada, aumenta drásticamente el riesgo de sufrir un ataque por parte de los depredadores. En la sección 7.6 se mostrará que el modelo descrito predice la eventual extinción de búhos, pero que si el 50% de los búhos juveniles que sobreviven al dejar el nido también encuentran nuevas áreas de distribución, entonces se salvaría su población.

WEB

El objetivo de este capítulo es descomponer la acción de una transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ en elementos que sean de fácil visualización. Excepto por un breve paréntesis en la sección 7.4, en este capítulo todas las matrices son cuadradas. Las principales aplicaciones descritas aquí son para sistemas dinámicos discretos, incluyendo el ya mencionado asunto de los búhos manchados. Sin embargo, los conceptos básicos, vectores propios y valores propios, son útiles en matemáticas puras y aplicadas, y se presentan en situaciones más generales que las que aquí se consideran. Los valores propios también sirven para estudiar ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos *continuos*, brindan información crítica en diseños de ingeniería, y se originan de manera natural en campos de la física y la química.

7.1 VECTORES PROPIOS Y VALORES PROPIOS

No obstante que una transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ puede mover vectores en diversas direcciones, a menudo sucede que hay vectores especiales sobre los cuales la acción de A es bastante simple.

EJEMPLO 1 Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. En la figura 1 se muestran las imágenes de $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ bajo la multiplicación por A . En efecto, $A\mathbf{v}$ es precisamente $2\mathbf{v}$. Así, A tan solo “estira” o dilata a $\mathbf{v}$. ■

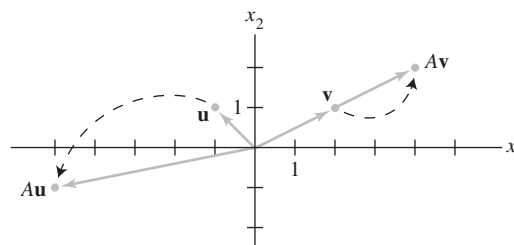


FIGURA 1 Efectos de la multiplicación por A .

Como otro ejemplo, los lectores de la sección 4.9 recordarán que si A es una matriz estocástica, entonces el vector de estado estable $\mathbf{q}$ para A satisface la ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{x}$. Es decir, $A\mathbf{q} = 1 \cdot \mathbf{q}$.

Esta sección estudia ecuaciones tales como

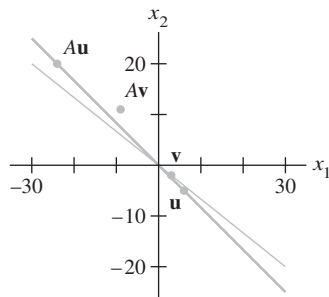
$$A\mathbf{x} = 2\mathbf{x} \quad \text{o bien} \quad A\mathbf{x} = -4\mathbf{x}$$

donde los vectores especiales son transformados por A en múltiplos escalares de sí mismos.

DEFINICIÓN

Un **vector propio** de una matriz A de $n \times n$ es un vector distinto de cero $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún escalar λ . Un escalar λ es un **valor propio** de A si existe una solución no trivial $\mathbf{x}$ de $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$; tal $\mathbf{x}$ es el *vector propio correspondiente a λ* .¹

Es fácil determinar si un vector dado es un vector propio de una matriz. También es sencillo decidir si cierto escalar es un valor propio.



$A\mathbf{u} = -4\mathbf{u}$, pero $A\mathbf{v} \neq \lambda\mathbf{v}$.

EJEMPLO 2 Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$. ¿Son $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores propios de A ?

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} A\mathbf{u} &= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 \\ 20 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} = -4\mathbf{u} \\ A\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 11 \end{bmatrix} \neq \lambda \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces, $\mathbf{u}$ es un vector propio correspondiente a un valor propio (-4) , pero $\mathbf{v}$ no es un vector propio de A porque $A\mathbf{v}$ no es múltiplo de $\mathbf{v}$. ■

EJEMPLO 3 Demuestre que 7 es un valor propio de la matriz A del ejemplo 2, y determine los vectores propios correspondientes.

SOLUCIÓN El escalar 7 es un valor propio de A , si y solo si la ecuación

$$A\mathbf{x} = 7\mathbf{x} \tag{1}$$

tiene una solución no trivial. No obstante, la ecuación (1) es equivalente a $A\mathbf{x} - 7\mathbf{x} = \mathbf{0}$, o bien,

$$(A - 7I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{2}$$

Para resolver esta ecuación homogénea, forme la matriz

$$A - 7I = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix}$$

Como es evidente, las columnas de $A - 7I$ son linealmente dependientes, de manera que la ecuación (2) tiene soluciones no triviales. Por lo tanto, 7 es un valor propio de A . Para encontrar los vectores propios correspondientes, utilice operaciones de fila:

$$\begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 5 & -5 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La solución general tiene la forma $x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Cada vector de esta forma con $x_2 \neq 0$ es un vector propio correspondiente a $\lambda = 7$. ■

¹ Advierta que, por definición, un vector propio debe ser *distinto* de cero, pero un valor propio puede ser cero. Después del ejemplo 5, se analizará el caso donde el número 0 es un valor propio.

Advertencia: No obstante que en el ejemplo 3 se utilizó reducción por filas para encontrar *vectores* propios, este método no se puede emplear para determinar *valores* propios. En general, una forma escalonada de una matriz A no presenta los valores propios de A .

Evidentemente, la equivalencia de las ecuaciones (1) y (2) es válida para cualquier λ en vez de $\lambda = 7$. Entonces, λ es un valor propio de la matriz A de $n \times n$ si y solo si la ecuación

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3)$$

tiene una solución no trivial. El conjunto de *todas* las soluciones de (3) es justo el espacio nulo de la matriz de $A - \lambda I$. Así que este conjunto es un *subespacio* de $\mathbb{R}^n$ y se denomina el **espacio propio** de A correspondiente a λ . El espacio propio consiste en el vector cero y de todos los vectores propios correspondientes a λ .

El ejemplo 3 demuestra que para la matriz A del ejemplo 2, el espacio propio correspondiente a $\lambda = 7$ consiste en *todos* los múltiplos de $(1, 1)$, que es la recta que pasa tanto por $(1, 1)$ como por el origen. Con el ejemplo 2, se comprueba que el espacio propio asociado con $\lambda = -4$ es la recta que pasa por $(6, -5)$. En la figura 2, se presentan esos espacios propios, junto con los vectores propios $(1, 1)$ y $(3/2, -5/4)$ y la acción geométrica de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ sobre cada espacio propio.

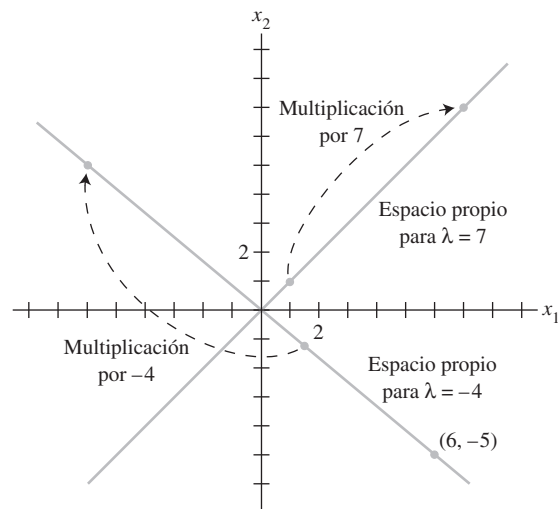


FIGURA 2 Espacios propios para $\lambda = -4$ y $\lambda = 7$.

EJEMPLO 4 Sea $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$. Un valor propio de A es 2. Determine una base para el espacio propio correspondiente.

SOLUCIÓN Forme

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \\ 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

y reduzca por filas la matriz aumentada para $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En este punto, resulta claro que 2 es un valor propio de A porque la ecuación $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene variables libres. La solución general es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_2 \text{ y } x_3 \text{ son libres}$$

El espacio propio, que se muestra en la figura 3, es un subespacio bidimensional de $\mathbb{R}^3$. Una base es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

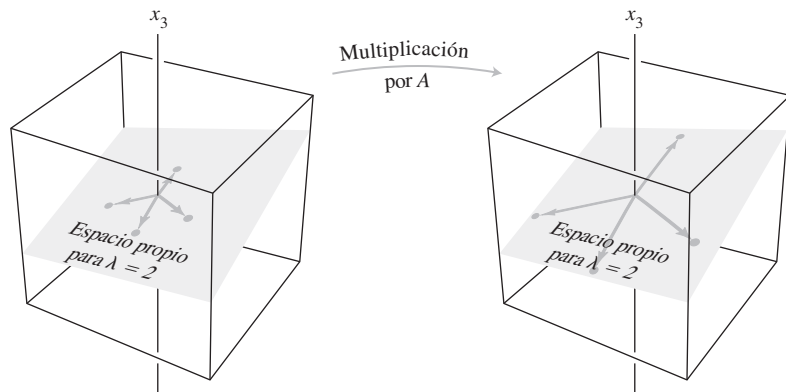


FIGURA 3 A actúa como una dilatación sobre el espacio propio.

NOTA NUMÉRICA

El ejemplo 4 es un buen método para el cálculo manual de vectores propios en casos simples donde se conoce un valor propio. En general, se recomienda el uso de un programa matricial y la reducción por filas para encontrar un espacio propio (para un valor propio dado), aunque no es totalmente confiable. Ocasionalmente, el error por redondeo lleva a una forma escalonada reducida con el número de pivotes equivocado. Los mejores programas computacionales calculan simultáneamente aproximaciones para los valores propios y los vectores propios, con el grado de exactitud que se requiera, en matrices que no son muy grandes. El tamaño de las matrices que se logra analizar se incrementa cada año conforme mejora la potencia computacional y la eficiencia del software.

El siguiente teorema describe uno de los pocos casos especiales donde los valores propios se pueden determinar con precisión. En la sección 7.2 también se analizará el cálculo de valores propios.

TEOREMA 1

Los valores propios de una matriz triangular son las entradas sobre su diagonal principal.

DEMOSTRACIÓN Por sencillez, considere el caso 3×3 . Si A es triangular superior, entonces, $A - \lambda I$ tiene la forma

$$\begin{aligned} A - \lambda I &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El escalar λ es un valor propio de A si y solo si la ecuación $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial, es decir, si y solo si la ecuación tiene una variable libre. Gracias a las entradas cero en $A - \lambda I$, es fácil ver que $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una variable libre si y solo si al menos una de las entradas sobre la diagonal de $A - \lambda I$ es cero. Esto ocurre si y solo si λ es igual a una de las entradas a_{11} , a_{22} , a_{33} en A . Véase el ejercicio 28 para el caso donde A es triangular inferior. ■

EJEMPLO 5 Sean $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Los valores propios de A son 3, 0 y 2. Los valores propios de B son 4 y 1. ■

¿Qué significa para una matriz A tener un valor propio de 0, tal como en el ejemplo 5? Esto ocurre si y solo si la ecuación

$$A\mathbf{x} = 0\mathbf{x} \quad (4)$$

tiene una solución no trivial. Pero la ecuación (4) es equivalente a $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que tiene una solución no trivial si y solo si A no es invertible. Entonces, *0 es un valor propio de A si y solo si A no es invertible*. En la sección 7.2 este hecho se agregará al teorema de la matriz invertible.

El siguiente teorema importante se necesitará más adelante. Su demostración muestra un cálculo típico con vectores propios.

TEOREMA 2

Si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r$ son vectores propios que corresponden a distintos valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ de una matriz A de $n \times n$, entonces el conjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente independiente.

DEMOSTRACIÓN Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ es linealmente dependiente. Puesto que $\mathbf{v}_1$ es diferente de cero, el teorema 7 de la sección 1.7 indica que uno de los vectores en el conjunto es una combinación lineal de los vectores precedentes. Sea p el índice mínimo tal que $\mathbf{v}_{p+1}$ sea una combinación lineal de los vectores precedentes (linealmente independientes). Entonces, existen escalares $c_1, \dots, c_p$ tales que

$$c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_{p+1} \quad (5)$$

Multiplicando por A ambos miembros de la ecuación (5) y considerando el hecho de que $A\mathbf{v}_k = \lambda_k\mathbf{v}_k$ para cada k ,

$$\begin{aligned} c_1A\mathbf{v}_1 + \dots + c_pA\mathbf{v}_p &= A\mathbf{v}_{p+1} \\ c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_p\lambda_p\mathbf{v}_p &= \lambda_{p+1}\mathbf{v}_{p+1} \end{aligned} \quad (6)$$

Multiplicando por λ_{p+1} ambos lados de la ecuación (5) y restando el resultado de (6),

$$c_1(\lambda_1 - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_1 + \dots + c_p(\lambda_p - \lambda_{p+1})\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \quad (7)$$

Puesto que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ es linealmente independiente, todos los pesos en la ecuación (7) son iguales a cero. Sin embargo, ninguno de los factores $\lambda_i - \lambda_{p+1}$ son cero, ya que los valores propios son distintos. Por lo tanto, $c_i = 0$ para $i = 1, \dots, p$. No obstante, la ecuación (5) indica que $\mathbf{v}_{p+1} = \mathbf{0}$, lo cual es imposible. En consecuencia, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r\}$ no puede ser linealmente dependiente y, por consiguiente, debe ser linealmente independiente. ■

Vectores propios y ecuaciones en diferencias

Esta sección concluye con la demostración cómo construir soluciones de la ecuación en diferencias de primer orden analizada en el ejemplo introductorio del capítulo:

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (8)$$

Si A es una matriz de $n \times n$, entonces la ecuación (8) es una descripción *recursiva* de una secuencia $\{\mathbf{x}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$. Una **solución** de la ecuación (8) es una descripción explícita de $\{\mathbf{x}_k\}$, cuya fórmula para cada $\mathbf{x}_k$ no depende directamente de A ni de los términos precedentes en la secuencia, excepto del término inicial $\mathbf{x}_0$.

La forma más sencilla de construir una solución de la ecuación (8) es tomar un vector propio $\mathbf{x}_0$ y su correspondiente valor propio λ , y hacer

$$\mathbf{x}_k = \lambda^k \mathbf{x}_0 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (9)$$

Esta secuencia es una solución, ya que

$$A\mathbf{x}_k = A(\lambda^k \mathbf{x}_0) = \lambda^k (A\mathbf{x}_0) = \lambda^k (\lambda \mathbf{x}_0) = \lambda^{k+1} \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_{k+1}$$

Combinaciones lineales de soluciones en la forma de la ecuación (9) ¡también son soluciones! Véase el ejercicio 33.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA[‡]

1. ¿Es 5 un valor propio de $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix}$?
2. Si $\mathbf{x}$ es un vector propio de A correspondiente a λ , ¿qué ocurre con $A^3\mathbf{x}$?
3. Suponga que $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ son vectores propios correspondientes a distintos valores propios λ_1 y λ_2 , respectivamente, y también que $\mathbf{b}_3$ y $\mathbf{b}_4$ son vectores propios linealmente independientes asociados a un tercer valor propio λ_3 distinto. ¿Necesariamente se deduce que $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4\}$ es un conjunto linealmente independiente? [*Sugerencia:* Considere la ecuación $c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + (c_3\mathbf{b}_3 + c_4\mathbf{b}_4) = \mathbf{0}$].

7.1 EJERCICIOS[†]

1. ¿Es $\lambda = 2$ un valor propio de $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}$? ¿Por qué?
 2. ¿Es $\lambda = -3$ un valor propio de $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$? ¿Por qué?
 3. ¿Es $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ un vector propio de $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$? Si lo es, encuentre el valor propio.
 4. ¿Es $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ un vector propio de $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$? Si así es, determine el valor propio.
 5. ¿Es $\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ un vector propio de $\begin{bmatrix} -4 & 3 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$? En caso afirmativo, determine el valor propio.
 6. ¿Es $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ un vector propio de $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$? Si lo es, encuentre el valor propio.
 7. ¿Es $\lambda = 4$ un valor propio de $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$? Si es así, determine un vector propio correspondiente.
 8. ¿Es $\lambda = 1$ un valor propio de $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}$? Si es así, determine un vector propio correspondiente.
- En los ejercicios 9 a 16, determine una base para el espacio propio asociado con cada valor propio indicado.
9. $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \lambda = 1, 3$

[‡] Se sugiere trabajar los problemas marcados con un punto primero en forma individual y, luego, discutirlos con todo el grupo y el profesor.

[†] Los ejercicios marcados con un asterisco deben trabajarse en colaboración con los compañeros de clase. Se sugiere formar equipos de dos o tres estudiantes.

10. $A = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \lambda = -5$

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 5 \end{bmatrix}, \lambda = -1, 7$

12. $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \lambda = 3, 7$

13. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \lambda = 1, 2, 3$

14. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}, \lambda = 3$

15. $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & 3 & -2 \end{bmatrix}, \lambda = -5$

16. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \lambda = 4$

En los ejercicios 17 y 18, determine los valores propios de las matrices.

17. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ 18. $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

*19. Para $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, encuentre un valor propio, sin realizar cálculos. Justifique su respuesta.

*20. Sin hacer cálculos, obtenga un valor propio y dos vectores propios linealmente independientes de $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Justifique su respuesta.

En los ejercicios 21 y 22, A es una matriz de $n \times n$. Marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique su respuesta.

- *21. a) Si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún vector $\mathbf{x}$, entonces λ es un valor propio de A .
 b) Una matriz A no es invertible si y solo si 0 es un valor propio de A .
 c) Un número c es un valor propio de A si y solo si la ecuación $(A - cI)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial.
 d) Quizá sea difícil obtener un vector propio de A , pero es sencillo comprobar si un vector dado es, de hecho, un vector propio.
 e) Para determinar los valores propios de A , se reduce A a una forma escalonada.
- *22. a) Si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún escalar λ , entonces $\mathbf{x}$ es un vector propio de A .
 b) Si $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios linealmente independientes, entonces corresponden a distintos valores propios.

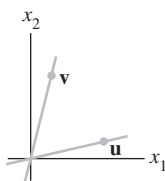
- c) Un vector de estado estable para una matriz estocástica es realmente un vector propio.
 d) Los valores propios de una matriz están sobre su diagonal principal.
 e) Un espacio propio de A es el espacio nulo de cierta matriz.

- *23. Explique por qué una matriz de 2×2 puede tener, cuando mucho, dos valores propios distintos. También indique por qué una matriz de $n \times n$ puede tener, cuando mucho, n valores propios diferentes.
- *24. Construya un ejemplo de una matriz de 2×2 con tan solo un valor propio distinto.
25. Sea λ un valor propio de una matriz A invertible. Demuestre que λ^{-1} es un valor propio de A^{-1} . [Sugerencia: Suponga que $\mathbf{x}$ distinto de cero satisface $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$].
26. Demuestre que si A^2 es la matriz cero, entonces el único valor propio de A es 0.
27. Demuestre que λ es un valor propio de A si y solo si λ es un valor propio de A^T . [Sugerencia: Determine cómo se relaciona $A - \lambda I$ con $A^T - \lambda I$].
28. Utilice el ejercicio 27 para completar la demostración del teorema 1 para el caso en que A es triangular inferior.
29. Considere una matriz A de $n \times n$ con la propiedad de que la suma de las filas sea igual al mismo número s . Demuestre que s es un valor propio de A . [Sugerencia: Encuentre un vector propio].
30. Considere una matriz A de $n \times n$ tal que las sumas de columnas sean iguales al mismo número s . Demuestre que s es un valor propio de A . [Sugerencia: Utilice los ejercicios 27 y 29].

En los ejercicios 31 y 32, sea A la matriz de la transformación lineal T . Sin escribir A , encuentre un valor propio de A y describa el espacio propio.

- *31. T es la transformación sobre $\mathbb{R}^2$ que refleja los puntos con respecto a una recta que pasa por el origen.
- *32. T es la transformación en $\mathbb{R}^3$ que gira los puntos alrededor de alguna recta que pasa por el origen.
- *33. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ vectores propios de una matriz A , con valores propios correspondientes λ y μ , y sean c_1 y c_2 escalares. Defina:
 $\mathbf{x}_k = c_1\lambda^k\mathbf{u} + c_2\mu^k\mathbf{v} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$
 a) ¿Qué es $\mathbf{x}_{k+1}$ por definición?
 b) Calcule $A\mathbf{x}_k$ de la fórmula para $\mathbf{x}_k$ y demuestre que $A\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k+1}$. Este cálculo probará que la secuencia $\{\mathbf{x}_k\}$ que se acaba de definir satisface la ecuación en diferencias $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$).
- *34. Describa cómo intentaría construir una solución de una ecuación en diferencias $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), si le dieran $\mathbf{x}_0$ inicial y resultara que este no fuera un vector propio de A . [Sugerencia: ¿Cómo podría relacionar $\mathbf{x}_0$ con los vectores propios de A ?]
35. Sean $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ los vectores que se muestran en la figura, y suponga que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores propios de una matriz A de 2×2 correspondientes a los valores propios 2 y 3, respectivamente. Sea $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación lineal dada por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para cada $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$, y sea $\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. Haga una copia de la figura,

y sobre el mismo sistema de coordenadas grafique cuidadosamente los vectores $T(\mathbf{u})$, $T(\mathbf{v})$ y $T(\mathbf{w})$.



36. Repita el ejercicio 35, suponiendo que $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores propios de A correspondientes a los valores propios -1 y 3 , respectivamente.

[M] En los ejercicios 37 a 40, utilice un programa matricial para determinar los valores propios de la matriz. Después, aplique el método del ejemplo 4 con una rutina de reducción por filas para producir una base para cada espacio propio.

$$37. \begin{bmatrix} 12 & 1 & 4 \\ 2 & 11 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \quad 38. \begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 & -4 \\ 7 & -4 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$39. \begin{bmatrix} 12 & -90 & 30 & 30 & 30 \\ 8 & -49 & 15 & 15 & 15 \\ 16 & -52 & 12 & 0 & 20 \\ 0 & -30 & 10 & 22 & 10 \\ 8 & -41 & 15 & 15 & 7 \end{bmatrix}$$

$$40. \begin{bmatrix} -23 & 57 & -9 & -15 & -59 \\ -10 & 12 & -10 & 2 & -22 \\ 11 & 5 & -3 & -19 & -15 \\ -27 & 31 & -27 & 25 & -37 \\ -5 & -15 & -5 & 1 & 31 \end{bmatrix}$$

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. El número 5 es un valor propio de A si y solo si la ecuación $(A - 5I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ tiene una solución no trivial. Forme

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

y reduzca por filas la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

En este punto, es evidente que el sistema homogéneo no tiene variables libres. Entonces, $A - 5I$ es una matriz invertible, lo cual significa que 5 *no* es un valor propio de A .

2. Si $\mathbf{x}$ es un vector propio de A correspondiente a λ , entonces $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ y

$$A^2\mathbf{x} = A(\lambda\mathbf{x}) = \lambda A\mathbf{x} = \lambda^2\mathbf{x}$$

Otra vez, $A^3\mathbf{x} = A(A^2\mathbf{x}) = A(\lambda^2\mathbf{x}) = \lambda^2 A\mathbf{x} = \lambda^3\mathbf{x}$. El patrón general, $A^k\mathbf{x} = \lambda^k\mathbf{x}$, se demuestra por inducción.

3. Sí. Suponga que $c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + c_3\mathbf{b}_3 + c_4\mathbf{b}_4 = \mathbf{0}$. Puesto que cualquier combinación lineal de vectores propios del mismo valor propio es otra vez un vector propio para ese valor propio, $c_3\mathbf{b}_3 + c_4\mathbf{b}_4$ es un vector propio para λ_3 . De acuerdo con el teorema 2, los vectores $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ y $c_3\mathbf{b}_3 + c_4\mathbf{b}_4$ son linealmente independientes, de manera que

$$c_1\mathbf{b}_1 + c_2\mathbf{b}_2 + (c_3\mathbf{b}_3 + c_4\mathbf{b}_4) = \mathbf{0}$$

implica que $c_1 = c_2 = 0$. Pero, c_3 y c_4 también deben ser cero porque $\mathbf{b}_3$ y $\mathbf{b}_4$ son linealmente independientes. Por lo tanto, todos los coeficientes en la ecuación original deben ser iguales a cero, y los vectores $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ y $\mathbf{b}_4$ son linealmente independientes.

7.2 LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

Información útil acerca de los valores propios de una matriz cuadrada A está codificada en una ecuación escalar especial llamada ecuación característica de A . Un simple ejemplo nos llevará al caso general.

EJEMPLO 1 Determine los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN Deben obtenerse todos los escalares λ tales que la ecuación matricial

$$(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

tenga una solución no trivial. De acuerdo con el teorema de la matriz invertible de la sección 2.3, este problema es equivalente a encontrar todas las λ tales que la matriz de $A - \lambda I$ no sea invertible, donde

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix}$$

De acuerdo con el teorema 4 de la sección 2.2, esta matriz no es invertible precisamente cuando su determinante es cero. De manera que los valores propios de A son las soluciones de la ecuación

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & -6-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

Recuerde que

$$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= (2 - \lambda)(-6 - \lambda) - (3)(3) \\ &= -12 + 6\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 9 \\ &= \lambda^2 + 4\lambda - 21 \\ &= (\lambda - 3)(\lambda + 7) \end{aligned}$$

Si $\det(A - \lambda I) = 0$, entonces $\lambda = 3$, o bien, $\lambda = -7$. Por lo tanto, los valores propios de A son 3 y -7 . ■

El determinante en el ejemplo 1 transformó la ecuación matricial $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que implica *dos* incógnitas (λ y $\mathbf{x}$), en la ecuación escalar $\lambda^2 + 4\lambda - 21 = 0$, que tan solo implica una incógnita. La misma idea funciona para matrices de $n \times n$. Sin embargo, antes de pasar a matrices más grandes, se resumen las propiedades necesarias de los determinantes para estudiar valores propios.

Determinantes

Sean A una matriz de $n \times n$, y U una forma escalonada de A obtenida mediante remplazos e intercambios de fila (sin escalamiento), y sea r el número de tales intercambios de fila. Entonces, el **determinante** de A , que se escribe $\det A$, es $(-1)^r$ veces el producto de las entradas diagonales $u_{11}, \dots, u_{nn}$ en U . Si A es invertible, todas las entradas $u_{11}, \dots, u_{nn}$ son *pivotes* (porque $A \sim I_n$ y las u_{ii} no se escalaron a 1). Es decir, al menos u_{nn} es cero y el producto $u_{11} \cdots u_{nn}$ es cero. Así,¹

$$\det A = \begin{cases} (-1)^r \cdot \left(\text{producto de} \right. \\ \left. \text{pivotes en } U \right), & \text{cuando } A \text{ es invertible} \\ 0, & \text{cuando } A \text{ no es invertible} \end{cases} \quad (1)$$

¹ La fórmula (1) se dedujo en la sección 3.2. Los lectores que no hayan estudiado el capítulo 3 pueden emplear esta fórmula como la definición de $\det A$. Es un hecho notable y no trivial que cualquier forma escalonada U obtenida de A sin escalar dé el mismo valor para $\det A$.

EJEMPLO 2 Calcule $\det A$ para $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN La siguiente reducción por filas utiliza un intercambio de filas:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U_1$$

De manera que $\det A = (-1)^1(1)(-2)(-1) = -2$. La siguiente reducción por filas alternativa evita el intercambio de filas y produce una forma escalonada diferente. El último paso suma $-1/3$ por la fila 2 a la fila 3:

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = U_2$$

Esta vez, $\det A$ es $(-1)^0(1)(-6)(1/3) = -2$, igual que antes. ■

La fórmula (1) para el determinante muestra que A es invertible si y solo si $\det A$ es distinto de cero. Este hecho, y la caracterización de invertibilidad establecida en la sección 7.1, se agregan al teorema de la matriz invertible.

TEOREMA

El teorema de la matriz invertible (continuación)

Sea A una matriz de $n \times n$. Entonces, A es invertible si y solo si:

- s) El número 0 *no es* un valor propio de A .
- t) El determinante de A *no es* cero.

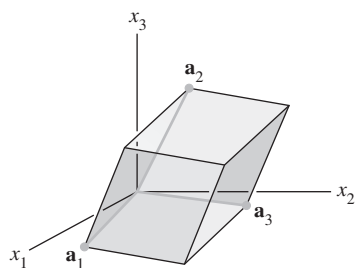


FIGURA 1

Cuando A es una matriz de 3×3 , $|\det A|$ resulta ser el *volumen* del paralelepípedo definido por las columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ de A , como se muestra en la figura 1. (Para más detalles, véase la sección 3.3). Este volumen es *distinto de cero* si y solo si los vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ son linealmente independientes, en cuyo caso la matriz A es invertible. (Si los vectores son distintos de cero y linealmente dependientes, entonces se encuentran sobre un plano o sobre una recta).

El siguiente teorema lista los resultados, que se necesitarán, de las secciones 3.1 y 3.2. Aquí se incluye el inciso a) como una referencia conveniente.

TEOREMA 3

Propiedades de los determinantes

Sean A y B matrices de $n \times n$.

- a) A es invertible si y solo si $\det A \neq 0$.
- b) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.
- c) $\det A^T = \det A$.
- d) Si A es triangular, entonces $\det A$ es el producto de las entradas sobre la diagonal principal de A .
- e) La operación de remplazo de filas sobre A no cambia el determinante. Un intercambio de filas cambia el signo del determinante. Un escalamiento de filas también escala al determinante por el mismo factor de escala.

La ecuación característica

El teorema 3a) demuestra cómo determinar cuando una matriz de la forma $A - \lambda I$ no es invertible. La ecuación escalar $\det(A - \lambda I) = 0$ es la **ecuación característica** de A , y el argumento en el ejemplo 1 justifica el siguiente hecho.

Un escalar λ es un valor propio de una matriz A de $n \times n$ si y solo si λ satisface la ecuación característica

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

EJEMPLO 3 Encuentre la ecuación característica de

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Forme $A - \lambda I$ y utilice el teorema 3d):

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 5 - \lambda & -2 & 6 & -1 \\ 0 & 3 - \lambda & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 5 - \lambda & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (5 - \lambda)(3 - \lambda)(5 - \lambda)(1 - \lambda) \end{aligned}$$

La ecuación característica es

$$(5 - \lambda)^2(3 - \lambda)(1 - \lambda) = 0$$

o bien,

$$(\lambda - 5)^2(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0$$

Desarrollando el producto, se escribe

$$\lambda^4 - 14\lambda^3 + 68\lambda^2 - 130\lambda + 75 = 0 \quad \blacksquare$$

En los ejemplos 1 y 3, $\det(A - \lambda I)$ es un polinomio en λ . Se puede demostrar que si A es una matriz de $n \times n$, entonces $\det(A - \lambda I)$ es un polinomio de grado n llamado **polinomio característico** de A .

El valor propio 5, en el ejemplo 3, tiene *multiplicidad* 2 porque $(\lambda - 5)$ ocurre dos veces como factor del polinomio característico. En general, la **multiplicidad (algebraica)** de un valor propio λ es su multiplicidad como una raíz de la ecuación característica.

EJEMPLO 4 El polinomio característico de una matriz de 6×6 es $\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4$. Determine los valores propios y sus multiplicidades.

SOLUCIÓN Factorice el polinomio

$$\lambda^6 - 4\lambda^5 - 12\lambda^4 = \lambda^4(\lambda^2 - 4\lambda - 12) = \lambda^4(\lambda - 6)(\lambda + 2)$$

Los valores propios son 0 (multiplicidad 4), 6 (multiplicidad 1) y -2 (multiplicidad 1). ■

Se podrían listar los valores propios del ejemplo 4 como 0, 0, 0, 0, 6 y -2 , de modo que los valores propios están repetidos de acuerdo con sus multiplicidades.

Puesto que la ecuación característica para una matriz de $n \times n$ implica un polinomio de grado n , la ecuación tiene exactamente n raíces, contando las multiplicidades, si se permiten raíces complejas. En la sección 7.5 se analizarán dichas raíces complejas, llamadas *valores propios complejos*. Hasta entonces, solo se considerarán valores propios reales, y los escalares continuarán siendo números reales.

La ecuación característica es importante para fines teóricos. Sin embargo, en el trabajo práctico, los valores propios de una matriz más grande que 2×2 deberían encontrarse usando una computadora, a menos que la matriz sea triangular o tenga otras propiedades especiales. No obstante que un polinomio característico 3×3 es fácil de calcular a mano, quizá sea difícil factorizarlo (a menos que la matriz sea cuidadosamente seleccionada). Véase las “Notas numéricas” del final de esta sección.

Similitud

El siguiente teorema ilustra un uso del polinomio característico, y brinda un fundamento para varios métodos iterativos que *aproximan* valores propios. Si A y B son matrices de $n \times n$, entonces A es **similar a** B si hay una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = B$, o bien, de manera equivalente, $A = PBP^{-1}$. Escribiendo Q para P^{-1} , se tiene $Q^{-1}BQ = A$. Así, B es también similar a A , y se dice simplemente que A y B son **similares**. Cambiar A por $P^{-1}AP$ es una **transformación de similitud**.

TEOREMA 4

Si las matrices A y B de $n \times n$ son similares, entonces tienen el mismo polinomio característico y, por lo tanto, los mismos valores propios (con las mismas multiplicidades).

DEMOSTRACIÓN Si $B = P^{-1}AP$, entonces,

$$B - \lambda I = P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P = P^{-1}(AP - \lambda P) = P^{-1}(A - \lambda I)P$$

Utilizando la propiedad multiplicativa *b*) del teorema 3, se calcula

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det[P^{-1}(A - \lambda I)P] \\ &= \det(P^{-1}) \cdot \det(A - \lambda I) \cdot \det(P) \end{aligned} \quad (2)$$

Puesto que $\det(P^{-1}) \cdot \det(P) = \det(P^{-1}P) = \det I = 1$, de la ecuación (2) se observa que $\det(B - \lambda I) = \det(A - \lambda I)$. ■

ADVERTENCIAS:

1. Las matrices

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

no son similares a pesar de tener los mismos valores propios.

2. Similitud no es lo mismo que equivalencia por filas. (Si A es equivalente por filas a B , entonces $B = EA$ para alguna matriz E invertible). En general, las operaciones con filas sobre una matriz cambian sus valores propios.

Aplicación a sistemas dinámicos

Los valores propios y vectores propios tienen la clave para la evolución discreta de un sistema dinámico, como se mencionó en la introducción al capítulo.

EJEMPLO 5 Sea $A = \begin{bmatrix} .95 & .03 \\ .05 & .97 \end{bmatrix}$. Analice el comportamiento a largo plazo del

sistema dinámico definido por $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), con $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} .6 \\ .4 \end{bmatrix}$.

SOLUCIÓN El primer paso consiste en determinar los valores propios de A y una base para cada espacio propio. La ecuación característica de A es

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} .95 - \lambda & .03 \\ .05 & .97 - \lambda \end{bmatrix} = (.95 - \lambda)(.97 - \lambda) - (.03)(.05) \\ &= \lambda^2 - 1.92\lambda + .92 \end{aligned}$$

Por la fórmula cuadrática,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1.92 \pm \sqrt{(1.92)^2 - 4(.92)}}{2} = \frac{1.92 \pm \sqrt{.0064}}{2} \\ &= \frac{1.92 \pm .08}{2} = 1 \quad \text{o bien} \quad .92 \end{aligned}$$

Es rápido comprobar que los vectores propios correspondientes a $\lambda = 1$ y $\lambda = 0.92$ son múltiplos de

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

respectivamente.

El siguiente paso es escribir $\mathbf{x}_0$ dada, en términos de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Esto se puede hacer porque $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ evidentemente es una base para $\mathbb{R}^2$. (¿Por qué?) De manera que existen pesos c_1 y c_2 tales que

$$\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

De hecho,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} &= [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]^{-1} \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} .60 \\ .40 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-8} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .60 \\ .40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .125 \\ .225 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4)$$

Cada $\mathbf{x}_k$ es fácil de calcular, ya que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en la ecuación (3) son vectores propios de A , con $A\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1$ y $A\mathbf{v}_2 = .92\mathbf{v}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_0 = c_1 A\mathbf{v}_1 + c_2 A\mathbf{v}_2 && \text{Utilizando linealidad de } \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}, \\ &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2(.92)\mathbf{v}_2 && \mathbf{v}_1 \text{ y } \mathbf{v}_2 \text{ son vectores propios.} \\ \mathbf{x}_2 &= A\mathbf{x}_1 = c_1 A\mathbf{v}_1 + c_2(.92)A\mathbf{v}_2 \\ &= c_1\mathbf{v}_1 + c_2(.92)^2\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

y así sucesivamente. En general,

$$\mathbf{x}_k = c_1\mathbf{v}_1 + c_2(.92)^k\mathbf{v}_2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

Utilizando c_1 y c_2 de la ecuación (4),

$$\mathbf{x}_k = .125 \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + .225(.92)^k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

Esta fórmula explícita para $\mathbf{x}_k$ da la solución de la ecuación en diferencias $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$.

Conforme $k \rightarrow \infty$, $(.92)^k$ tiende a cero y $\mathbf{x}_k$ tiende a $\begin{bmatrix} .375 \\ .625 \end{bmatrix} = .125\mathbf{v}_1$. ■

Los cálculos del ejemplo 5 tienen una aplicación interesante a las cadenas de Markov analizadas en la sección 4.9. Quienes hayan leído esa sección reconocerán que la matriz A del ejemplo 5 anterior es la misma que la matriz M de migración de la sección 4.9, que $\mathbf{x}_0$ es la distribución de población inicial entre la ciudad y los suburbios, y que $\mathbf{x}_k$ representa la distribución de población después de k años.

El teorema 18 de la sección 4.9 estableció que para una matriz tal como A , la secuencia $\mathbf{x}_k$ tiende a un vector de estado estable. Ahora se sabe *por qué* las $\mathbf{x}_k$ se comportan de esa forma, al menos para la matriz de migración. El vector de estado estable es $.125\mathbf{v}_1$, un múltiplo del vector propio $\mathbf{v}_1$, y la fórmula (5) para $\mathbf{x}_k$ muestra precisamente por qué $\mathbf{x}_k \rightarrow .125\mathbf{v}_1$.

NOTAS NUMÉRICAS

1. El software computacional como Mathematica y Maple utilizan cálculos simbólicos para encontrar el polinomio característico de una matriz de tamaño moderado. Pero no hay una fórmula o un algoritmo finito para resolver la ecuación característica de una matriz general de $n \times n$ para $n \geq 5$.
2. Los mejores métodos numéricos para encontrar valores propios evitan totalmente el polinomio característico. En efecto, MATLAB determina el polinomio característico de una matriz A calculando primero los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de A y, luego, desarrollando el producto $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$.
3. Varios algoritmos comunes para estimar los valores propios de una matriz A se basan en el teorema 4. En los ejercicios se analiza el poderoso *algoritmo QR*. Otra técnica, llamada *método de Jacobi*, funciona cuando $A = A^T$ y calcula una secuencia de matrices de la forma

$$A_1 = A \quad \text{y} \quad A_{k+1} = P_k^{-1} A_k P_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Cada matriz en la secuencia es similar a A y así tiene los mismos valores propios que A . Las entradas no diagonales de A_{k+1} tienden a cero conforme aumenta k , y las entradas diagonales se van aproximando a los valores propios de A .

4. En la sección 7.8 se analizan otros métodos para calcular valores propios.

PROBLEMA DE PRÁCTICA

Encuentre la ecuación característica y los valores propios de $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$.

7.2 EJERCICIOS†

En los ejercicios 1 a 8, encuentre el polinomio característico y los valores propios reales de las matrices dadas.

1. $\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 9 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

Los ejercicios 9 a 14 requieren las técnicas de la sección 3.1. Determine el polinomio característico de cada matriz, utilizando un desarrollo por cofactores o la fórmula especial para determinantes

de 3×3 descrita antes de los ejercicios 15 a 18 de la sección 3.1. [Nota: Mediante operaciones de filas no es sencillo encontrar el polinomio característico de una matriz de 3×3 , porque está implicada la variable λ].

$$\begin{array}{ll} 9. \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} & 10. \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{bmatrix} \\ 11. \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} & 12. \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ 13. \begin{bmatrix} 6 & -2 & 0 \\ -2 & 9 & 0 \\ 5 & 8 & 3 \end{bmatrix} & 14. \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

Para las matrices de los ejercicios 15 a 17, liste los valores propios reales, repetidos de acuerdo con su multiplicidad.

$$\begin{array}{ll} 15. \begin{bmatrix} 5 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} & 16. \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & -5 \end{bmatrix} \\ 17. \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 9 & -2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

- * 18. Se puede demostrar que la multiplicidad algebraica de un valor propio λ es siempre mayor o igual que la dimensión del espacio propio correspondiente a λ . Determine h en la matriz A de abajo, tal que el espacio propio para $\lambda = 4$ sea bidimensional:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & h & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- * 19. Sea A una matriz de $n \times n$ y suponga que A tiene n valores propios reales, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, repetidos de acuerdo con sus multiplicidades, tal que

$$\det(A - \lambda I) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda)$$

Explique por qué $\det A$ es el producto de los n valores propios de A . (Este resultado es válido para cualquier matriz cuadrada cuando se consideran valores propios complejos).

20. Utilice una propiedad de determinantes para demostrar que A y A^T tienen el mismo polinomio característico.

En los ejercicios 21 y 22, A y B son matrices de $n \times n$. Indique si cada enunciado es verdadero o falso. Justifique cada respuesta.

- * 21. a) El determinante de A es el producto de las entradas diagonales en A .
b) Una operación de filas elemental sobre A no cambia el valor del determinante.
c) $(\det A)(\det B) = \det AB$
d) Si $\lambda + 5$ es un factor del polinomio característico de A , entonces 5 es un valor propio de A .

- * 22. a) Si A es 3×3 , con columnas $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$, entonces $\det A$ es igual al volumen del paralelepípedo formado por $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.
b) $\det A^T = (-1) \det A$.
c) La multiplicidad de una raíz r de la ecuación característica de A se llama multiplicidad algebraica de r como un valor propio de A .
d) Una operación de remplazo por filas sobre A no altera sus valores propios.

Un método ampliamente utilizado para estimar los valores propios de una matriz general A es el *algoritmo QR*. En condiciones adecuadas, este algoritmo produce una secuencia de matrices, todas similares a A , casi triangulares superiores, con entradas diagonales que aproximan los valores propios de A . La idea principal es factorizar A (u otra matriz similar a A) en la forma $A = Q_1 R_1$, donde $Q_1^T = Q_1^{-1}$ y R_1 es triangular superior. Los factores se intercambian para formar $A_1 = R_1 Q_1$, que se factoriza de nuevo como $A_1 = Q_2 R_2$; entonces, se forma $A_2 = R_2 Q_2$, y así sucesivamente. La similitud de $A, A_1, \dots$ se deduce del resultado más general del ejercicio 23.

23. Demuestre que si $A = QR$ con Q invertible, entonces A es similar a $A_1 = RQ$.
24. Demuestre que si A y B son similares, entonces $\det A = \det B$.
25. Sean $A = \begin{bmatrix} .6 & .3 \\ .4 & .7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} .5 \\ .5 \end{bmatrix}$. [Nota: A es la matriz estocástica estudiada en el ejemplo 5 de la sección 4.9].
a) Encuentre una base para $\mathbb{R}^2$ que consiste en $\mathbf{v}_1$ y otro vector propio $\mathbf{v}_2$ de A .
b) Compruebe que $\mathbf{x}_0$ se escribe en la forma $\mathbf{x}_0 = \mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2$.
c) Para $k = 1, 2, \dots$, defina $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$. Calcule $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$, y escriba una fórmula para $\mathbf{x}_k$. Después, demuestre que $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{v}_1$ conforme k aumenta.
26. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Utilice la fórmula (1) para un determinante (dada antes del ejemplo 2) para demostrar que $\det A = ad - bc$. Considere dos casos: $a \neq 0$ y $a = 0$.

* 27. Sean $A = \begin{bmatrix} .5 & .2 & .3 \\ .3 & .8 & .3 \\ .2 & 0 & .4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} .3 \\ .6 \\ .1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$,
 $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

- a) Demuestre que $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ son vectores propios de A . [Nota: A es la matriz estocástica estudiada en el ejemplo 3 de la sección 4.9].
b) Sea $\mathbf{x}_0$ cualquier vector en $\mathbb{R}^3$ con entradas no negativas cuya suma sea 1. (En la sección 4.9, a $\mathbf{x}_0$ se llamó vector de probabilidad). Explique por qué existen constantes c_1, c_2, c_3 tales que $\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \mathbf{v}_3$. Calcule $\mathbf{w}^T \mathbf{x}_0$, y deduzca que $c_1 = 1$.
c) Para $k = 1, 2, \dots$, defina $\mathbf{x}_k = A^k \mathbf{x}_0$, con $\mathbf{x}_0$ como en el inciso b). Demuestre que $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{v}_1$ cuando k aumenta.

28. [M] Construya una matriz A de 4×4 , valuada en los enteros, y compruebe que A y A^T tienen el mismo polinomio característico (los mismos valores propios con las mismas multiplicidades). ¿ A y A^T tienen los mismos vectores propios? Realice el mismo análisis con una matriz de 5×5 . Escriba las matrices y sus conclusiones.
29. [M] Construya una matriz A de 4×4 valuada en los enteros.
- Reduzca A a una forma escalonada U sin emplear escalamiento por filas, y utilice U en la fórmula (1) (que está antes del ejemplo 2) para calcular $\det A$. (Si A resulta ser singular, entonces inicie con una nueva matriz aleatoria).
 - Determine los valores propios de A y el producto de esos valores propios (tan exactamente como sea posible).
- c) Escriba la matriz A y, con cuatro lugares decimales, liste los pivotes en U y los valores propios de A . Calcule $\det A$ con su programa matricial, y compárelo con los productos encontrados en los incisos a) y b).
30. [M] Sea $A = \begin{bmatrix} -6 & 28 & 21 \\ 4 & -15 & -12 \\ -8 & a & 25 \end{bmatrix}$. Para cada valor de a en el conjunto $\{32, 31.9, 32.1, 32.2\}$, calcule el polinomio característico de A y los valores propios. En cada caso, trace una gráfica del polinomio característico $p(t) = \det(A - tI)$ para $0 \leq t \leq 3$. Si es posible, elabore todas las gráficas sobre un mismo sistema de coordenadas. Describa cómo las gráficas revelan los cambios en los valores propios conforme a cambia.

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE PRÁCTICA

La ecuación característica es

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & -4 \\ 4 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \\ &= (1 - \lambda)(2 - \lambda) - (-4)(4) = \lambda^2 - 3\lambda + 18 \end{aligned}$$

De la fórmula cuadrática,

$$\lambda = \frac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(18)}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{-63}}{2}$$

Es evidente que la ecuación característica no tiene soluciones reales, así que A no tiene valores propios reales. La matriz A está actuando sobre el espacio vectorial real $\mathbb{R}^2$, y ahí no existe un vector $\mathbf{v}$ distinto de cero, tal que $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ para algún escalar λ .

7.3 DIAGONALIZACIÓN

En muchos casos, la información valor propio-vector propio contenida en una matriz A se presenta en una factorización útil de la forma $A = PDP^{-1}$ donde D es una matriz diagonal. En esta sección, la factorización permite calcular rápidamente las potencias A^k para valores grandes de k : una idea fundamental en varias aplicaciones del álgebra lineal. Posteriormente, en las secciones 7.6 y 7.7, se utilizará la factorización para analizar (y *desacoplar*) sistemas dinámicos.

El siguiente ejemplo muestra que las potencias de una matriz diagonal son fáciles de calcular.

EJEMPLO 1 Si $D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, entonces, $D^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix}$

y

$$D^3 = DD^2 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5^3 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{bmatrix}$$

En general,

$$D^k = \begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \quad \text{para } k \geq 1 \quad \blacksquare$$

Si $A = PDP^{-1}$ para alguna P invertible con D diagonal, entonces A^k es también fácil de calcular, como lo demuestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Sea $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$. Encuentre una fórmula para A^k , dado que $A = PDP^{-1}$, donde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN La fórmula estándar para la inversa de una matriz de 2×2 da

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Entonces, por asociatividad de la multiplicación matricial,

$$\begin{aligned} A^2 &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD \underbrace{(P^{-1}P)}_I DP^{-1} = PDDP^{-1} \\ &= PD^2P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^2 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nuevamente,

$$A^3 = (PDP^{-1})A^2 = (PDP^{-1})PD^2P^{-1} = PDD^2P^{-1} = PD^3P^{-1}$$

En general, para $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cdot 5^k - 3^k & 5^k - 3^k \\ 2 \cdot 3^k - 2 \cdot 5^k & 2 \cdot 3^k - 5^k \end{bmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Una matriz cuadrada A es **diagonalizable** si A es similar a una matriz diagonal, es decir, si $A = PDP^{-1}$ para alguna matriz P invertible y alguna matriz D diagonal. El siguiente teorema da una caracterización de matrices diagonalizables e indica cómo construir una factorización conveniente.

TEOREMA 5

Teorema de diagonalización

Una matriz A de $n \times n$ es diagonalizable, si y solo si A tiene n vectores propios linealmente independientes.

En efecto, $A = PDP^{-1}$, con D como matriz diagonal, si y solo si las columnas de P son n vectores propios linealmente independientes de A . En este caso, las entradas diagonales de D son valores propios de A que corresponden, respectivamente, a los vectores propios en P .

En otras palabras, A es diagonalizable si y solo si hay suficientes vectores propios para formar una base de $\mathbb{R}^n$. Tal base es una **base de vectores propios** de $\mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACIÓN Primero, observe que si P es cualquier matriz de $n \times n$ con columnas $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, y si D es cualquier matriz diagonal con entradas diagonales $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, entonces,

$$AP = A[\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{v}_n] = [A\mathbf{v}_1 \quad A\mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad A\mathbf{v}_n] \quad (1)$$

mientras que

$$PD = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 \mathbf{v}_1 \quad \lambda_2 \mathbf{v}_2 \quad \cdots \quad \lambda_n \mathbf{v}_n] \quad (2)$$

Ahora suponga que A es diagonalizable y $A = PDP^{-1}$. Por lo tanto, esta relación se multiplica por la derecha por P y se obtiene $AP = PD$. En este caso, las ecuaciones (1) y (2) implican que

$$[A\mathbf{v}_1 \ A\mathbf{v}_2 \ \cdots \ A\mathbf{v}_n] = [\lambda_1\mathbf{v}_1 \ \lambda_2\mathbf{v}_2 \ \cdots \ \lambda_n\mathbf{v}_n] \quad (3)$$

Igualando columnas,

$$A\mathbf{v}_1 = \lambda_1\mathbf{v}_1, \quad A\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_2, \quad \dots, \quad A\mathbf{v}_n = \lambda_n\mathbf{v}_n \quad (4)$$

Puesto que P es invertible, sus columnas $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ deben ser linealmente independientes. Asimismo, como esas columnas no son cero, entonces las ecuaciones en (4) muestran que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son valores propios y $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ son los vectores propios correspondientes. Este argumento demuestra las partes “solo si” del primer y segundo enunciados, junto con el tercer enunciado, del teorema.

Por último, dados cualesquiera n vectores propios $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, úselos para construir las columnas de P y utilice los valores propios correspondientes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ para formar D . Por las ecuaciones (1) a (3), $AP = PD$. Esto es válido sin condiciones sobre los vectores propios. Si, en efecto, los vectores propios son linealmente independientes, entonces P es invertible (según el teorema de la matriz invertible), y $AP = PD$ implica que $A = PDP^{-1}$. ■

Diagonalización de matrices

EJEMPLO 3 Diagonalice la siguiente matriz, si es posible.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Es decir, encuentre una matriz P invertible y una matriz D diagonal tales que $A = PDP^{-1}$.

SOLUCIÓN Hay cuatro pasos para implementar la descripción en el teorema 5.

Paso 1. Determine los valores propios de A . Como se mencionó en la sección 7.2, la mecánica de este paso es adecuada para una computadora, cuando la matriz es mayor que 2×2 . Para eliminar distracciones innecesarias, el texto generalmente dará información adicional de utilidad para este paso. En el presente caso, la ecuación característica implica un polinomio cúbico que se factoriza como:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 \\ &= -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2 \end{aligned}$$

Los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$.

Paso 2. Encuentre tres vectores propios de A linealmente independientes. Se necesitan tres vectores porque A es una matriz de 3×3 . Este es el paso crítico. Si falla, entonces el teorema 5 indica que A no se puede diagonalizar. El método de la sección 7.1 produce una base para cada espacio propio:

$$\text{Base para } \lambda = 1: \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Base para } \lambda = -2: \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Puede comprobar que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Paso 3. Construya P con los vectores del paso 2. No es importante el orden de los vectores. Utilizando el orden seleccionado en el paso 2, forme

$$P = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2 \quad \mathbf{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paso 4. Construya D con los valores propios correspondientes. En este paso, resulta esencial que el orden de los valores propios coincida con el orden elegido para las columnas de P . Utilice dos veces el valor propio $\lambda = -2$, uno para cada vector propio correspondiente a $\lambda = -2$:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Es buena idea comprobar que P y D realmente funcionen. Para evitar el cálculo de P^{-1} , simplemente compruebe que $AP = PD$. Esto es equivalente a $A = PDP^{-1}$ cuando P es invertible. (Sin embargo, ¡asegúrese que P sea invertible!) Calcule

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -3 & -5 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\ PD &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

EJEMPLO 4 Si es posible, diagonalice la siguiente matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -4 & -6 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN La ecuación característica de A resulta ser exactamente la misma que en el ejemplo 3:

$$0 = \det(A - \lambda I) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)^2$$

Los valores propios son $\lambda = 1$ y $\lambda = -2$. No obstante, es fácil comprobar que cada espacio propio es tan solo unidimensional:

$$\begin{aligned} \text{Base para } \lambda = 1: \quad \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \text{Base para } \lambda = -2: \quad \mathbf{v}_2 &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

No existen más valores propios, en tanto que cada vector propio de A es un múltiplo de $\mathbf{v}_1$ o de $\mathbf{v}_2$. Por consiguiente, es imposible construir una base de $\mathbb{R}^3$ utilizando vectores propios de A . De acuerdo con el teorema 5, A no es diagonalizable. $\blacksquare$

El siguiente teorema proporciona una condición *suficiente* para que una matriz sea diagonalizable.

TEOREMA 6

Una matriz de $n \times n$ con n valores propios distintos es diagonalizable.

DEMOSTRACIÓN Sean $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ los vectores propios correspondientes a los n valores propios diferentes de una matriz A . Entonces, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es linealmente independiente, de acuerdo con el teorema 2 de la sección 7.1. Por lo tanto, A es diagonalizable, según el teorema 5. ■

No es *necesario* que una matriz de $n \times n$ tenga n valores propios distintos para ser diagonalizable. La matriz de 3×3 del ejemplo 3 es diagonalizable aun cuando tenga solamente dos valores propios diferentes.

EJEMPLO 5 Determine si la siguiente matriz es diagonalizable.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN ¡Esto es fácil! Como la matriz es triangular, sus valores propios son evidentemente 5, 0 y -2 . Al ser A una matriz de 3×3 con tres valores propios distintos, entonces A es diagonalizable. ■

Matrices cuyos valores propios no son diferentes

Si una matriz A de $n \times n$ tiene n valores propios distintos, con los vectores propios correspondientes $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, y si $P = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n]$, entonces P es automáticamente invertible porque sus columnas son linealmente independientes, según el teorema 2. Cuando A es diagonalizable, pero tiene menos de n valores propios diferentes, sigue siendo posible construir P en una forma que la hace automáticamente invertible, como lo demuestra el siguiente teorema.¹

TEOREMA 7

Sea A una matriz de $n \times n$ cuyos distintos valores propios son $\lambda_1, \dots, \lambda_p$.

- Para $1 \leq k \leq p$, la dimensión del espacio propio para λ_k es menor o igual que la multiplicidad del valor propio λ_k .
- La matriz A es diagonalizable si y solo si la suma de las dimensiones de los espacios propios es igual a n , y esto ocurre si y solo si: **i.** se factoriza completamente el polinomio característico en factores lineales y **ii.** la dimensión del espacio propio para cada λ_k es igual a la multiplicidad de λ_k .
- Si A es diagonalizable y $\mathcal{B}_k$ es una base para el espacio propio asociado con λ_k para cada k , entonces la colección de vectores total en los conjuntos $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ forma una base de vectores propios para $\mathbb{R}^n$.

EJEMPLO 6 Diagonalice la siguiente matriz, si es posible.

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

¹ La demostración del teorema 7 es larga, pero no difícil. Por ejemplo, véase S. Friedberg, A. Insel, y L. Spence, *Linear Algebra*, 4a. ed. (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 2002), sección 7.2.

SOLUCIÓN Puesto que A es una matriz triangular, los valores propios son 5 y -3 , cada uno con multiplicidad 2. Utilizando el método de la sección 7.1, se encuentra una base para cada espacio propio.

$$\text{Base para } \lambda = 5: \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -16 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Base para } \lambda = -3: \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

El conjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente independiente, según el teorema 7. Así, la matriz $P = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_4]$ es invertible, en tanto que $A = PDP^{-1}$, donde

$$P = \begin{bmatrix} -8 & -16 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

PROBLEMAS DE PRÁCTICA†

1. Calcule A^8 , donde $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.
2. Sean $A = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Suponga que le han dicho que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios de A . Utilice esta información para diagonalizar A .
- 3. Sea A una matriz de 4×4 con valores propios 5, 3 y -2 , y suponga que se sabe que el espacio propio para $\lambda = 3$ es bidimensional. ¿Se dispone de suficiente información para determinar si A es diagonalizable?

7.3 EJERCICIOS†

En los ejercicios 1 y 2, sea $A = PDP^{-1}$ y calcule A^4 .

$$1. \quad P = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2. \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 3 y 4, use la factorización $A = PDP^{-1}$ para calcular A^k , donde k representa un entero positivo arbitrario.

$$3. \quad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2(a-b) & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4. \quad \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 5 y 6, la matriz A se factoriza en la forma PDP^{-1} . Utilice el teorema de diagonalización para encontrar los valores propios de A y una base para cada espacio propio.

$$5. \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$6. \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 9 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 7 a 20, diagonalice las matrices, si es posible. Para los ejercicios 11 a 16 y 18, se incluyen los valores propios reales debajo de la matriz.

$$7. \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

$$8. \quad \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

9. $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$
11. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$
 $\lambda = -1, 5$
12. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$
 $\lambda = 2, 5$
13. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$
 $\lambda = 1, 5$
14. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$
 $\lambda = 2, 3$
15. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$
 $\lambda = 0, 1$
16. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$
 $\lambda = 0$
17. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$
18. $\begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$
 $\lambda = -2, -1, 0$
19. $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$
20. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 21 y 22, A , B , P y D son matrices de $n \times n$. Indique si cada enunciado es verdadero o falso. Justifique cada respuesta. (Antes de intentar resolver estos ejercicios, estudie con cuidado los teoremas 5 y 6, y los ejemplos de esta sección).

- *21. a) A es diagonalizable si $A = PDP^{-1}$ para alguna matriz D y alguna matriz P invertible.
b) Si $\mathbb{R}^n$ tiene una base de vectores propios de A , entonces A es diagonalizable.
c) A es diagonalizable si y solo si A tiene n valores propios, contando multiplicidades.
d) Si A es diagonalizable, entonces A es invertible.
- *22. a) A es diagonalizable si A tiene n vectores propios.
b) Si A es diagonalizable, entonces A tiene n valores propios distintos.
c) Si $AP = PD$, con D diagonal, entonces las columnas distintas de cero de P deben ser vectores propios de A .
d) Si A es invertible, entonces A es diagonalizable.
- *23. A es una matriz de 5×5 con dos valores propios. Un espacio propio es tridimensional y el otro espacio propio es bidimensional. ¿ A es diagonalizable? ¿Por qué?
- *24. A es una matriz de 3×3 con dos valores propios. Cada espacio propio es unidimensional. ¿ A es diagonalizable? ¿Por qué?
- *25. A es una matriz de 4×4 con tres valores propios. Un espacio propio es unidimensional, y uno de los otros espacios propios es bidimensional. ¿Es posible que A no sea diagonalizable? Justifique su respuesta.
- *26. A es una matriz de 7×7 con tres valores propios. Un espacio propio es bidimensional, y uno de los otros espacios propios es tridimensional. ¿Es posible que A no sea diagonalizable? Justifique su respuesta.
27. Demuestre que si A es diagonalizable e invertible, entonces también lo es A^{-1} .
28. Demuestre que si A tiene n vectores propios linealmente independientes, entonces ocurre lo mismo con A^T . [Sugerencia: Use el teorema de diagonalización].
29. Una factorización $A = PDP^{-1}$ no es única. Demuestre esto para la matriz A del ejemplo 2. Con $D_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, utilice la información del ejemplo 2 para encontrar una matriz P_1 tal que $A = P_1 D_1 P_1^{-1}$.
30. Con A y D como en el ejemplo 2, encuentre una P_2 invertible, distinta de la P del ejemplo 2, tal que $A = P_2 D P_2^{-1}$.
- *31. Construya una matriz de 2×2 distinta de cero que sea invertible, pero no diagonalizable.
- *32. Construya una matriz de 2×2 no diagonal que sea diagonalizable, pero no invertible.
- [M] En los ejercicios 33 a 36, diagonalice las matrices. Utilice la instrucción de valores propios de su programa matricial para obtener los valores propios y, luego, calcule bases para los espacios propios como en la sección 7.1.
33. $\begin{bmatrix} 9 & -4 & -2 & -4 \\ -56 & 32 & -28 & 44 \\ -14 & -14 & 6 & -14 \\ 42 & -33 & 21 & -45 \end{bmatrix}$
34. $\begin{bmatrix} 4 & -9 & -7 & 8 & 2 \\ -7 & -9 & 0 & 7 & 14 \\ 5 & 10 & 5 & -5 & -10 \\ -2 & 3 & 7 & 0 & 4 \\ -3 & -13 & -7 & 10 & 11 \end{bmatrix}$
35. $\begin{bmatrix} 13 & -12 & 9 & -15 & 9 \\ 6 & -5 & 9 & -15 & 9 \\ 6 & -12 & -5 & 6 & 9 \\ 6 & -12 & 9 & -8 & 9 \\ -6 & 12 & 12 & -6 & -2 \end{bmatrix}$
36. $\begin{bmatrix} 24 & -6 & 2 & 6 & 2 \\ 72 & 51 & 9 & -99 & 9 \\ 0 & -63 & 15 & 63 & 63 \\ 72 & 15 & 9 & -63 & 9 \\ 0 & 63 & 21 & -63 & -27 \end{bmatrix}$

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1)$. Los valores propios son 2 y 1, y los vectores propios correspondientes son $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Ahora, forme

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Como $A = PDP^{-1}$,

$$\begin{aligned} A^8 &= PD^8P^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^8 & 0 \\ 0 & 1^8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 256 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 766 & -765 \\ 510 & -509 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Calcule $A\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \mathbf{v}_1$, y

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 & 12 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \mathbf{v}_2$$

De manera que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores propios para los valores propios 1 y 3, respectivamente. Entonces,

$$A = PDP^{-1} \quad \text{donde,} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

3. Sí, A es diagonalizable. Existe una base $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ para el espacio propio asociado a $\lambda = 3$. Asimismo, habrá al menos un vector propio para $\lambda = 5$ y uno para $\lambda = -2$, denotados mediante $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$. Entonces, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es linealmente independiente de acuerdo con el teorema 2 y el problema de práctica 3 de la sección 7.1. No pueden existir más vectores propios que sean linealmente independientes de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$, porque los vectores están en $\mathbb{R}^4$. Por consiguiente, los espacios propios para $\lambda = 5$ y $\lambda = -2$ son ambos unidimensionales. De acuerdo con el teorema 7b) se tiene que A es diagonalizable.

7.4 VECTORES PROPIOS Y TRANSFORMACIONES LINEALES

El objetivo de esta sección es entender la factorización matricial $A = PDP^{-1}$ como un enunciado sobre transformaciones lineales. Se verá que la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es esencialmente lo mismo que el muy simple mapeo $\mathbf{u} \mapsto D\mathbf{u}$, cuando se estudia desde un enfoque adecuado. Una interpretación similar se aplicará a D y A , aun cuando D no sea una matriz diagonal.

De la sección 1.9, recuerde que cualquier transformación lineal T de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^m$ se implementa mediante la multiplicación por la izquierda por una matriz A , llamada *matriz estándar* de T . Ahora se necesita el mismo tipo de representación para cualquier transformación lineal entre dos espacios vectoriales de dimensión finita.

La matriz de una transformación lineal

Sean V un espacio vectorial n -dimensional, W un espacio vectorial m -dimensional y T cualquier transformación lineal de V a W . Para asociar una matriz con T , se eligen bases (ordenadas) $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ para V y W , respectivamente.

Dada cualquier $\mathbf{x}$ en V , el vector de coordenadas $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ está en $\mathbb{R}^n$ y el vector de coordenadas de su imagen, $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}$, está en $\mathbb{R}^m$, como se indica en la figura 1.

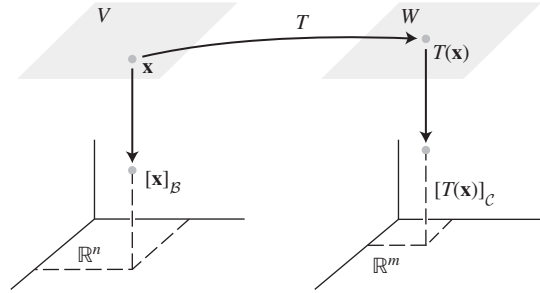


FIGURA 1 Una transformación lineal de V a W .

Es fácil encontrar la conexión entre $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ y $[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}}$. Sea $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ la base $\mathcal{B}$ para V . Si $\mathbf{x} = r_1\mathbf{b}_1 + \dots + r_n\mathbf{b}_n$, entonces,

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

y

$$T(\mathbf{x}) = T(r_1\mathbf{b}_1 + \dots + r_n\mathbf{b}_n) = r_1T(\mathbf{b}_1) + \dots + r_nT(\mathbf{b}_n) \quad (1)$$

porque T es lineal. Ahora, como el mapeo coordinado de W a $\mathbb{R}^m$ es lineal (teorema 8 de la sección 4.4), la ecuación (1) conduce a

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = r_1[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} + \dots + r_n[T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \quad (2)$$

Puesto que los vectores de coordenadas $\mathcal{C}$ están en $\mathbb{R}^m$, así la ecuación vectorial (2) se escribe como una ecuación matricial; a saber,

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = M[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \quad (3)$$

donde

$$M = \begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} & [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} & \dots & [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

La matriz M es una representación matricial de T , llamada **matriz para T respecto a las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$** . Véase la figura 2.

La ecuación (3) indica que, en lo concerniente a los vectores de coordenadas, la acción de T sobre $\mathbf{x}$ se puede considerar una multiplicación por la izquierda por M .

EJEMPLO 1 Suponga que $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ es una base para V y $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ es una base para W . Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal con la propiedad

$$T(\mathbf{b}_1) = 3\mathbf{c}_1 - 2\mathbf{c}_2 + 5\mathbf{c}_3 \quad \text{y} \quad T(\mathbf{b}_2) = 4\mathbf{c}_1 + 7\mathbf{c}_2 - \mathbf{c}_3$$

Determine la matriz M para T respecto a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

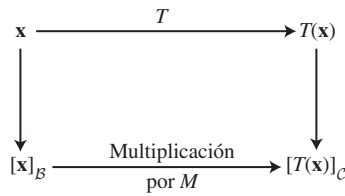


FIGURA 2

SOLUCIÓN Los vectores de coordenadas $\mathcal{C}$ de las imágenes de $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$ son

$$[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto,

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

■

Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son bases para el mismo espacio V y si T es la transformación identidad $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para $\mathbf{x}$ en V , entonces la matriz M en la ecuación (4) es justo una matriz de cambio de coordenadas (véase la sección 4.7).

Transformaciones lineales de V en V

En el caso común donde W es igual a V y la base $\mathcal{C}$ coincide con $\mathcal{B}$, la matriz M en (4) se denomina **matriz para T respecto a $\mathcal{B}$** , o simplemente **$\mathcal{B}$ -matriz para T** , y se denota con $[T]_{\mathcal{B}}$. Véase la figura 3.

La $\mathcal{B}$ -matriz para $T : V \rightarrow V$ satisface

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} \quad \text{para toda } \mathbf{x} \text{ en } V \quad (5)$$

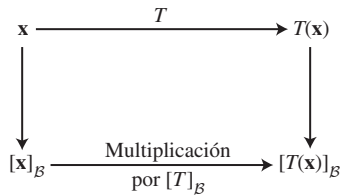


FIGURA 3

EJEMPLO 2 El mapeo $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ definido por

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = a_1 + 2a_2t$$

es una transformación lineal. (Los estudiantes de cálculo reconocerán T como el operador derivada).

- Determine la $\mathcal{B}$ -matriz para T , cuando $\mathcal{B}$ es la base $\{1, t, t^2\}$.
- Compruebe que $[T(\mathbf{p})]_{\mathcal{B}} = [T]_{\mathcal{B}}[\mathbf{p}]_{\mathcal{B}}$ para toda $\mathbf{p}$ en $\mathbb{P}_2$.

SOLUCIÓN

- Determine las imágenes de los vectores básicos:

$$\begin{aligned} T(1) &= 0 && \text{El polinomio cero} \\ T(t) &= 1 && \text{El polinomio cuyo valor siempre es 1} \\ T(t^2) &= 2t \end{aligned}$$

Después, escriba los vectores de $\mathcal{B}$ -coordenadas de $T(1)$, $T(t)$ y $T(t^2)$ (que en este ejemplo se localizan por inspección) y júntelos en la $\mathcal{B}$ -matriz para T :

$$[T(1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad [T(t^2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Para un general $\mathbf{p}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$,

$$\begin{aligned} [T(\mathbf{p})]_{\mathcal{B}} &= [a_1 + 2a_2 t]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ 2a_2 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = [T]_{\mathcal{B}} [\mathbf{p}]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Véase la figura 4.

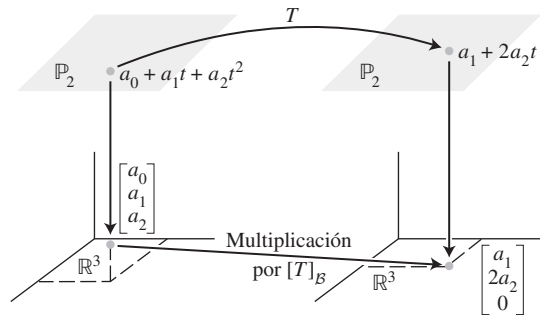


FIGURA 4 Representación matricial de una transformación lineal.

WEB

Transformaciones lineales sobre $\mathbb{R}^n$

En un problema aplicado que implica a $\mathbb{R}^n$, en general una transformación lineal T aparece primero como una transformación matricial, $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. Si A es diagonalizable, entonces hay una base $\mathcal{B}$ para $\mathbb{R}^n$ que consiste en vectores propios de A . A continuación, el teorema 8 demuestra que, en este caso, la $\mathcal{B}$ -matriz para T es diagonal. Diagonalizar A equivale a encontrar una representación matricial diagonal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

TEOREMA 8

Representación matricial diagonal

Suponga que $A = PDP^{-1}$, donde D es una matriz de $n \times n$ diagonal. Si $\mathcal{B}$ es la base para $\mathbb{R}^n$ formada con las columnas de P , entonces D es la $\mathcal{B}$ -matriz para la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

DEMOSTRACIÓN Denote las columnas de P con $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$, de manera que $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ y $P = [\mathbf{b}_1 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$. En este caso, P es la matriz de cambio de coordenadas $P_{\mathcal{B}}$ analizada en la sección 4.4, donde

$$P[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \mathbf{x} \quad \text{y} \quad [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P^{-1}\mathbf{x}$$

Si $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ para $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$, entonces,

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{B}} &= \begin{bmatrix} [T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{B}} & \cdots & [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} && \text{Definición de } [T]_{\mathcal{B}} \\ &= \begin{bmatrix} [A\mathbf{b}_1]_{\mathcal{B}} & \cdots & [A\mathbf{b}_n]_{\mathcal{B}} \end{bmatrix} && \text{Porque } T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \\ &= \begin{bmatrix} P^{-1}A\mathbf{b}_1 & \cdots & P^{-1}A\mathbf{b}_n \end{bmatrix} && \text{Cambio de coordenadas} \\ &= P^{-1}A[\mathbf{b}_1 \ \cdots \ \mathbf{b}_n] && \text{Multiplicación matricial} \\ &= P^{-1}AP \end{aligned}$$

(6)

Puesto que $A = PDP^{-1}$, entonces se tiene $[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = D$.

EJEMPLO 3 Defina $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$. Encuentre una base $\mathcal{B}$ para $\mathbb{R}^2$ con la propiedad de que la $\mathcal{B}$ -matriz para T es una matriz diagonal.

SOLUCIÓN Del ejemplo 2 de la sección 7.3, se conoce que $A = PDP^{-1}$, donde

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Las columnas de P , denotadas mediante $\mathbf{b}_1$ y $\mathbf{b}_2$, son vectores propios de A . Según el teorema 8, D es la $\mathcal{B}$ -matriz para T cuando $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Los mapeos $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ y $\mathbf{u} \mapsto D\mathbf{u}$ describen la misma transformación lineal respecto a diferentes bases. ■

Similitud de representaciones matriciales

La demostración del teorema 8 no utilizó la información de que D era diagonal. Por lo tanto, si A es similar a una matriz C , con $A = PCP^{-1}$, entonces C es la $\mathcal{B}$ -matriz para la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ cuando la base $\mathcal{B}$ está formada por las columnas de P . La figura 5 ilustra la factorización $A = PCP^{-1}$.

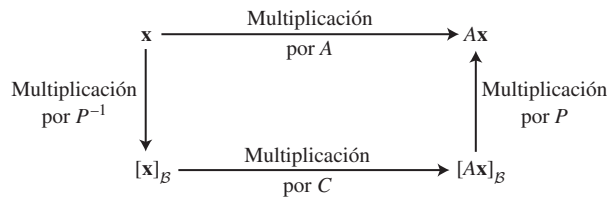


FIGURA 5 Similitud de dos representaciones matriciales:
 $A = PCP^{-1}$.

Inversamente, si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ está definida por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, y si $\mathcal{B}$ es cualquier base para $\mathbb{R}^n$, entonces la $\mathcal{B}$ -matriz para T es similar a A . En efecto, los cálculos en la demostración del teorema 8 indican que si P es la matriz cuyas columnas provienen de los vectores en $\mathcal{B}$, entonces, $[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP$. Así, el conjunto de todas las matrices similares a una matriz A coincide con el conjunto de todas las representaciones matriciales de la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$.

EJEMPLO 4 Sean $A = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. El polinomio característico de A es $(\lambda + 2)^2$, sin embargo, el espacio propio para el valor propio -2 es unidimensional; de manera que A no es diagonalizable. Sin embargo, la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ tiene la propiedad de que la $\mathcal{B}$ -matriz para la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es una matriz triangular llamada *forma de Jordan* de A .¹ Determine esta $\mathcal{B}$ -matriz.

SOLUCIÓN Si $P = [\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2]$, entonces la $\mathcal{B}$ -matriz es $P^{-1}AP$. Calcule

$$AP = \begin{bmatrix} 4 & -9 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Observe que el valor propio de A está sobre la diagonal. ■

¹ Cada matriz cuadrada A es similar a una matriz en forma de Jordan. La base utilizada para generar una forma de Jordan consiste en vectores propios y los llamados "vectores propios generalizados" de A . Véase el capítulo 9 de *Applied Linear Algebra*, 3a. ed. (Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1988), de B. Noble y J. W. Daniel.

NOTA NUMÉRICA

Una forma eficiente de calcular una $\mathcal{B}$ -matriz de $P^{-1}AP$ es determinando AP y, luego, reduciendo por filas la matriz aumentada $[P \quad AP]$ a $[I \quad P^{-1}AP]$. Es innecesario un cálculo por separado de P^{-1} . Véase el ejercicio 15 de la sección 2.2.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA†

- 1. Determine $T(a_0 + a_1t + a_2t^2)$, si T es la transformación lineal de $\mathbb{P}_2$ a $\mathbb{P}_2$ cuya matriz respecto a $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$ es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

- 2. Sean A , B y C matrices de $n \times n$. En el texto se ha demostrado que si A es similar a B , entonces B es similar a A . Esta propiedad, junto con los enunciados que se muestran debajo, indica que “similar a” es una *relación de equivalencia*. (La equivalencia por fila es otro ejemplo de una relación de equivalencia). Compruebe los incisos a) y b).
- a) A es similar a A .
- b) Si A es similar a B , y B es similar a C , entonces A es similar a C .

7.4 EJERCICIOS†

1. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ y $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ las bases de los espacios vectoriales V y W , respectivamente. Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal con la propiedad

$$T(\mathbf{b}_1) = 3\mathbf{d}_1 - 5\mathbf{d}_2, \quad T(\mathbf{b}_2) = -\mathbf{d}_1 + 6\mathbf{d}_2, \quad T(\mathbf{b}_3) = 4\mathbf{d}_2$$

Determine la matriz para T respecto a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D}$.

2. Sean $\mathcal{D} = \{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ las bases para los espacios vectoriales V y W , respectivamente. Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal con la propiedad

$$T(\mathbf{d}_1) = 3\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2, \quad T(\mathbf{d}_2) = -2\mathbf{b}_1 + 5\mathbf{b}_2$$

Determine la matriz para T respecto a $\mathcal{D}$ y $\mathcal{B}$.

3. Sean $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ la base estándar para $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base para un espacio vectorial V , y $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow V$ una transformación lineal con la propiedad

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_3 - x_2)\mathbf{b}_1 - (2x_2)\mathbf{b}_2 + (x_1 + 3x_3)\mathbf{b}_3$$

a) Calcule $T(\mathbf{e}_1)$, $T(\mathbf{e}_2)$ y $T(\mathbf{e}_3)$.

b) Obtenga $[T(\mathbf{e}_1)]_{\mathcal{B}}$, $[T(\mathbf{e}_2)]_{\mathcal{B}}$ y $[T(\mathbf{e}_3)]_{\mathcal{B}}$.

c) Determine la matriz para T respecto a $\mathcal{E}$ y $\mathcal{B}$.

4. Sean $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base para un espacio vectorial V y $T: V \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal con la propiedad

$$T(x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2 + x_3\mathbf{b}_3) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 5x_3 \end{bmatrix}$$

Encuentre la matriz para T respecto a $\mathcal{B}$ y la base estándar para $\mathbb{R}^2$.

5. Sea $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$ la transformación que mapea un polinomio $\mathbf{p}(t)$ en el polinomio $(t + 3)\mathbf{p}(t)$.

a) Encuentre la imagen de $\mathbf{p}(t) = 3 - 2t + t^2$.

b) Demuestre que T es una transformación lineal.

c) Obtenga la matriz para T respecto a las bases $\{1, t, t^2\}$ y $\{1, t, t^2, t^3\}$.

6. Sea $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_4$ la transformación que mapea un polinomio $\mathbf{p}(t)$ en el polinomio $\mathbf{p}(t) + 2t^2\mathbf{p}(t)$.

a) Determine la imagen de $\mathbf{p}(t) = 3 - 2t + t^2$.

b) Demuestre que T es una transformación lineal.

c) Encuentre la matriz para T respecto a las bases $\{1, t, t^2\}$ y $\{1, t, t^2, t^3, t^4\}$.

7. Suponga que el mapeo $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ definido por

$$T(a_0 + a_1t + a_2t^2) = 3a_0 + (5a_0 - 2a_1)t + (4a_1 + a_2)t^2$$

es lineal. Obtenga la representación matricial de T respecto a la base $\mathcal{B} = \{1, t, t^2\}$.

8. Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ una base para un espacio vectorial V . Encuentre $T(4\mathbf{b}_1 - 3\mathbf{b}_2)$ cuando T es una transformación lineal de V a V cuya matriz respecto a $\mathcal{B}$ es

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

9. Defina $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ por $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(-1) \\ \mathbf{p}(0) \\ \mathbf{p}(1) \end{bmatrix}$.

- Encuentre la imagen bajo T de $\mathbf{p}(t) = 5 + 3t$.
- Pruebe que T es una transformación lineal.
- Obtenga la matriz para T respecto a la base $\{1, t, t^2\}$ para $\mathbb{P}_2$ y la base estándar para $\mathbb{R}^3$.

10. Defina $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ por $T(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(-2) \\ \mathbf{p}(3) \\ \mathbf{p}(1) \\ \mathbf{p}(0) \end{bmatrix}$.

- Demuestre que T es una transformación lineal.
- Encuentre la matriz para T respecto a la base $\{1, t, t^2, t^3\}$ para $\mathbb{P}_3$ y la base estándar para $\mathbb{R}^4$.

En los ejercicios 11 y 12, determine la $\mathcal{B}$ -matriz para la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ donde $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$.

11. $A = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 13 a 16, defina $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$. Determine una base $\mathcal{B}$ para $\mathbb{R}^2$ con la propiedad de que $[T]_{\mathcal{B}}$ es diagonal.

13. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

17. Sean $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ y $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$ para $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Defina $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

- Compruebe que $\mathbf{b}_1$ es un vector propio de A , pero que A no es diagonalizable.
 - Encuentre la $\mathcal{B}$ -matriz para T .
- *18. Defina $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mediante $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, donde A es una matriz de 3×3 con valores propios de 5, 5 y -2 . ¿Existe una base $\mathcal{B}$ para $\mathbb{R}^3$ tal que la $\mathcal{B}$ -matriz para T sea una matriz diagonal? Analice.

En los ejercicios 19 a 24, compruebe los enunciados. Las matrices son cuadradas.

- *19. Si A es invertible y similar a B , entonces B es invertible y A^{-1} es similar a B^{-1} . [Sugerencia: $P^{-1}AP = B$ para alguna P invertible. Explique por qué B es invertible. Luego, determine una Q invertible tal que $Q^{-1}A^{-1}Q = B^{-1}$].
20. Si A es similar a B , entonces A^2 es similar a B^2 .
21. Si B es similar a A y C es similar a A , entonces B es similar a C .

22. Si A es diagonalizable y B es similar a A , entonces B también es diagonalizable.

23. Si $B = P^{-1}AP$ y $\mathbf{x}$ es un vector propio de A correspondiente a un valor propio λ , entonces $P^{-1}\mathbf{x}$ es un vector propio de B también asociado con λ .

24. Si A y B son similares, entonces tienen el mismo rango (dimensión del espacio imagen). [Sugerencia: Consulte los ejercicios complementarios 13 y 14 del capítulo 4].

25. La *traza* de una matriz cuadrada A es la suma de las entradas diagonales en A y se denota con $\text{tr } A$. Se puede comprobar que $\text{tr}(FG) = \text{tr}(GF)$ para cualesquiera dos matrices F y G de $n \times n$. Demuestre que si A y B son similares, entonces $\text{tr } A = \text{tr } B$.

26. Se puede demostrar que la traza de una matriz A es igual a la suma de los valores propios de A . Compruebe este enunciado para el caso cuando A es diagonalizable.

27. Sean $V = \mathbb{R}^n$ con una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$, y $W = \mathbb{R}^n$ con la base estándar que se denota mediante $\mathcal{E}$; y considere la transformación identidad $I: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $I(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$. Obtenga la matriz para I respecto a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{E}$. ¿Cómo se llamó a esta matriz en la sección 4.4?

28. Sean V un espacio vectorial con una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ y W el mismo espacio V con una base $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$; I es la transformación identidad $I: V \rightarrow W$. Encuentre la matriz para I respecto a $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$. ¿Cómo se llamó a esta matriz en la sección 4.7?

29. Sea V un espacio vectorial con una base $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$. Determine la $\mathcal{B}$ -matriz para la transformación identidad $I: V \rightarrow V$.

[M] En los ejercicios 30 y 31, determine la $\mathcal{B}$ -matriz para la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ donde $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$.

30. $A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

31. $A = \begin{bmatrix} -7 & -48 & -16 \\ 1 & 14 & 6 \\ -3 & -45 & -19 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

32. [M] Sea T la transformación cuya matriz estándar se presenta a continuación. Determine una base para $\mathbb{R}^4$ con la propiedad de que $[T]_{\mathcal{B}}$ sea diagonal.

$A = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 0 & 9 \\ -3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Sea $\mathbf{p}(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$, y calcule

$$[T(\mathbf{p})]_B = [T]_B[\mathbf{p}]_B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_0 + 4a_1 \\ 5a_1 - a_2 \\ a_0 - 2a_1 + 7a_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Así, } T(\mathbf{p}) = (3a_0 + 4a_1) + (5a_1 - a_2)t + (a_0 - 2a_1 + 7a_2)t^2.$$

2. a) $A = (I)^{-1}AI$, entonces A es similar a A .
 b) Por hipótesis, existen matrices invertibles P y Q con la propiedad de que $B = P^{-1}AP$ y $C = Q^{-1}BQ$. Sustituya la fórmula para B en la expresión para C , y utilice un resultado acerca de la inversa de un producto:

$$C = Q^{-1}BQ = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = (PQ)^{-1}A(PQ)$$

Esta ecuación tiene la forma adecuada para demostrar que A es similar a C .

7.5 VALORES PROPIOS COMPLEJOS

Puesto que la ecuación característica de una matriz de $n \times n$ implica un polinomio de grado n , la ecuación siempre tiene exactamente n raíces, contando las multiplicidades, *siempre y cuando se admitan raíces complejas*. Esta sección demuestra que si la ecuación característica de una matriz real A tiene algunas raíces complejas, entonces esas raíces aportan información importante acerca de A . La clave es dejar que A actúe sobre el espacio $\mathbb{C}^n$ de n -adas de números complejos.¹

Nuestro interés en $\mathbb{C}^n$ no se origina por el deseo de “generalizar” los resultados de los capítulos anteriores, no obstante que ello abriría nuevas aplicaciones significativas en álgebra lineal.² Más bien, este estudio de valores propios complejos es esencial para revelar información “oculta” sobre ciertas matrices con entradas reales que se presentan en gran variedad de problemas de la vida cotidiana. Tales problemas incluyen muchos sistemas dinámicos reales que implican movimiento periódico, vibración o algún tipo de rotación en el espacio.

La teoría del valor propio-vector propio matricial ya desarrollada para $\mathbb{R}^n$ se aplica bien a $\mathbb{C}^n$. Así que un escalar complejo λ satisface $\det(A - \lambda I) = 0$ si y solo si existe un vector distinto de cero $\mathbf{x}$ en $\mathbb{C}^n$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Decimos que λ es un **valor propio (complejo)** y $\mathbf{x}$ su correspondiente **vector propio (complejo)**.

EJEMPLO 1 Si $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces la transformación lineal $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^2$ gira

el plano en sentido antihorario, un ángulo de 90° . La acción de A es periódica, ya que, después de cuatro de tales aplicaciones, un vector regresa a su posición original. Evidentemente, ningún vector distinto de cero se mapea sobre un múltiplo de sí mismo, de manera que A no tiene vectores propios en $\mathbb{R}^2$ y, por lo tanto, carece de vectores propios reales. En efecto, la ecuación característica de A es

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

¹ Consulte el apéndice B para un breve análisis de números complejos. El álgebra matricial y los conceptos sobre espacios vectoriales reales se podrían ampliar al caso de entradas y escalares complejos. En particular, $A(c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = cA\mathbf{x} + dA\mathbf{y}$, para A de $m \times n$, con entradas complejas, $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ en $\mathbb{C}^n$, y c, d en $\mathbb{C}$.

² Con frecuencia, en un segundo curso en álgebra lineal se analizan dichos temas, que son de mucha importancia en ingeniería eléctrica.

Las únicas raíces son complejas: $\lambda = i$ y $\lambda = -i$. Sin embargo, si se permite que A actúe sobre $\mathbb{C}^2$, entonces,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Así, i y $-i$ son valores propios, con $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ como sus vectores propios correspondientes. (En el ejemplo 2 se analiza un método para *determinar* vectores propios complejos). ■

El principal interés de esta sección será la matriz del siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2 Sea $A = \begin{bmatrix} .5 & -.6 \\ .75 & 1.1 \end{bmatrix}$. Determine los valores propios de A , y encuentre una base para cada espacio propio.

SOLUCIÓN La ecuación característica de A es

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{bmatrix} .5 - \lambda & -.6 \\ .75 & 1.1 - \lambda \end{bmatrix} = (.5 - \lambda)(1.1 - \lambda) - (-.6)(.75) \\ &= \lambda^2 - 1.6\lambda + 1 \end{aligned}$$

De la fórmula cuadrática, $\lambda = \frac{1}{2}[1.6 \pm \sqrt{(-1.6)^2 - 4}] = .8 \pm .6i$. Para el valor propio $\lambda = 0.8 \pm .6i$, construya

$$\begin{aligned} A - (.8 - .6i)I &= \begin{bmatrix} .5 & -.6 \\ .75 & 1.1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} .8 - .6i & 0 \\ 0 & .8 - .6i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -.3 + .6i & -.6 \\ .75 & .3 + .6i \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

La reducción por filas de la matriz aumentada usual es muy engorrosa a mano debido a su aritmética compleja. Sin embargo, a continuación se presenta una agradable observación que realmente simplifica el asunto: Puesto que $.8 - .6i$ es un valor propio, el sistema

$$\begin{aligned} (-.3 + .6i)x_1 - .6x_2 &= 0 \\ .75x_1 + (.3 + .6i)x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

tiene una solución no trivial (con x_1 y x_2 posiblemente números complejos). Por lo tanto, *ambas ecuaciones en la ecuación (2) determinan la relación entre x_1 y x_2 , y cualquier ecuación sirve para expresar una variable en términos de la otra.*³

La segunda ecuación en (2) conduce a

$$\begin{aligned} .75x_1 &= (-.3 - .6i)x_2 \\ x_1 &= (-.4 - .8i)x_2 \end{aligned}$$

Se elige $x_2 = 5$ para así eliminar los decimales, y se obtiene $x_1 = -2 - 4i$. Una base para el espacio propio correspondiente a $\lambda = .8 - .6i$ es

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{bmatrix}$$

³ Otra forma de ver esto es considerando que la matriz en la ecuación (1) no es invertible, de manera que sus filas son linealmente dependientes (como vectores en $\mathbb{C}^2$) y, por consiguiente, una fila es múltiplo (complejo) de la otra.

Cálculos semejantes para $\lambda = .8 + .6i$ producen el vector propio

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{bmatrix}$$

Como una comprobación, calcule

$$A\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} .5 & -.6 \\ .75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 + 4i \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 + 2i \\ 4 + 3i \end{bmatrix} = (.8 + .6i)\mathbf{v}_2 \quad \blacksquare$$

Sorprendentemente, la matriz A del ejemplo 2 determina una transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ que en esencia es una rotación. Este hecho se hace evidente cuando se grafican los puntos adecuados.

EJEMPLO 3 Una manera de ver cómo la multiplicación por la matriz A del ejemplo 2 afecta los puntos consiste en graficar un punto inicial arbitrario, por ejemplo, $\mathbf{x}_0 = (2, 0)$, y después graficar imágenes sucesivas de este punto con multiplicaciones repetidas por A . Es decir, grafique

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} .5 & -.6 \\ .75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_2 &= A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} .5 & -.6 \\ .75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.4 \\ 2.4 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_3 &= A\mathbf{x}_2, \dots \end{aligned}$$

La figura 1 muestra $\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}_8$ como los puntos más grandes. Los puntos más pequeños son las ubicaciones de $\mathbf{x}_9, \dots, \mathbf{x}_{100}$. La secuencia se encuentra sobre una órbita elíptica. $\blacksquare$

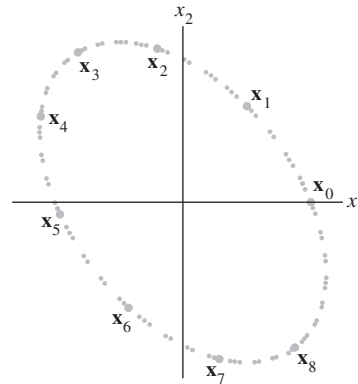


FIGURA 1 Iteración de un punto $\mathbf{x}_0$ por la acción de una matriz con un valor propio complejo.

Desde luego, la figura 1 no explica *por qué* ocurre la rotación. El secreto de la rotación está oculto en las partes real e imaginaria de un vector propio complejo.

Partes real e imaginaria de vectores

El complejo conjugado de un vector complejo $\mathbf{x}$ en $\mathbb{C}^n$ es el vector $\bar{\mathbf{x}}$ en $\mathbb{C}^n$ cuyas entradas están los complejos conjugados de las entradas en $\mathbf{x}$. Las **partes real e imaginaria** de un vector complejo $\mathbf{x}$ son los vectores $\text{Re } \mathbf{x}$ e $\text{Im } \mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ formados con las partes real e imaginaria de las entradas de $\mathbf{x}$.

EJEMPLO 4 Si $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3-i \\ i \\ 2+5i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$; entonces

$$\operatorname{Re} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{Im} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+i \\ -i \\ 2-5i \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Si B es una matriz de $m \times n$ con posibles entradas complejas, entonces $\bar{B}$ denota la matriz cuyas entradas son los complejos conjugados de las entradas en B . Las propiedades de conjugados de números complejos son válidas también en álgebra matricial compleja:

$$\overline{r\mathbf{x}} = \bar{r}\bar{\mathbf{x}}, \quad \overline{B\mathbf{x}} = \bar{B}\bar{\mathbf{x}}, \quad \overline{BC} = \bar{B}\bar{C} \quad \text{y} \quad \overline{rB} = \bar{r}\bar{B}$$

Valores propios y vectores propios de una matriz real que actúa sobre $\mathbb{C}^n$

Sea A una matriz de $n \times n$ cuyas entradas son reales. Entonces, $\overline{A\mathbf{x}} = \bar{A}\bar{\mathbf{x}} = A\bar{\mathbf{x}}$. Si λ es un valor propio de A y $\mathbf{x}$ su vector propio correspondiente en $\mathbb{C}^n$, entonces,

$$A\bar{\mathbf{x}} = \overline{A\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}} = \bar{\lambda}\bar{\mathbf{x}}$$

Por lo tanto, $\bar{\lambda}$ también es un valor propio de A , con $\bar{\mathbf{x}}$ su vector propio correspondiente. Esto demuestra que *cuando A es real, sus valores propios complejos se presentan en pares conjugados*. (Aquí y en todas partes, se utiliza el término *valor propio complejo* para referirse a un valor propio $\lambda = a + bi$, con $b \neq 0$).

EJEMPLO 5 Los valores propios de la matriz real del ejemplo 2 son complejos conjugados; a saber, $.8 - .6i$ y $.8 + .6i$. Los vectores propios correspondientes que se encontraron en el ejemplo 2 también son conjugados:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2-4i \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2+4i \\ 5 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{v}}_1 \quad \blacksquare$$

El siguiente ejemplo proporciona el “bloque básico” para todas las matrices reales de 2×2 con valores propios complejos.

EJEMPLO 6 Si $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, donde a y b son reales, pero no ambos cero, entonces

los valores propios de C son $\lambda = a \pm bi$. (Véase el problema de práctica al final de esta sección). También, si $r = |\lambda| = \sqrt{a^2 + b^2}$, entonces,

$$C = r \begin{bmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix}$$

donde φ es el ángulo entre el eje x positivo y el rayo que pasa por el origen y por (a, b) . Véase la figura 2. El ángulo φ se llama el *argumento* de $\lambda = a + bi$. Por consiguiente, la transformación $\mathbf{x} \mapsto C\mathbf{x}$ se puede ver como la composición de una rotación por un ángulo φ y un escalamiento por $|\lambda|$ (véase la figura 3). ■

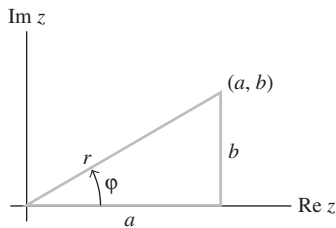


FIGURA 2

Finalmente, se está listo para descubrir la rotación que está oculta dentro de una matriz real que tiene un valor propio complejo.

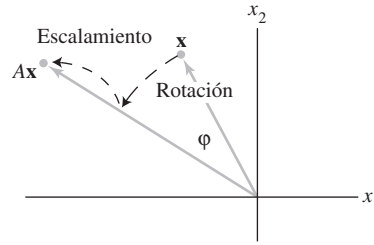


FIGURA 3 Una rotación seguida por un escalamiento.

EJEMPLO 7 Sea $A = \begin{bmatrix} .5 & -.6 \\ .75 & 1.1 \end{bmatrix}$, $\lambda = .8 - .6i$ y $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 - 4i \\ 5 \end{bmatrix}$, como en el ejemplo 2. También, sea P la matriz real de 2×2

$$P = [\operatorname{Re} \mathbf{v}_1 \quad \operatorname{Im} \mathbf{v}_1] = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

y sea

$$C = P^{-1}AP = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .5 & -.6 \\ .75 & 1.1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .8 & -.6 \\ .6 & .8 \end{bmatrix}$$

Por el ejemplo 6, C es una rotación pura porque $|\lambda|^2 = (.8)^2 + (.6)^2 = 1$. De $C = P^{-1}AP$, se obtiene

$$A = PCP^{-1} = P \begin{bmatrix} .8 & -.6 \\ .6 & .8 \end{bmatrix} P^{-1}$$

¡Aquí está la rotación “dentro” de A ! La matriz P proporciona un cambio de variable, por ejemplo, $\mathbf{x} = P\mathbf{u}$. La acción de A equivale a un cambio de variable de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{u}$, seguido de una rotación y, después, de regreso a la variable original. Véase la figura 4. La rotación produce una elipse, como en la figura 1, en vez de un círculo, ya que el sistema de coordenadas determinado por las columnas de P no es rectangular ni tiene longitudes unitarias idénticas sobre los dos ejes. ■

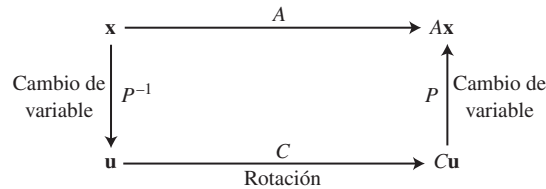


FIGURA 4 Rotación debida a un valor propio complejo.

El siguiente teorema demuestra que los cálculos del ejemplo 7 se adaptan a cualquier matriz real de 2×2 que tenga un valor propio complejo λ . La demostración utiliza el hecho de que si las entradas de A son reales, entonces $A(\operatorname{Re} \mathbf{x}) = \operatorname{Re} A\mathbf{x}$ y $A(\operatorname{Im} \mathbf{x}) = \operatorname{Im} A\mathbf{x}$, y si $\mathbf{x}$ es un vector propio para un valor propio complejo, entonces $\operatorname{Re} \mathbf{x}$ e $\operatorname{Im} \mathbf{x}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$. (Véase los ejercicios 25 y 26). Se omiten los detalles.

TEOREMA 9

Sea A una matriz real de 2×2 con un valor propio complejo $\lambda = a - bi$ ($b \neq 0$) y un vector propio asociado $\mathbf{v}$ en $\mathbb{C}^2$. Entonces,

$$A = PCP^{-1} \quad \text{donde} \quad P = [\operatorname{Re} \mathbf{v} \quad \operatorname{Im} \mathbf{v}] \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

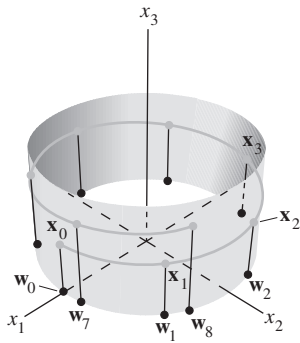


FIGURA 5
Iteraciones de dos puntos bajo la acción de una matriz de 3×3 con un valor propio complejo.

El fenómeno que se ilustra en el ejemplo 7 persiste en dimensiones más altas. Por ejemplo, si A es una matriz de 3×3 con un valor propio complejo, entonces existe un plano en $\mathbb{R}^3$ sobre el cual A actúa como una rotación (posiblemente combinada con escalamiento). Cada vector en ese plano se gira en otro punto sobre el mismo plano. Se dice que el plano es **invariante** bajo A .

EJEMPLO 8 La matriz $A = \begin{bmatrix} .8 & -.6 & 0 \\ .6 & .8 & 0 \\ 0 & 0 & 1.07 \end{bmatrix}$ tiene valores propios $.8 \pm .6i$ y 1.07.

Cualquier vector $\mathbf{w}_0$ en el plano x_1x_2 (con la tercera coordenada cero) es girado por A en otro punto del plano. Cualquier vector $\mathbf{x}_0$ que no esté en el plano tiene su coordenada x_3 multiplicada por 1.07. En la figura 5 se presentan las iteraciones de los puntos $\mathbf{w}_0 = (2, 0, 0)$ y $\mathbf{x}_0 = (2, 0, 1)$ con multiplicación por A . ■

PROBLEMA DE PRÁCTICA[‡]

- 1. Demuestre que si a y b son reales, entonces los valores propios de $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ son $a \pm bi$, con los vectores propios correspondientes $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$.

7.5 EJERCICIOS[†]

En los ejercicios 1 a 6, cada matriz actúa sobre $\mathbb{C}^2$. Determine los valores propios y una base para cada espacio propio en $\mathbb{C}^2$.

- $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -8 & 1 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 7 a 12, utilice el ejemplo 6 para listar los valores propios de A . En cada caso, la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ es la composición de una rotación y de un escalamiento. Determine el ángulo φ de la rotación, donde $-\pi < \varphi \leq \pi$, así como el factor de escala de r .

- $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & 3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 0 & .5 \\ -.5 & 0 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 13 a 20, encuentre una matriz P invertible y una matriz C de la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ tal que la matriz dada tenga la forma $A = PCP^{-1}$.

- $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -11 & -4 \\ 20 & 5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1.52 & -.7 \\ .56 & .4 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

- En el ejemplo 2, despeje x_2 en la primera ecuación en (2) en términos de x_1 , para de ahí producir el vector propio $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 + 2i \end{bmatrix}$ para la matriz A . Demuestre que este $\mathbf{y}$ es un múltiplo (complejo) del vector $\mathbf{v}_1$ utilizado en el ejemplo 2.
- Sean A una matriz de $n \times n$ compleja (o real), y $\mathbf{x}$ en $\mathbb{C}^n$ un vector propio correspondiente a un valor propio λ en $\mathbb{C}$. Demuestre que para cada escalar complejo μ distinto de cero, el vector $\mu\mathbf{x}$ es un vector propio de A .

El capítulo 8 se enfocará en matrices con la propiedad $A^T = A$. Los ejercicios 23 y 24 demuestran que cada valor propio de dichas matrices es necesariamente real.

- *23. Sean A una matriz real de $n \times n$ tal que $A^T = A$, $\mathbf{x}$ cualquier vector en $\mathbb{C}^n$ y $q = \overline{\mathbf{x}}^T A \mathbf{x}$. Las igualdades que se presentan a continuación demuestran que q es un número real comprobando que $\bar{q} = q$. Dé una razón para cada paso.

$$\bar{q} = \overline{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}} = \mathbf{x}^T \overline{A \mathbf{x}} = \mathbf{x}^T A \overline{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}^T A \overline{\mathbf{x}})^T = \overline{\mathbf{x}}^T A^T \mathbf{x} = q$$

a) b) c) d) e)

24. Sea A una matriz real de $n \times n$ con la propiedad $A^T = A$. Demuestre que si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ para algún vector $\mathbf{x}$ distinto de cero en $\mathbb{C}^n$, entonces, en efecto, λ es real y la parte real de $\mathbf{x}$ es un vector propio de A . [Sugerencia: Calcule $\bar{\mathbf{x}}^T A\mathbf{x}$, y utilice el ejercicio 23. Asimismo, examine las partes real e imaginaria de $A\mathbf{x}$].
25. Sean A una matriz real de $n \times n$, y $\mathbf{x}$ un vector en $\mathbb{C}^n$. Demuestre que $\operatorname{Re}(A\mathbf{x}) = A(\operatorname{Re} \mathbf{x})$ y $\operatorname{Im}(A\mathbf{x}) = A(\operatorname{Im} \mathbf{x})$.
26. Sea A una matriz real de 2×2 con un valor propio complejo $\lambda = a - bi$ ($b \neq 0$) y un vector propio asociado $\mathbf{v}$ en $\mathbb{C}^2$.
- a) Demuestre que $A(\operatorname{Re} \mathbf{v}) = a \operatorname{Re} \mathbf{v} + b \operatorname{Im} \mathbf{v}$ y $A(\operatorname{Im} \mathbf{v}) = -b \operatorname{Re} \mathbf{v} + a \operatorname{Im} \mathbf{v}$. [Sugerencia: Escriba $\mathbf{v} = \operatorname{Re} \mathbf{v} + i \operatorname{Im} \mathbf{v}$, y calcule $A\mathbf{v}$].
- b) Compruebe que si P y C están dadas como en el teorema 9, entonces $AP = PC$.

[M] En los ejercicios 27 y 28, encuentre una factorización de la matriz A dada en la forma $A = PCP^{-1}$, donde C sea una matriz diagonal a bloques de 2×2 como se indica en el ejemplo 6. (Para cada par conjugado de valores propios, utilice las partes real e imaginaria de un vector propio en $\mathbb{C}^4$ para crear dos columnas de P).

$$27. A = \begin{bmatrix} 26 & 33 & 23 & 20 \\ -6 & -8 & -1 & -13 \\ -14 & -19 & -16 & 3 \\ -20 & -20 & -20 & -14 \end{bmatrix}$$

$$28. A = \begin{bmatrix} 7 & 11 & 20 & 17 \\ -20 & -40 & -86 & -74 \\ 0 & -5 & -10 & -10 \\ 10 & 28 & 60 & 53 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE PRÁCTICA

Recuerde que es fácil comprobar si un vector es un vector propio. No hay necesidad de examinar la ecuación característica. Calcule

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + bi \\ b - ai \end{bmatrix} = (a + bi) \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$$

Así $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ es un vector propio correspondiente a $\lambda = a + bi$. Del análisis en esta sección, resulta que $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ debe ser un vector propio asociado con $\bar{\lambda} = a - bi$.

7.6 SISTEMAS DINÁMICOS DISCRETOS

Los valores propios y vectores propios ofrecen la clave para entender el comportamiento a largo plazo, o *evolución*, de un sistema dinámico descrito por una ecuación en diferencias $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$. Dicha ecuación se utilizó en la sección 1.10 para modelar el movimiento de población; en la sección 4.9, varias cadenas de Markov; y en el ejemplo introductorio de este capítulo, la población de búhos manchados. Los vectores $\mathbf{x}_k$ dan información acerca del sistema conforme transcurre el tiempo (que se denota con k). En el caso de los búhos manchados, por ejemplo, $\mathbf{x}_k$ listó el número de búhos en tres clases de edades al tiempo k .

En esta sección las aplicaciones se enfocan sobre problemas ecológicos, ya que son más fáciles de plantear y de explicar que, por ejemplo, problemas de física o de ingeniería. Sin embargo, los sistemas dinámicos se originan en muchos campos científicos. En cursos estándar de licenciatura de sistemas de control se estudian diversos aspectos de sistemas dinámicos. En tales cursos el método moderno de diseño del *espacio de estados* se basa significativamente en álgebra de matrices.¹ La respuesta de *estado estable* de un sistema de control es el equivalente en ingeniería de lo que aquí se denomina “comportamiento a largo plazo” del sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$.

¹ Véase G. F. Franklin, J. D. Powell y A. Emami-Naeimi, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 5a. ed. (Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2006). Este texto tiene una excelente introducción a modelos dinámicos (cap. 2). Los capítulos 8 y 9 tratan el diseño del espacio de estados.

Hasta el ejemplo 6, se supone que A es diagonalizable con n vectores propios linealmente independientes, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, y sus valores propios correspondientes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Por conveniencia, se supone que los vectores propios están arreglados de tal manera que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$. Puesto que $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base para $\mathbb{R}^n$, entonces cualquier vector inicial $\mathbf{x}_0$ se puede escribir unívocamente en la forma

$$\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n \quad (1)$$

Esta *descomposición de vectores propios* de $\mathbf{x}_0$ determina lo que sucede a la secuencia $\{\mathbf{x}_k\}$. El siguiente cálculo generaliza el caso simple examinado en el ejemplo 5 de la sección 7.2. Como los $\mathbf{v}_i$ son vectores propios

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= A\mathbf{x}_0 = c_1 A\mathbf{v}_1 + \dots + c_n A\mathbf{v}_n \\ &= c_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \lambda_n \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

En general,

$$\mathbf{x}_k = c_1 (\lambda_1)^k \mathbf{v}_1 + \dots + c_n (\lambda_n)^k \mathbf{v}_n \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

Los siguientes ejemplos ilustran qué sucede en (2) conforme $k \rightarrow \infty$.

Un sistema depredador-presa

En lo profundo de los bosques de secuoyas en California, las ratas de bosque de patas oscuras suministran el 80% de la dieta de los búhos manchados, el principal depredador de esos roedores nocturnos. El ejemplo 1 utiliza un sistema dinámico lineal para modelar el sistema físico de los búhos y las ratas. (Hay que admitir que aunque el modelo no es realista en varios aspectos, puede dar el punto de partida para el estudio de modelos no lineales más complicados utilizados por científicos ambientales).

EJEMPLO 1 Denote las poblaciones de búhos y ratas de bosque al tiempo k por el vector $\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} O_k \\ R_k \end{bmatrix}$, donde k es el tiempo en meses, O_k es el número de búhos en la región bajo estudio y R_k es el número de ratas (medido en miles). Suponga que

$$\begin{aligned} O_{k+1} &= (.5)O_k + (.4)R_k \\ R_{k+1} &= -p \cdot O_k + (1.1)R_k \end{aligned} \quad (3)$$

donde p es un parámetro positivo que se debe especificar. $(.5)O_k$ en la primera ecuación indica que si no hay ratas para alimentarse, entonces cada mes sobreviviría tan solo la mitad de los búhos; mientras que $(1.1)R_k$ en la segunda ecuación implica que sin los búhos como depredadores, la población de ratas crecería 10% cada mes. Si las ratas son abundantes, $(.4)R_k$ hará que crezca la población de búhos, en tanto que el término negativo $-p \cdot O_k$ mide las muertes de ratas por la depredación de los búhos. (En efecto, $1000p$ es el número promedio de ratas devoradas por un búho en un mes). Determine la evolución de este sistema, cuando el parámetro de depredación p es .104.

SOLUCIÓN Cuando $p = .104$, los valores propios de la matriz de coeficientes A para las ecuaciones (3) resultan ser $\lambda_1 = 1.02$ y $\lambda_2 = .58$. Los vectores propios correspondientes son

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Un vector inicial $\mathbf{x}_0$ se escribe como $\mathbf{x}_0 = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$. Entonces, para $k \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= c_1 (1.02)^k \mathbf{v}_1 + c_2 (.58)^k \mathbf{v}_2 \\ &= c_1 (1.02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} + c_2 (.58)^k \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Conforme $k \rightarrow \infty$, entonces $(.58)^k$ rápidamente se aproxima a cero. Suponga que $c_1 > 0$. Por lo tanto, para toda k suficientemente grande, $\mathbf{x}_k$ es aproximadamente igual a $c_1(1.02)^k \mathbf{v}_1$, y se escribe

$$\mathbf{x}_k \approx c_1(1.02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \quad (4)$$

La aproximación en (4) mejora conforme k se incrementa, y así para k grandes,

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx c_1(1.02)^{k+1} \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} = (1.02)c_1(1.02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix} \approx 1.02\mathbf{x}_k \quad (5)$$

La aproximación en la ecuación (5) indica que a final de cuentas ambas entradas de $\mathbf{x}_k$ (los números de búhos y ratas) crecerán por un factor de casi 1.02 cada mes, un 2% de tasa de crecimiento mensual. Por (4), $\mathbf{x}_k$ es aproximadamente un múltiplo de (10, 13), de manera que las entradas en $\mathbf{x}_k$ están casi en la misma razón de 10 a 13. Es decir, por cada 10 búhos hay cerca de 13 mil ratas. ■

El ejemplo 1 muestra dos hechos generales acerca de un sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ donde A es $n \times n$, sus valores propios satisfacen $|\lambda_1| \geq 1$ y $1 > |\lambda_j|$ para $j = 2, \dots, n$ y $\mathbf{v}_1$ es un vector propio correspondiente a λ_1 . Si $\mathbf{x}_0$ está dado por la ecuación (1), con $c_1 \neq 0$, entonces para todas las k suficientemente grandes,

$$\mathbf{x}_{k+1} \approx \lambda_1 \mathbf{x}_k \quad (6)$$

y

$$\mathbf{x}_k \approx c_1(\lambda_1)^k \mathbf{v}_1 \quad (7)$$

Las aproximaciones en (6) y (7) se pueden volver tan cercanas como se desee tomando una k muy grande. Por (6), $\mathbf{x}_k$ finalmente crecerá casi por un factor de λ_1 cada vez, de manera que λ_1 determina la eventual tasa de crecimiento del sistema. Asimismo, por (7), la razón de cualesquiera dos entradas en $\mathbf{x}_k$ (para k grande) es casi la misma que la razón de las entradas correspondientes en $\mathbf{v}_1$. En el ejemplo 5 de la sección 7.2, se ilustra el caso donde $\lambda_1 = 1$.

Descripción gráfica de soluciones

Cuando A es una matriz de 2×2 , los cálculos algebraicos se complementan con una descripción geométrica de la evolución del sistema. La ecuación $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ se puede considerar una descripción de qué sucede al punto inicial $\mathbf{x}_0$ en $\mathbb{R}^2$, conforme se transforma repetidamente por el mapeo $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$. La gráfica de $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots$ es la **trayectoria** del sistema dinámico.

EJEMPLO 2 Grafique varias trayectorias del sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, cuando

$$A = \begin{bmatrix} .80 & 0 \\ 0 & .64 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Los valores propios de A son .8 y .64, con vectores propios $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y

$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$, entonces,

$$\mathbf{x}_k = c_1(.8)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2(.64)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Desde luego, $\mathbf{x}_k$ tiende a $\mathbf{0}$ porque $(.8)^k$ y $(.64)^k$ se aproximan a 0 conforme $k \rightarrow \infty$. No obstante, resulta interesante *la manera* en que $\mathbf{x}_k$ va hacia $\mathbf{0}$. La figura 1 (que se presenta a continuación) muestra los primeros términos escasos de varias trayectorias que empiezan en puntos sobre la frontera de la caja con vértices en $(\pm 3, \pm 3)$. Los puntos sobre cada trayectoria están conectados por una curva delgada, para que así la trayectoria sea más fácil de observar. ■

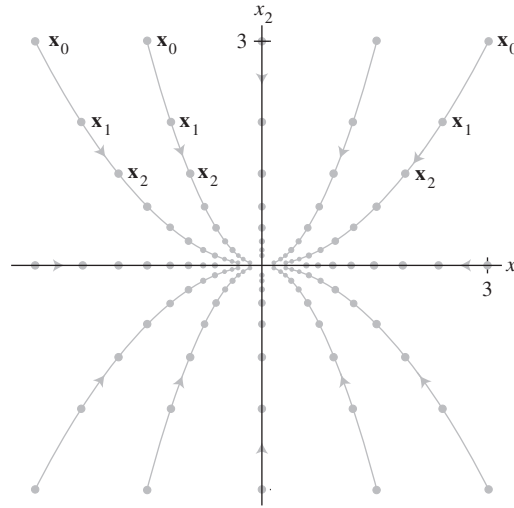


FIGURA 1 El origen como un atractor.

En el ejemplo 2, al origen se le denomina **atractor** del sistema dinámico porque todas las trayectorias tienden hacia $\mathbf{0}$. Esto ocurre siempre que ambos valores propios sean menores que 1 en magnitud. La dirección de la atracción más grande está a lo largo de la recta que pasa por $\mathbf{0}$ y el vector propio $\mathbf{v}_2$ para el valor propio de menor magnitud.

En el siguiente ejemplo, ambos valores propios de A son mayores que 1 en magnitud, y $\mathbf{0}$ es un **repulsor** del sistema dinámico. Todas las soluciones de $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ excepto la solución cero (constante), no están acotadas y tienden a alejarse del origen.²

EJEMPLO 3 Grafique varias soluciones típicas de la ecuación $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1.44 & 0 \\ 0 & 1.2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Los valores propios de A son 1.44 y 1.2. Si $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, entonces,

$$\mathbf{x}_k = c_1(1.44)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2(1.2)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ambos términos aumentaron en tamaño, pero el primer término lo hizo más rápido. Así, la dirección de la mayor repulsión es la recta que pasa por $\mathbf{0}$ y por el vector propio para el valor propio de magnitud más grande. La figura 2 muestra varias trayectorias que inician en puntos muy cercanos a $\mathbf{0}$. ■

En el siguiente ejemplo, $\mathbf{0}$ es un **punto silla** porque el origen atrae soluciones de algunas direcciones y las repele en otras direcciones. Esto ocurre siempre que un valor propio sea más grande que 1 en magnitud y el otro sea menor que 1 en magnitud. La dirección de mayor atracción está determinada por un vector propio del valor propio de menor magnitud. La dirección de la mayor repulsión se determina mediante un vector propio del valor propio de magnitud más grande.

² El origen es el único posible atractor o repulsor en un sistema dinámico *lineal*, aunque podrían existir múltiples atractores y repulsores en un sistema dinámico más general para el cual el mapeo $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_{k+1}$ no es lineal. En tal sistema, los atractores y los repulsores están definidos en términos de los valores propios de una matriz especial (con entradas variables) llamada *matriz jacobiana* del sistema.

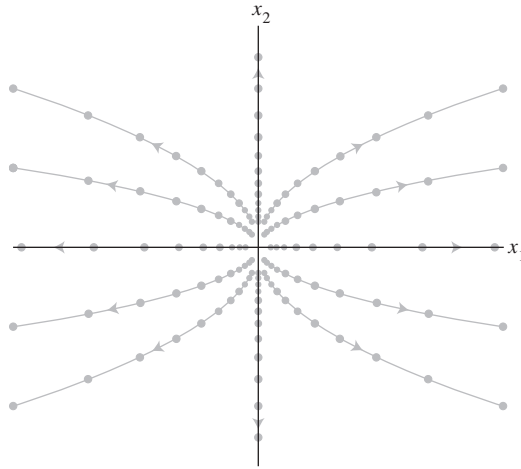


FIGURA 2 El origen como un repulsor.

EJEMPLO 4 Grafique varias soluciones típicas de la ecuación $\mathbf{y}_{k+1} = D\mathbf{y}_k$, donde

$$D = \begin{bmatrix} 2.0 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

(Aquí se usaron D y $\mathbf{y}$ en vez de A y $\mathbf{x}$ porque este ejemplo se utilizará más adelante). Demuestre que una solución $\{\mathbf{y}_k\}$ no está acotada, cuando su punto inicial no está sobre el eje x_2 .

SOLUCIÓN Los valores propios de D son 2 y 0.5. Si $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, entonces,

$$\mathbf{y}_k = c_1 2^k \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 (0.5)^k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Si $\mathbf{y}_0$ está sobre el eje x_2 , entonces $c_1 = 0$ y $\mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{0}$ conforme $k \rightarrow \infty$. Pero si $\mathbf{y}_0$ no se encuentra sobre el eje x_2 , entonces el primer término en la suma para $\mathbf{y}_k$ se vuelve arbitrariamente grande y, por lo tanto, $\{\mathbf{y}_k\}$ no está acotada. La figura 3 presenta diez trayectorias que inician cerca del eje x_2 o sobre este. ■

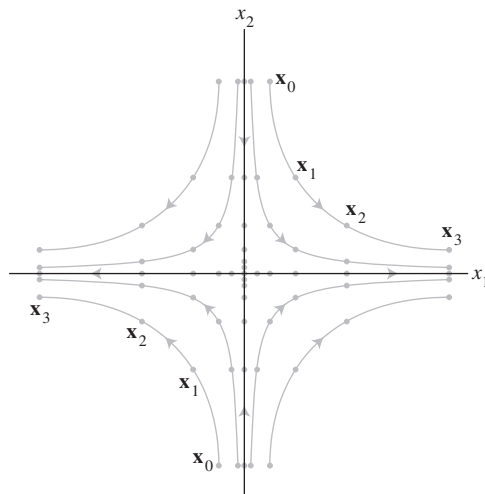


FIGURA 3 El origen como un punto silla.

Cambio de variable

Los tres ejemplos anteriores implicaron matrices diagonales. Para tratar el caso no diagonal, regrese por un momento al caso $n \times n$ donde los vectores propios de A forman una base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ para $\mathbb{R}^n$. Sean $P = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n]$, y D la matriz diagonal con los valores propios correspondientes sobre la diagonal. Dada una secuencia $\{\mathbf{x}_k\}$ que comprueba $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, defina una nueva secuencia $\{\mathbf{y}_k\}$ mediante

$$\mathbf{y}_k = P^{-1}\mathbf{x}_k \quad \text{o, de manera equivalente,} \quad \mathbf{x}_k = P\mathbf{y}_k$$

Sustituyendo esas relaciones en la ecuación $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ y utilizando que $A = PDP^{-1}$, se tiene que

$$P\mathbf{y}_{k+1} = AP\mathbf{y}_k = (PDP^{-1})P\mathbf{y}_k = PD\mathbf{y}_k$$

Se multiplican ambos lados por la izquierda por P^{-1} y se obtiene

$$\mathbf{y}_{k+1} = D\mathbf{y}_k$$

Si se escribe $\mathbf{y}_k$ como $\mathbf{y}(k)$ y se denotan las entradas en $\mathbf{y}(k)$ por $y_1(k), \dots, y_n(k)$, entonces,

$$\begin{bmatrix} y_1(k+1) \\ y_2(k+1) \\ \vdots \\ y_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \vdots \\ y_n(k) \end{bmatrix}$$

El cambio de variable de $\mathbf{x}_k$ a $\mathbf{y}_k$ ha *desacoplado* el sistema de ecuaciones en diferencias. La evolución de $y_1(k)$, por ejemplo, no se ve afectada por lo que suceda a $y_2(k), \dots, y_n(k)$, porque $y_1(k+1) = \lambda_1 \cdot y_1(k)$ para cada k .

La ecuación $\mathbf{x}_k = P\mathbf{y}_k$ indica que $\mathbf{y}_k$ es el vector de coordenadas de $\mathbf{x}_k$ con respecto a la base de vectores propios $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$. Se puede desacoplar el sistema $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ efectuando cálculos en el nuevo sistema de coordenadas de vectores propios. Cuando $n = 2$, esto equivale a emplear papel para graficar con ejes en las direcciones de los dos vectores propios.

EJEMPLO 5 Demuestre que el origen es un punto silla para las soluciones de $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1.25 & -.75 \\ -.75 & 1.25 \end{bmatrix}$$

Encuentre las direcciones de mayor atracción y de mayor repulsión.

SOLUCIÓN Utilizando técnicas estándar, se determina que los valores propios de A son 2 y .5, con los vectores propios correspondientes $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente. Como $|2| > 1$ y $|.5| < 1$, entonces el origen es un punto silla del sistema dinámico. Si $\mathbf{x}_0 = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$,

$$\mathbf{x}_k = c_1 2^k \mathbf{v}_1 + c_2 (.5)^k \mathbf{v}_2 \quad (9)$$

Esta ecuación se ve exactamente igual que la ecuación (8) del ejemplo 4, con $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ en lugar de la base estándar.

Sobre el papel para graficar, dibuje ejes a través de $\mathbf{0}$ y de los vectores propios $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Véase la figura 4. El movimiento a lo largo de los ejes corresponde al movimiento sobre los ejes estándar de la figura 3. En la figura 4, la dirección de mayor *repulsión* es la recta que pasa por $\mathbf{0}$ y el vector propio $\mathbf{v}_1$ cuyo valor propio es mayor que 1 en magnitud. Si $\mathbf{x}_0$ está sobre esta recta, c_2 de la ecuación (9) es cero y $\mathbf{x}_k$ se aleja rápidamente de $\mathbf{0}$. La dirección de mayor *atracción* está determinada por el vector propio $\mathbf{v}_2$ cuyo valor propio es menor que 1 en magnitud.

En la figura 4 se ilustra un número de trayectorias. Cuando esta gráfica se observa en términos de los ejes de vectores propios, el esquema “parece” en esencia igual que el esquema de la figura 3. ■

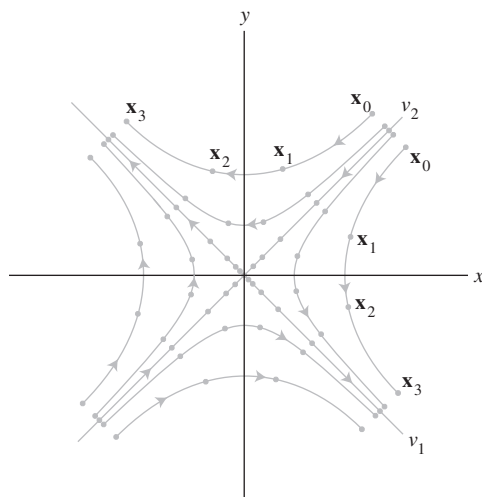


FIGURA 4 El origen como un punto silla.

Valores propios complejos

Cuando una matriz real A de 2×2 tiene valores propios complejos, entonces A no es diagonalizable (cuando actúa sobre $\mathbb{R}^2$), pero el sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ es fácil de describir. El ejemplo 3 de la sección 7.5 ilustró el caso donde los valores propios tienen valor absoluto 1. La iteración de un punto $\mathbf{x}_0$ giró alrededor del origen con una trayectoria elíptica.

Si A tiene dos valores propios complejos cuyo valor absoluto es mayor que 1, entonces $\mathbf{0}$ es un repulsor y la iteración de $\mathbf{x}_0$ girará en espiral hacia fuera en torno al origen. Si los valores absolutos de los valores propios complejos son menores que 1, entonces el origen es un atractor y la iteración de $\mathbf{x}_0$ da una espiral hacia adentro acercándose al origen, como en el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 6 Se puede comprobar que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} .8 & .5 \\ -.1 & 1.0 \end{bmatrix}$$

tiene valores propios $.9 \pm .2i$, con vectores propios $\begin{bmatrix} 1 \mp 2i \\ 1 \end{bmatrix}$. La figura 5 (que se presenta más adelante) muestra tres trayectorias del sistema $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, con vectores iniciales $\begin{bmatrix} 0 \\ 2.5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ -2.5 \end{bmatrix}$. ■

Supervivencia de los búhos manchados

Recuerde del ejemplo introductorio de este capítulo que la población de búhos manchados en el área Willow Creek, California, se modeló con un sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ donde las entradas en $\mathbf{x}_k = (j_k, s_k, a_k)$ listaban los números de hembras (al tiempo k) en las etapas de vida juvenil, subadulto y adulto, respectivamente, y A es la matriz de etapas

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & .33 \\ .18 & 0 & 0 \\ 0 & .71 & .94 \end{bmatrix} \quad (10)$$

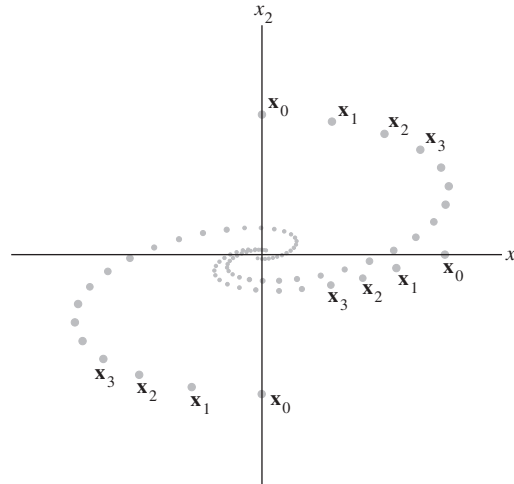


FIGURA 5 Rotación asociada con valores propios complejos.

MATLAB muestra que los valores propios de A son aproximadamente $\lambda_1 = .98$, $\lambda_2 = -.02 + .21i$ y $\lambda_3 = -.02 - .21i$. Observe que los tres valores propios son menores que 1 en magnitud, ya que $|\lambda_2|^2 = |\lambda_3|^2 = (-.02)^2 + (.21)^2 = 0.445$.

Por el momento, deje que A actúe sobre el espacio vectorial complejo $\mathbb{C}^3$. Puesto que A tiene tres valores propios distintos, entonces los tres vectores propios correspondientes son linealmente independientes y forman una base para $\mathbb{C}^3$. Denote los vectores propios con $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Así, la solución general de $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ (utilizando vectores en $\mathbb{C}^3$) tiene la forma

$$\mathbf{x}_k = c_1(\lambda_1)^k \mathbf{v}_1 + c_2(\lambda_2)^k \mathbf{v}_2 + c_3(\lambda_3)^k \mathbf{v}_3 \quad (11)$$

Si $\mathbf{x}_0$ es un vector inicial real, entonces $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$ es real porque A es real. Asimismo, la ecuación $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ indica que cada $\mathbf{x}_k$ en el miembro izquierdo de la ecuación (11) es real, aun cuando se expresa como una suma de vectores complejos. Sin embargo, cada término en el miembro derecho de la ecuación (11) se aproxima al vector cero, ya que todos los valores propios son menores que 1 en magnitud. Por lo tanto, la secuencia real $\mathbf{x}_k$ también tiende al vector cero. Tristemente, este modelo predice que, a final de cuentas, perecerán todos los búhos.

¿Hay alguna esperanza para los búhos manchados? Recuerde del ejemplo introductorio que la entrada de 18% en la matriz A de la ecuación (10) es porque, no obstante que el 60% de los búhos juveniles sobreviven lo suficiente para dejar el nido y buscar nuevas áreas de distribución, tan solo el 30% de ese grupo sobrevive a dicha búsqueda y encuentra un nuevo hogar. La supervivencia a la mencionada búsqueda está significativamente influida por el número de áreas deforestadas en el bosque, lo cual vuelve más difícil y peligrosa esa búsqueda.

Algunas poblaciones de búhos habitan en zonas con pocas o ninguna área deforestada. Quizás un porcentaje aún mayor de búhos juveniles sobrevivan ahí y encuentren nuevos territorios. De hecho, el problema del búho manchado es más complicado que como se ha expuesto, no obstante que el ejemplo final da un final feliz a la historia.

EJEMPLO 7 Suponga que la tasa de supervivencia a la búsqueda, de los búhos juveniles, sea de 50%, de manera que la entrada (2, 1) de la matriz por etapas (de estados) A en (10) es .3 en vez de .18. ¿Qué predice el modelo de la matriz por etapas acerca de la población de búhos manchados?

SOLUCIÓN Ahora los valores propios de A resultan ser aproximadamente $\lambda_1 = 1.01$, $\lambda_2 = -.03 + .26i$ y $\lambda_3 = -.03 - .26i$. Un vector propio para λ_1 es aproximadamente $\mathbf{v}_1 = (10, 3, 31)$. Sean $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ vectores propios (complejos) para λ_2 y λ_3 . En este caso, la

ecuación (11) se convierte en

$$\mathbf{x}_k = c_1(1.01)^k \mathbf{v}_1 + c_2(-.03 + .26i)^k \mathbf{v}_2 + c_3(-.03 - .26i)^k \mathbf{v}_3$$

Cuando $k \rightarrow \infty$, el segundo de los dos vectores tiende a cero. Así, $\mathbf{x}_k$ se vuelve cada vez más semejante al vector (real) $c_1(1.01)^k \mathbf{v}_1$. Las aproximaciones aplicadas en (6) y (7) provienen del ejemplo 1. Además, se puede demostrar que la constante c_1 en la descomposición inicial de $\mathbf{x}_0$ es positiva cuando las entradas en $\mathbf{x}_0$ son no negativas. Entonces, la población de búhos crecerá lentamente, con una tasa de crecimiento asintótica de 1.01. El vector propio $\mathbf{v}_1$ describe la distribución final de los búhos en sus etapas de vida: por cada 31 adultos, habrá 10 juveniles y 3 subadultos. ■

Lecturas adicionales

Franklin G. F., J. D. Powell y M. L. Workman. *Digital Control of Dynamic Systems*, 3a. ed., Reading, MA: Addison-Wesley, 1998.

Sandefur, James T. *Discrete Dynamical Systems-Theory and Applications*. Oxford: Oxford University Press, 1990.

Tuchinsky, Philip. *Management of a Buffalo Herd*, UMAP módulo 207. Lexington, MA: COMAP, 1980.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA[†]

- 1. La matriz A que se muestra a continuación tiene los valores propios 1 , $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$ con los vectores propios correspondientes $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$:

$$A = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Encuentre la solución general de la ecuación $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ si $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}$.

- 2. ¿Qué ocurre en la secuencia $\{\mathbf{x}_k\}$ del problema de práctica 1, conforme $k \rightarrow \infty$?

7.6 EJERCICIOS[†]

- Sea A una matriz de 2×2 con valores propios 3 y $1/3$, y vectores propios correspondientes $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Sea $\{\mathbf{x}_k\}$ una solución de la ecuación en diferencias $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$, $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$.
 - Calcule $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0$. [Sugerencia: No se necesita conocer A].
 - Determine una fórmula para $\mathbf{x}_k$ que implique k y los vectores propios $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.
- Suponga que los valores propios de A de 3×3 son 3 , $4/5$ y $3/5$, con sus vectores propios correspondientes $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -3 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$. Sea $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix}$. Encuentre la solución de la ecuación $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ para $\mathbf{x}_0$ especificado, y describa qué sucede cuando $k \rightarrow \infty$.

En los ejercicios 3 a 6, suponga que cualquier vector inicial $\mathbf{x}_0$ tiene una descomposición de vectores propios tal que el coeficiente c_1 , en la ecuación (1) de esta sección, es positivo.³

- * 3. Determine la evolución del sistema dinámico del ejemplo 1, cuando el parámetro de depredación p es .2 en la ecuación (3). (Dé una fórmula para $\mathbf{x}_k$). ¿Crece o disminuye la población de búhos? ¿Qué se puede decir sobre la población de ratas de bosque?
- * 4. Determine la evolución del sistema dinámico del ejemplo 1, cuando el parámetro de depredación p es .125. (Dé una fórmula para $\mathbf{x}_k$). Conforme el tiempo transcurre, ¿qué ocurre a los tamaños de las poblaciones de búhos y de ratas bosque? El sistema tiende hacia lo que algunas veces se denomina equilibrio inestable. ¿Qué piensa que pueda ocurrirle al sistema si algún aspecto del modelo (como las tasas de nacimiento o de depredación) cambiara ligeramente?
- * 5. En los antiguos bosques de abetos en Douglas, los búhos manchados cenan básicamente ardillas voladoras. Suponga que la matriz depredador-presa para esas dos poblaciones es $A = \begin{bmatrix} .4 & .3 \\ -p & 1.2 \end{bmatrix}$. Demuestre que si el parámetro de depredación p es .325, entonces ambas poblaciones crecen. Estime la tasa de crecimiento a largo plazo y la proporción final entre búhos y ardillas voladoras.
- * 6. Demuestre que si el parámetro de depredación p del ejercicio 5 es .5, entonces a final de cuentas desaparecerán tanto los búhos como las ardillas. Encuentre un valor de p para el cual ambas poblaciones tienden a mantener niveles constantes. En este caso, ¿cuál es la proporción entre las dos poblaciones?
- 7. Sea que A tiene las propiedades descritas en el ejercicio 1.
 - a) ¿El origen es un atractor, un repulsor, o un punto silla del sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$?
 - b) Encuentre las direcciones de mayor atracción y/o repulsión para este sistema dinámico.
 - c) Haga una descripción gráfica del sistema, que indique las direcciones de mayor atracción o repulsión. Incluya un esquema de varias trayectorias típicas (sin calcular puntos específicos).
- 8. Determine la naturaleza del origen (atractor, repulsor o punto silla) para el sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ si A tiene las propiedades descritas en el ejercicio 2. Obtenga las direcciones de mayor atracción o repulsión.

En los ejercicios 9 a 14, clasifique el origen como atractor, repulsor o punto silla del sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$. Encuentre las direcciones de mayor atracción y/o repulsión.

$$9. A = \begin{bmatrix} 1.7 & -.3 \\ -1.2 & .8 \end{bmatrix} \quad 10. A = \begin{bmatrix} .3 & .4 \\ -.3 & 1.1 \end{bmatrix}$$

³ Una de las limitaciones del modelo del ejemplo 1 es que ahí siempre existen vectores $\mathbf{x}_0$ de población inicial con entradas positivas, tales que el coeficiente c_1 es negativo. La aproximación (7) aún es válida, pero las entradas en $\mathbf{x}_k$ finalmente se vuelven negativas.

- 11. $A = \begin{bmatrix} .4 & .5 \\ -.4 & 1.3 \end{bmatrix}$
- 12. $A = \begin{bmatrix} .5 & .6 \\ -.3 & 1.4 \end{bmatrix}$
- 13. $A = \begin{bmatrix} .8 & .3 \\ -.4 & 1.5 \end{bmatrix}$
- 14. $A = \begin{bmatrix} 1.7 & .6 \\ -.4 & .7 \end{bmatrix}$
- 15. Sea $A = \begin{bmatrix} .4 & 0 & .2 \\ .3 & .8 & .3 \\ .3 & .2 & .5 \end{bmatrix}$. El vector $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} .1 \\ .6 \\ .3 \end{bmatrix}$ es un vector propio de A , y dos valores propios son .5 y .2. Construya la solución del sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ que satisface $\mathbf{x}_0 = (0, .3, .7)$. ¿Qué sucede a $\mathbf{x}_k$ conforme $k \rightarrow \infty$?
- 16. [M] Obtenga la solución general del sistema dinámico $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ cuando A es la matriz estocástica para el modelo Rent A Car de Hertz del ejercicio 16 de la sección 4.9.
- 17. Construya un modelo matricial por etapas para una especie animal que tiene dos etapas de vida: juvenil (hasta 1 año de edad) y adulto. Suponga que las hembras adultas cada año dan a luz a un promedio de 1.6 hembras juveniles. Cada año, el 30% de las hembras juveniles sobreviven para convertirse en adultos y el 80% de los adultos sobreviven. Para $k \geq 0$, sea $\mathbf{x}_k = (j_k, a_k)$, donde las entradas en $\mathbf{x}_k$ son los números de hembras juveniles y hembras adultas en el año k .
 - a) Construya la matriz por etapas A tal que $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ para $k \geq 0$.
 - b) Demuestre que la población está creciendo, calcule la tasa de crecimiento final de la población y dé la razón final entre adultos y juveniles.
 - c) [M] Suponga que inicialmente hay 15 hembras juveniles y 10 hembras adultas en la población. Elabore cuatro gráficas que muestren cómo cambia la población durante 8 años: a) el número de juveniles, b) el número de adultas, c) la población total y d) la razón entre adultas y juveniles (cada año). ¿Cuándo parece estabilizarse la razón en d)? Incluya una lista del programa o las instrucciones empleadas para realizar las gráficas en c) y d).
- 18. Una manada de búfalos americanos (bisontes) se podría modelar con una matriz por etapas, similar a la empleada para los búhos manchados. Las hembras se pueden dividir en terneras (hasta 1 año de edad), becerras (de 1 a 2 años) y adultas. Suponga que un promedio de 42 hembras terneras nacen cada año por cada 100 adultas. (Tan solo las adultas tienen descendencia). Cada año sobreviven cerca del 60% de terneras, 75% de becerras y 95% de adultas. Para $k \geq 0$, sea $\mathbf{x}_k = (c_k, y_k, a_k)$, donde las entradas en $\mathbf{x}_k$ son los números de hembras en cada etapa de vida en el año k .
 - a) Construya la matriz por etapas A para la manada de búfalos, tal que $\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k$ para $k \geq 0$.
 - b) [M] Demuestre que la manada de búfalos está creciendo, determine la tasa de crecimiento esperada después de muchos años, y dé los números esperados de terneras y becerras por cada 100 adultas.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. El primer paso consiste en escribir $\mathbf{x}_0$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. La reducción por filas de $[\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \mathbf{x}_0]$ genera los pesos $c_1 = 2$, $c_2 = 1$ y $c_3 = 3$, tal que

$$\mathbf{x}_0 = 2\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3$$

Como los valores propios son 1 , $\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{3}$, la solución general es

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= 2 \cdot 1^k \mathbf{v}_1 + 1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \mathbf{v}_2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \mathbf{v}_3 \\ &= 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{2}{3}\right)^k \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^k \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

2. Conforme $k \rightarrow \infty$, el segundo y tercer términos en (12) tienden al vector cero, y

$$\mathbf{x}_k = 2\mathbf{v}_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^k \mathbf{v}_2 + 3 \left(\frac{1}{3}\right)^k \mathbf{v}_3 \rightarrow 2\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

7.7 APLICACIONES A ECUACIONES DIFERENCIALES

Esta sección describe análogos continuos de las ecuaciones en diferencias estudiadas en la sección 7.6. En muchos problemas aplicados, algunas cantidades varían continuamente en el tiempo, y se relacionan mediante un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ x_2' &= a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

Aquí $x_1, \dots, x_n$ son funciones diferenciables de t , con derivadas $x_1', \dots, x_n'$, y las a_{ij} son constantes. El aspecto esencial de este sistema es que es *lineal*. Para observarlo, escriba el sistema como una ecuación diferencial matricial

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) \quad (1)$$

donde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Una **solución** de la ecuación (1) es una función valuada en vectores que satisface la ecuación (1) para toda t en algún intervalo de números reales, tales como $t \geq 0$.

La ecuación (1) es *lineal* porque la derivación de funciones y la multiplicación de vectores por una matriz son transformaciones lineales. Así, cuando $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son soluciones de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, entonces $c\mathbf{u} + d\mathbf{v}$ también es una solución, porque

$$\begin{aligned} (c\mathbf{u} + d\mathbf{v})' &= c\mathbf{u}' + d\mathbf{v}' \\ &= cA\mathbf{u} + dA\mathbf{v} = A(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) \end{aligned}$$

(A esta propiedad los ingenieros la denominan *superposición* de soluciones). Asimismo, la función idénticamente cero es una solución (trivial) de (1). En la terminología del capítulo 4, el conjunto de todas las soluciones de (1) es un *subespacio* del conjunto de todas las funciones continuas con valores en $\mathbb{R}^n$.

Los libros estándar de ecuaciones diferenciales demuestran que siempre existe el **conjunto fundamental de soluciones** de (1). Si A es $n \times n$, entonces hay n funciones linealmente independientes en un conjunto fundamental, y cada solución de (1) es una combinación lineal única de tales n funciones. Es decir, un conjunto fundamental de soluciones es una *base* para el conjunto de todas las soluciones de (1), y el conjunto solución es un espacio vectorial n -dimensional de funciones. Si se especifica un vector $\mathbf{x}_0$, entonces el **problema con valores iniciales** consiste en construir la función (única) $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Cuando A es una matriz diagonal, las soluciones de (1) se generan mediante cálculo elemental. Por ejemplo, considere

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \quad (2)$$

es decir,

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= 3x_1(t) \\ x_2'(t) &= -5x_2(t) \end{aligned} \quad (3)$$

Se dice que el sistema (2) está *desacoplado* porque cada derivada de una función tan solo depende de la propia función, y no de alguna combinación o “acoplamiento” de $x_1(t)$ y $x_2(t)$. De cálculo, las soluciones de (3) son $x_1(t) = c_1 e^{3t}$ y $x_2(t) = c_2 e^{-5t}$, para las constantes cualesquiera c_1 y c_2 . Cada solución de la ecuación (2) se escribe en la forma

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{-5t} \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-5t}$$

Este ejemplo sugiere que para la ecuación general $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, una solución podría ser una combinación lineal de funciones con la forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v} e^{\lambda t} \quad (4)$$

para algún escalar λ y algún vector fijo $\mathbf{v}$ distinto de cero. [Si $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, la función $\mathbf{x}(t)$ es idénticamente cero y por lo tanto satisface $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$]. Observe que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'(t) &= \lambda \mathbf{v} e^{\lambda t} && \text{Por Cálculo, ya que } \mathbf{v} \text{ es un vector constante} \\ A\mathbf{x}(t) &= A\mathbf{v} e^{\lambda t} && \text{Multiplicando ambos lados de (4) por } A \end{aligned}$$

Como $e^{\lambda t}$ nunca es cero, $\mathbf{x}'(t)$ será igual a $A\mathbf{x}(t)$ si y solo si $\lambda \mathbf{v} = A\mathbf{v}$, es decir, si y solo si λ es un valor propio de A y $\mathbf{v}$ es un vector propio correspondiente. Así, cada par valor propio-vector propio ofrece una solución (4) de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Algunas veces dichas soluciones se conocen como *funciones propias* de la ecuación diferencial. Las funciones propias dan la clave para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales.

EJEMPLO 1 El circuito de la figura 1 se describe con la ecuación diferencial

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(1/R_1 + 1/R_2)/C_1 & 1/(R_2 C_1) \\ 1/(R_2 C_2) & -1/(R_2 C_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son los voltajes en los dos capacitores al tiempo t . Suponga que el resistor R_1 es de 1 ohm, $R_2 = 2$ ohms, capacitor $C_1 = 1$ farad, y $C_2 = .5$ farad; con cargas iniciales de 5 volts en el capacitor C_1 y de 4 volts en C_2 . Encuentre las fórmulas para $x_1(t)$ y $x_2(t)$ que describan cómo los voltajes cambian en el tiempo.

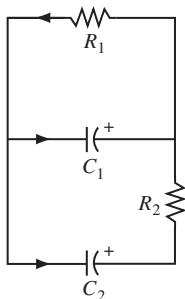


FIGURA 1

SOLUCIÓN Sea que A denote la matriz mostrada arriba y sea $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$. Para los datos dados, $A = \begin{bmatrix} -1.5 & .5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$. Los valores propios de A son $\lambda_1 = -.5$ y $\lambda_2 = -2$, con los vectores propios correspondientes

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ambas funciones propias $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}$ y $\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$ satisfacen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, y lo mismo ocurre con cualquier combinación lineal de $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$. Se hace

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-.5t} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

y observe que $\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$. De manera evidente, puesto que $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son linealmente independientes y por consiguiente generan $\mathbb{R}^2$, c_1 y c_2 se determinan tal que $\mathbf{x}(0)$ sea igual a $\mathbf{x}_0$. En efecto, la ecuación

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\mathbf{v}_1 \quad \quad \mathbf{v}_2 \quad \quad \mathbf{x}_0$

conduce fácilmente a $c_1 = 3$ y $c_2 = -2$. Por lo tanto, la solución deseada de la ecuación diferencial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ es

$$\mathbf{x}(t) = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-.5t} - 2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-2t}$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3e^{-.5t} + 2e^{-2t} \\ 6e^{-.5t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

La figura 2 muestra la gráfica, o *trayectoria*, de $\mathbf{x}(t)$, para $t \geq 0$, junto con trayectorias para algunos otros puntos iniciales. Las trayectorias de las dos funciones propias $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ están en los espacios propios de A .

Las funciones $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ decaen a cero cuando $t \rightarrow \infty$, pero los valores de $\mathbf{x}_2$ decrecen más rápido porque su exponente es más negativo. Las entradas en el vector propio correspondiente $\mathbf{v}_2$ muestran que los voltajes en los capacitores decaerán a cero tan rápido como sea posible, si los voltajes iniciales son iguales en magnitud pero opuestos en signo. ■

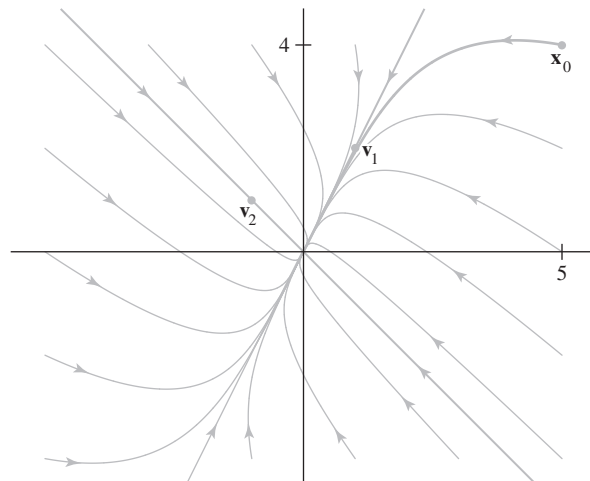


FIGURA 2 El origen como un atractor.

En la figura 2, el origen es un **atractor** o **sumidero** del sistema dinámico porque todas las trayectorias caen al origen. La dirección de mayor atracción está sobre la trayectoria de la función propia $\mathbf{x}_2$ (a lo largo de la recta que pasa por $\mathbf{0}$ y $\mathbf{v}_2$) correspondiente al valor propio más negativo, $\lambda = -2$. Las trayectorias que inician en puntos fuera de esta recta se convierten en asíntotas a la recta que pasa por $\mathbf{0}$ y $\mathbf{v}_1$, ya que sus componentes en la dirección $\mathbf{v}_2$ decaen muy rápidamente.

Si los valores propios del ejemplo 1 fueran positivos en vez de negativos, las trayectorias correspondientes serían similares en forma, aunque las trayectorias estarían *alejándose* del origen. En tal caso, el origen es un **repulsor**, o **fuelle**, del sistema dinámico, y la dirección de mayor repulsión es la recta que contiene la trayectoria de la función propia asociada con el valor propio más positivo.

EJEMPLO 2 Suponga que una partícula se mueve en un campo de fuerza plano y que su vector de posición $\mathbf{x}$ satisface $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ y $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{bmatrix}$$

Resuelva este problema de valor inicial para $t \geq 0$, y bosqueje la trayectoria de la partícula.

SOLUCIÓN Los valores propios de A resultan ser $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = -1$, con los vectores propios correspondientes $\mathbf{v}_1 = (-5, 2)$ y $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$. Para cualesquiera constantes c_1 y c_2 , la función

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} e^{6t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

es una solución de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Se requiere que c_1 y c_2 satisfagan $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, es decir,

$$c_1 \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{bmatrix}$$

Los cálculos demuestran que $c_1 = -3/70$ y $c_2 = 188/70$, y así la función deseada es

$$\mathbf{x}(t) = \frac{-3}{70} \begin{bmatrix} -5 \\ 2 \end{bmatrix} e^{6t} + \frac{188}{70} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t}$$

En la figura 3 se ilustran las trayectorias de $\mathbf{x}$ y otras soluciones. ■

En la figura 3, el origen es un **punto silla** del sistema dinámico porque algunas trayectorias primero se acercan al origen y, después, cambian de dirección y se alejan de él. Un punto silla se presenta cuando la matriz tiene valores propios tanto positivos como negativos. La dirección de mayor repulsión es la recta que pasa por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{0}$, asociada con el valor propio positivo. La dirección de mayor atracción es la recta que pasa por $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{0}$, correspondiente al valor propio negativo.

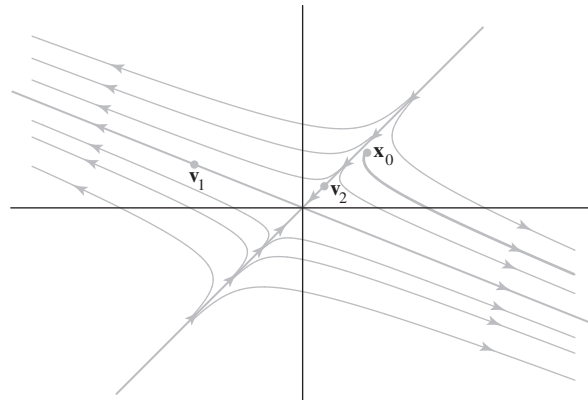


FIGURA 3 El origen como un punto silla.

Desacoplamiento de un sistema dinámico

El siguiente análisis muestra que el método de los ejemplos 1 y 2 produce un conjunto fundamental de soluciones para cualquier sistema dinámico descrito por $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ cuando A es de $n \times n$ y tiene n vectores propios linealmente independientes, es decir, cuando A es diagonalizable. Suponga que las funciones propias para A son

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

con $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ vectores propios linealmente independientes. Sean $P = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n]$ y D la matriz diagonal con entradas $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tal que $A = PDP^{-1}$. Ahora se hace un *cambio de variable*, definiendo una nueva función $\mathbf{y}$ por

$$\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t) \quad \text{o, de manera equivalente,} \quad \mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$$

La ecuación $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ indica que $\mathbf{y}(t)$ es el vector de coordenadas de $\mathbf{x}(t)$ respecto a la base de vectores propios. La sustitución de $P\mathbf{y}$ para $\mathbf{x}$ en la ecuación $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ da

$$\frac{d}{dt}(P\mathbf{y}) = A(P\mathbf{y}) = (PDP^{-1})P\mathbf{y} = PD\mathbf{y} \quad (5)$$

Como P es una matriz constante, el lado izquierdo de (5) es $P\mathbf{y}'$. Ambos lados de (5) se multiplican por la izquierda por P^{-1} y se obtiene $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$, o bien,

$$\begin{bmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \vdots \\ y_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}$$

El cambio de variable de $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$ *desacopló* el sistema de ecuaciones diferenciales, porque la derivada de cada función escalar y_k tan solo depende de y_k . (Revise el cambio de variables análogo de la sección 7.6). Como $y_1' = \lambda_1 y_1$, se tiene que $y_1(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$, con fórmulas similares para $y_2, \dots, y_n$. Así,

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}, \quad \text{donde} \quad \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \mathbf{y}(0) = P^{-1}\mathbf{x}(0) = P^{-1}\mathbf{x}_0$$

Para obtener la solución general $\mathbf{x}$ del sistema original, calcule

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= P\mathbf{y}(t) = [\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_n] \mathbf{y}(t) \\ &= c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_n \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \end{aligned}$$

Este es el desarrollo de funciones propias construidas como en el ejemplo 1.

Valores propios complejos

En el siguiente ejemplo, una matriz real A tiene un par de valores propios complejos λ y $\bar{\lambda}$, con vectores propios complejos asociados $\mathbf{v}$ y $\bar{\mathbf{v}}$. (Recuerde de la sección 7.5 que para una matriz real, los valores propios complejos y sus vectores propios correspondientes se presentan en pares conjugados). Entonces, dos soluciones de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ son

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v} e^{\lambda t} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = \bar{\mathbf{v}} e^{\bar{\lambda} t} \quad (6)$$

Utilizando una representación en serie de potencias de la función exponencial compleja se demuestra que $\mathbf{x}_2(t) = \overline{\mathbf{x}_1(t)}$. No obstante que las funciones propias complejas $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son convenientes para algunos cálculos (sobre todo en ingeniería eléctrica), las funciones

reales son más adecuadas para diversos fines. Afortunadamente, las partes real e imaginaria de $\mathbf{x}_1$ son soluciones (reales) de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, porque son combinaciones lineales de las soluciones de (6):

$$\operatorname{Re}(\mathbf{v}e^{\lambda t}) = \frac{1}{2}[\mathbf{x}_1(t) + \overline{\mathbf{x}_1(t)}], \quad \operatorname{Im}(\mathbf{v}e^{\lambda t}) = \frac{1}{2i}[\mathbf{x}_1(t) - \overline{\mathbf{x}_1(t)}]$$

Para entender la naturaleza de $\operatorname{Re}(\mathbf{v}e^{\lambda t})$, recuerde que en cálculo para cualquier número x , la función exponencial e^x se determina mediante la serie de potencias:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots$$

la cual se utiliza para definir $e^{\lambda t}$ cuando λ es complejo:

$$e^{\lambda t} = 1 + (\lambda t) + \frac{1}{2!}(\lambda t)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(\lambda t)^n + \cdots$$

Escribiendo $\lambda = a + bi$ (con a y b reales), y utilizando series de potencias similares para las funciones coseno y seno, se obtiene que

$$e^{(a+bi)t} = e^{at} \cdot e^{ibt} = e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt) \quad (7)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}e^{\lambda t} &= (\operatorname{Re} \mathbf{v} + i \operatorname{Im} \mathbf{v}) \cdot e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt) \\ &= [(\operatorname{Re} \mathbf{v}) \cos bt - (\operatorname{Im} \mathbf{v}) \operatorname{sen} bt] e^{at} \\ &\quad + i[(\operatorname{Re} \mathbf{v}) \operatorname{sen} bt + (\operatorname{Im} \mathbf{v}) \cos bt] e^{at} \end{aligned}$$

Entonces, dos soluciones reales de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ son

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(t) &= \operatorname{Re} \mathbf{x}_1(t) = [(\operatorname{Re} \mathbf{v}) \cos bt - (\operatorname{Im} \mathbf{v}) \operatorname{sen} bt] e^{at} \\ \mathbf{y}_2(t) &= \operatorname{Im} \mathbf{x}_1(t) = [(\operatorname{Re} \mathbf{v}) \operatorname{sen} bt + (\operatorname{Im} \mathbf{v}) \cos bt] e^{at} \end{aligned}$$

Se puede demostrar que $\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{y}_2$ son funciones linealmente independientes (cuando $b \neq 0$).¹

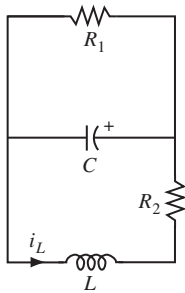


FIGURA 4

EJEMPLO 3 El circuito de la figura 4 se describe con la ecuación

$$\begin{bmatrix} i'_L \\ v'_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_2/L & -1/L \\ 1/C & -1/(R_1 C) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

donde i_L es la corriente que pasa en el inductor L y v_C es la caída de voltaje en el capacitor C . Suponga que $R_1 = 5$ ohms, $R_2 = .8$ ohms, $C = .1$ farad y $L = .4$ henry. Encuentre las fórmulas para i_L y v_C , si la corriente inicial en el inductor es 3 amperes y el voltaje inicial en el capacitor es 3 volts.

SOLUCIÓN Para los datos dados, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -2.5 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. El método analizado en la sección 7.5 produce el valor propio $\lambda = -2 + 5i$ y el vector propio correspondiente $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix}$. Las soluciones complejas de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ son combinaciones lineales complejas de

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-2+5i)t} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} -i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(-2-5i)t}$$

¹ Puesto que $\mathbf{x}_2(t)$ es el complejo conjugado de $\mathbf{x}_1(t)$, las partes real e imaginaria de $\mathbf{x}_2(t)$ son $\mathbf{y}_1(t)$ y $-\mathbf{y}_2(t)$, respectivamente. Entonces, se utiliza ya sea $\mathbf{x}_1(t)$ o $\mathbf{x}_2(t)$, pero no ambas, para producir dos soluciones reales linealmente independientes de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Ahora, utilice la ecuación (7) para escribir

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} i \\ 2 \end{bmatrix} e^{-2t} (\cos 5t + i \sin 5t)$$

Las partes real e imaginaria de $\mathbf{x}_1$ dan soluciones reales:

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{bmatrix} -\sin 5t \\ 2 \cos 5t \end{bmatrix} e^{-2t}, \quad \mathbf{y}_2(t) = \begin{bmatrix} \cos 5t \\ 2 \sin 5t \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Como $\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{y}_2$ son funciones linealmente independientes, forman una base para el espacio vectorial bidimensional real de soluciones de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Así, la solución general es

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} -\sin 5t \\ 2 \cos 5t \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} \cos 5t \\ 2 \sin 5t \end{bmatrix} e^{-2t}$$

Para satisfacer $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, se necesita $c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$, lo que conduce a $c_1 = 1.5$ y $c_2 = 3$. Por lo tanto,

$$\mathbf{x}(t) = 1.5 \begin{bmatrix} -\sin 5t \\ 2 \cos 5t \end{bmatrix} e^{-2t} + 3 \begin{bmatrix} \cos 5t \\ 2 \sin 5t \end{bmatrix} e^{-2t}$$

o bien,

$$\begin{bmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.5 \sin 5t + 3 \cos 5t \\ 3 \cos 5t + 6 \sin 5t \end{bmatrix} e^{-2t}$$

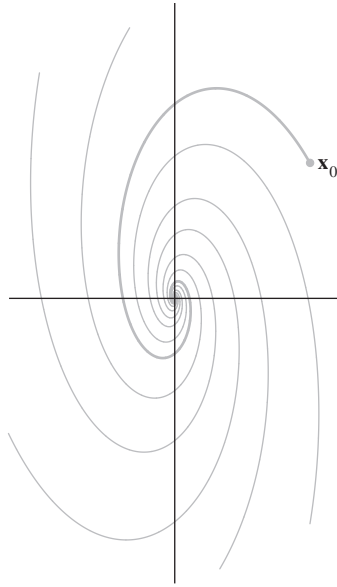


FIGURA 5

El origen como un punto espiral.

Véase la figura 5. ■

En la figura 5, el origen es un **punto espiral** del sistema dinámico. La rotación es causada por las funciones seno y coseno provenientes de un valor propio complejo. Las trayectorias en espiral entran, ya que el factor e^{-2t} tiende a cero. Recuerde que -2 es la parte real del valor propio del ejemplo 3. Cuando A tiene un valor propio complejo con parte real positiva, entonces las trayectorias en espiral son hacia fuera. Si la parte real del valor propio es cero, las trayectorias forman elipses alrededor del origen.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA[‡]

A es una matriz real de 3×3 con valores propios $-.5$, $.2 + .3i$ y $.2 - .3i$, y vectores propios correspondientes

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 + 2i \\ 4i \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 - 2i \\ -4i \\ 2 \end{bmatrix}$$

- 1. ¿ A es diagonalizable como $A = PDP^{-1}$, utilizando matrices complejas?
- 2. Escriba la solución general de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ utilizando funciones propias complejas y, después, encuentre la solución general real.
- 3. Describa las formas de las trayectorias típicas.

7.7 EJERCICIOS[†]

1. Una partícula que se mueve bajo un campo de fuerza plano tiene un vector de posición $\mathbf{x}$ que satisface $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. La matriz A de 2×2 tiene valores propios 4 y 2 , con sus vectores propios aso-

ciados $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Encuentre la posición de la partícula al tiempo t , suponiendo que $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$.

2. Sea A una matriz de 2×2 con valores propios -3 y -1 con vectores propios asociados $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Sea $\mathbf{x}(t)$ la posición de una partícula al tiempo t . Resuelva el problema de valor inicial $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

En los ejercicios 3 a 6, resuelva el problema de valor inicial $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ para $t \geq 0$, con $\mathbf{x}(0) = (3, 2)$. Clasifique la naturaleza del origen como un atractor, repulsor o punto silla del sistema dinámico descrito por $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Encuentre las direcciones de mayor atracción y/o repulsión. Cuando el origen sea un punto silla, dibuje trayectorias típicas.

$$\begin{array}{ll} 3. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} & 4. A = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ 5. A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} & 6. A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

En los ejercicios 7 y 8, haga un cambio de variable que desacople la ecuación $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$. Escriba la ecuación $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ y muestre el cálculo que conduce al sistema desacoplado $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$, especificando P y D .

7. A como en el ejercicio 5. 8. A como en el ejercicio 6.

En los ejercicios 9 a 18, construya la solución general de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ que implique funciones propias complejas y, después, determine la solución general real. Describa las formas de trayectorias típicas.

$$\begin{array}{ll} 9. A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} & 10. A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ 11. A = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} & 12. A = \begin{bmatrix} -7 & 10 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \\ 13. A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} & 14. A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix} \\ 15. [M] A = \begin{bmatrix} -8 & -12 & -6 \\ 2 & 1 & 2 \\ 7 & 12 & 5 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$16. [M] A = \begin{bmatrix} -6 & -11 & 16 \\ 2 & 5 & -4 \\ -4 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

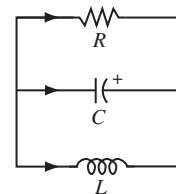
$$17. [M] A = \begin{bmatrix} 30 & 64 & 23 \\ -11 & -23 & -9 \\ 6 & 15 & 4 \end{bmatrix}$$

$$18. [M] A = \begin{bmatrix} 53 & -30 & -2 \\ 90 & -52 & -3 \\ 20 & -10 & 2 \end{bmatrix}$$

19. [M] Encuentre fórmulas para los voltajes v_1 y v_2 (como funciones del tiempo t) en el circuito del ejemplo 1, suponiendo que $R_1 = 1/5$ ohm, $R_2 = 1/3$ ohm, $C_1 = 4$ farads, $C_2 = 3$ farads, y el voltaje inicial en cada capacitor es 4 volts.
20. [M] Obtenga fórmulas para los voltajes v_1 y v_2 en el circuito del ejemplo 1, suponiendo que $R_1 = 1/15$ ohm, $R_2 = 1/3$ ohm, $C_1 = 9$ farads, $C_2 = 2$ farads y el voltaje inicial sobre cada capacitor es 3 volts.
21. [M] Encuentre fórmulas para la corriente i_L y el voltaje v_C para el circuito del ejemplo 3, suponiendo que $R_1 = 1$ ohm, $R_2 = .125$ ohm, $C = .2$ farad, $L = .125$ henry, la corriente inicial es 0 amp y el voltaje inicial es 15 volts.
22. [M] El circuito en la figura se describe por la ecuación

$$\begin{bmatrix} i_L' \\ v_C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1/L \\ -1/C & -1/(RC) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ v_C \end{bmatrix}$$

donde i_L es la corriente en el inductor L y v_C es la caída de voltaje en el capacitor C . Obtenga fórmulas para i_L y v_C cuando $R = .5$ ohm, $C = 2.5$ farads, $L = .5$ henry, la corriente inicial es 0 amp y el voltaje inicial de 12 volts.



SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

- Sí, la matriz de 3×3 es diagonalizable ya que tiene tres valores propios distintos. El teorema 2 de la sección 7.1 y el teorema 5 de la sección 7.3 son válidos cuando se utilizan escalares complejos. (Las pruebas son esencialmente las mismas que para los escalares reales).
- La solución general tiene la forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-.5t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 + 2i \\ 4i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(.2+.3i)t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 - 2i \\ -4i \\ 2 \end{bmatrix} e^{(.2-.3i)t}$$

Aquí los escalares c_1 , c_2 , c_3 pueden ser números complejos cualesquiera. El primer término en $\mathbf{x}(t)$ es real. Es posible obtener dos soluciones reales adicionales utilizando

las partes real e imaginaria del segundo término en $\mathbf{x}(t)$:

$$\begin{bmatrix} 1 + 2i \\ 4i \\ 2 \end{bmatrix} e^{.2t} (\cos .3t + i \operatorname{sen} .3t)$$

La solución general real tiene la siguiente forma, con escalares *reales* c_1, c_2, c_3 :

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-.5t} + c_2 \begin{bmatrix} \cos .3t - 2 \operatorname{sen} .3t \\ -4 \operatorname{sen} .3t \\ 2 \cos .3t \end{bmatrix} e^{.2t} + c_3 \begin{bmatrix} \operatorname{sen} .3t + 2 \cos .3t \\ 4 \cos .3t \\ 2 \operatorname{sen} .3t \end{bmatrix} e^{.2t}$$

3. Cualquier solución con $c_2 = c_3 = 0$ es atraída hacia el origen debido al factor exponencial negativo. Otras soluciones tienen componentes que crecen sin cota, en tanto que las trayectorias son espirales hacia afuera.

Sea cuidadoso para no confundir este problema con el de la sección 7.6. Ahí la condición para atracción hacia $\mathbf{0}$ fue que un valor propio era menor que 1 en magnitud, para que $|\lambda|^k \rightarrow 0$. Aquí la parte real del valor propio debe ser negativa, para que $e^{\lambda t} \rightarrow 0$.

7.8 ESTIMACIONES ITERATIVAS PARA VALORES PROPIOS

En las aplicaciones científicas del álgebra lineal, los valores propios rara vez se conocen con precisión. Por fortuna, una aproximación numérica cercana es bastante satisfactoria. En efecto, algunas aplicaciones tan solo requieren una aproximación burda al valor propio más grande. El primer algoritmo que se describe abajo sirve muy bien para este caso. Además, proporciona un fundamento para un método más poderoso que también aportaría estimaciones rápidas para los valores propios restantes.

El método de potencias

El método de potencias se aplica a una matriz A de $n \times n$, con un **valor propio estrictamente dominante** λ_1 , lo cual significa que λ_1 debe ser, en valor absoluto, mucho más grande que todos los demás valores propios. En tal caso, el método de potencias produce una secuencia escalar que se aproxima a λ_1 y una secuencia vectorial que se aproxima al vector propio correspondiente. El antecedente para el método es la descomposición de vectores propios que se utilizó al inicio de la sección 7.6.

Por sencillez, suponga que A es diagonalizable y que $\mathbb{R}^n$ tiene una base de vectores propios $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$, colocados de manera que los valores propios correspondientes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ disminuyan de tamaño, con el primer valor propio estrictamente dominante. Es decir,

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n| \quad (1)$$

↑
estrictamente mayor

Como se vio en la ecuación (2) de la sección 7.6, si $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ se escribe en la forma $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_n \mathbf{v}_n$, entonces,

$$A^k \mathbf{x} = c_1 (\lambda_1)^k \mathbf{v}_1 + c_2 (\lambda_2)^k \mathbf{v}_2 + \dots + c_n (\lambda_n)^k \mathbf{v}_n \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Suponga que $c_1 \neq 0$. Por lo tanto, dividiendo entre $(\lambda_1)^k$,

$$\frac{1}{(\lambda_1)^k} A^k \mathbf{x} = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^k \mathbf{v}_n \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

De la desigualdad (1), las fracciones $\lambda_2/\lambda_1, \dots, \lambda_n/\lambda_1$ son menores que 1 en magnitud y por ende sus potencias tienden a cero. Así,

$$(\lambda_1)^{-k} A^k \mathbf{x} \rightarrow c_1 \mathbf{v}_1 \quad \text{como } k \rightarrow \infty \quad (3)$$

De manera que para k grande, un escalar múltiplo de $A^k \mathbf{x}$ casi determina la misma *dirección* como el vector propio $c_1 \mathbf{v}_1$. Puesto que un múltiplo escalar positivo no cambia la dirección de un vector, entonces $A^k \mathbf{x}$ casi apunta en la misma dirección que $\mathbf{v}_1$ o $-\mathbf{v}_1$, si $c_1 \neq 0$.

EJEMPLO 1 Sean $A = \begin{bmatrix} 1.8 & .8 \\ .2 & 1.2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -.5 \\ 1 \end{bmatrix}$. Entonces, A tiene los valores propios 2 y 1, y el espacio propio para $\lambda_1 = 2$ es la línea que pasa por $\mathbf{0}$ y $\mathbf{v}_1$. Para $k = 0, \dots, 8$, calcule $A^k \mathbf{x}$ y construya la línea por $\mathbf{0}$ y $A^k \mathbf{x}$. ¿Qué sucede conforme k se incrementa?

SOLUCIÓN Los primeros tres cálculos son

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} 1.8 & .8 \\ .2 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -.1 \\ 1.1 \end{bmatrix} \\ A^2\mathbf{x} &= A(A\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1.8 & .8 \\ .2 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -.1 \\ 1.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .7 \\ 1.3 \end{bmatrix} \\ A^3\mathbf{x} &= A(A^2\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1.8 & .8 \\ .2 & 1.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .7 \\ 1.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.3 \\ 1.7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Cálculos semejantes permiten elaborar la tabla 1.

TABLA 1 Iteración de un vector

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$A^k \mathbf{x}$	$\begin{bmatrix} -.5 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -.1 \\ 1.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .7 \\ 1.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2.3 \\ 1.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11.9 \\ 4.1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 24.7 \\ 7.3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 50.3 \\ 13.7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 101.5 \\ 26.5 \end{bmatrix}$

En la figura 1 se ilustran los vectores $\mathbf{x}, A\mathbf{x}, \dots, A^4\mathbf{x}$. Los otros crecen demasiado y se dificulta dibujarlos. Sin embargo, se han trazado segmentos de recta para mostrar las direcciones de esos vectores. En efecto, las direcciones de los vectores es lo que realmente se desea observar, no los vectores mismos. Las rectas parecen aproximarse a la recta que representa el espacio propio generado por $\mathbf{v}_1$. Más precisamente, el ángulo entre la recta (subespacio) determinada por $A^k \mathbf{x}$ y la recta (espacio propio) definida por $\mathbf{v}_1$ tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$. ■

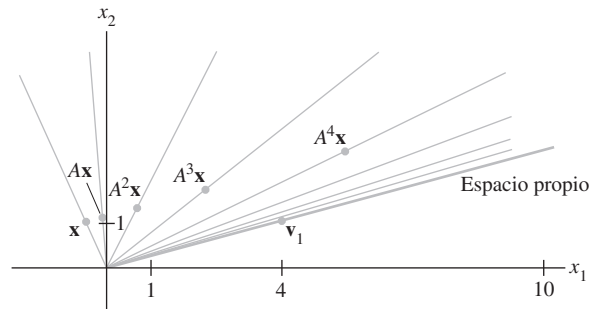


FIGURA 1 Direcciones determinadas por $\mathbf{x}, A\mathbf{x}, A^2\mathbf{x}, \dots, A^7\mathbf{x}$.

Se escalan los vectores $(\lambda_1)^{-k} A^k \mathbf{x}$ en la ecuación (3) para hacerlos converger a $c_1 \mathbf{v}_1$, si $c_1 \neq 0$. No se puede escalar $A^k \mathbf{x}$ en esta forma porque se desconoce λ_1 . Sin embargo, sí es posible escalar cada $A^k \mathbf{x}$ para hacer que su entrada sea 1. Entonces, resulta que la secuencia $\{\mathbf{x}_k\}$ convergerá a un múltiplo de $\mathbf{v}_1$ cuya mayor entrada es 1. La figura 2 muestra la secuen-

cia escalada para el ejemplo 1. El valor propio λ_1 también se estima a partir de la secuencia $\{\mathbf{x}_k\}$. Cuando $\mathbf{x}_k$ se acerca a un vector propio para λ_1 , el vector $A\mathbf{x}_k$ está cerca de $\lambda_1\mathbf{x}_k$, con cada entrada en $A\mathbf{x}_k$ aproximadamente igual a λ_1 veces la entrada correspondiente en $\mathbf{x}_k$. Como la entrada más grande en $\mathbf{x}_k$ es 1, por lo tanto, la mayor entrada en $A\mathbf{x}_k$ es casi λ_1 . (Se omiten pruebas cuidadosas de estos enunciados).

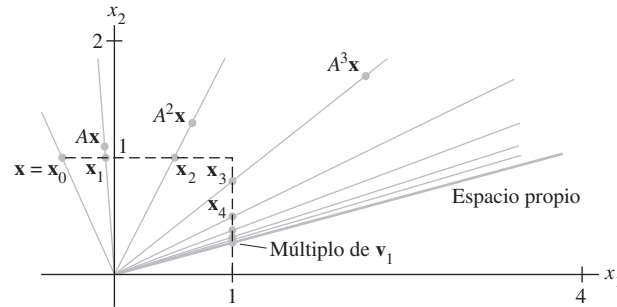


FIGURA 2 Múltiplos escalados de $\mathbf{x}$, $A\mathbf{x}$, $A^2\mathbf{x}, \dots, A^7\mathbf{x}$.

MÉTODO DE POTENCIAS PARA ESTIMAR UN VALOR PROPIO Estrictamente DOMINANTE

1. Seleccione un vector inicial $\mathbf{x}_0$ cuya entrada más grande sea 1.
2. Para $k = 0, 1, \dots$,
 - a) Calcule $A\mathbf{x}_k$.
 - b) Sea μ_k una entrada en $A\mathbf{x}_k$ cuyo valor absoluto es tan grande como sea posible.
 - c) Determine $\mathbf{x}_{k+1} = (1/\mu_k)A\mathbf{x}_k$.
3. Para casi todas las elecciones de $\mathbf{x}_0$, la secuencia $\{\mu_k\}$ se aproxima al valor propio dominante, y la secuencia $\{\mathbf{x}_k\}$ tiende a un vector propio correspondiente.

EJEMPLO 2 Aplique el método de potencias a $A = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ con $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Pare cuando $k = 5$, y estime el valor propio dominante y un vector propio correspondiente de A .

SOLUCIÓN Los cálculos en este ejemplo y en el siguiente fueron realizados con MATLAB, que calcula con 16 dígitos de exactitud, no obstante que aquí tan solo se muestran pocos decimales. Para comenzar, calcule $A\mathbf{x}_0$ e identifique la entrada más grande μ_0 en $A\mathbf{x}_0$:

$$A\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mu_0 = 5$$

Escale $A\mathbf{x}_0$ por $1/\mu_0$ para obtener $\mathbf{x}_1$, calcule $A\mathbf{x}_1$ e identifique la mayor entrada en $A\mathbf{x}_1$:

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{\mu_0} A\mathbf{x}_0 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ .4 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ .4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1.8 \end{bmatrix}, \quad \mu_1 = 8$$

Escale $A\mathbf{x}_1$ por $1/\mu_1$ para obtener $\mathbf{x}_2$, determine $A\mathbf{x}_2$ e identifique la mayor entrada en $A\mathbf{x}_2$:

$$\mathbf{x}_2 = \frac{1}{\mu_1} A\mathbf{x}_1 = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 8 \\ 1.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ .225 \end{bmatrix}$$

$$A\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ .225 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.125 \\ 1.450 \end{bmatrix}, \quad \mu_2 = 7.125$$

Escale $A\mathbf{x}_2$ por $1/\mu_2$ para obtener $\mathbf{x}_3$, y así sucesivamente. Los resultados de los cálculos con MATLAB para las primeras cinco iteraciones se dan en la tabla 2.

TABLA 2 Método de potencias para el ejemplo 2

k	0	1	2	3	4	5
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ .4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ .225 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ .2035 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ .2005 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ .20007 \end{bmatrix}$
$A\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 1.8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.125 \\ 1.450 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.0175 \\ 1.4070 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.0025 \\ 1.4010 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7.00036 \\ 1.40014 \end{bmatrix}$
μ_k	5	8	7.125	7.0175	7.0025	7.00036

La evidencia de la tabla 2 sugiere significativamente que $\{\mathbf{x}_k\}$ se aproxima a $(1, .2)$ y que $\{\mu_k\}$ se aproxima a 7. Si es así, entonces $(1, .2)$ es un vector propio y 7 es el valor propio dominante. Esto se comprueba fácilmente calculando

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ .2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ .2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1.4 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 1 \\ .2 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

La secuencia $\{\mu_k\}$ del ejemplo 2 tuvo convergencia rápida a $\lambda_1 = 7$ porque el segundo valor propio de A fue mucho más pequeño. (En efecto, $\lambda_2 = 1$). En general, la rapidez de convergencia depende de la razón $|\lambda_2/\lambda_1|$, porque en la ecuación (2) el vector $c_2(\lambda_2/\lambda_1)^k \mathbf{v}_2$ es la principal fuente de error, cuando se utiliza una versión escalada de $A^k \mathbf{x}$ como un estimador de $c_1 \mathbf{v}_1$. (Las otras fracciones λ_j/λ_1 son mucho más pequeñas). Si $|\lambda_2/\lambda_1|$ es cercana a 1, entonces $\{\mu_k\}$ y $\{\mathbf{x}_k\}$ pueden converger muy lentamente y se preferirían otros métodos de aproximación.

Con el método de potencias, hay una leve posibilidad de que el vector inicial elegido $\mathbf{x}$ no tenga componente en la dirección $\mathbf{v}_1$ (cuando $c_1 = 0$). Pero el error de redondeo computacional durante los cálculos de $\mathbf{x}_k$ podría crear un vector con al menos una pequeña componente en la dirección de $\mathbf{v}_1$. Si eso ocurre, entonces $\mathbf{x}_k$ empezará a converger a un múltiplo de $\mathbf{v}_1$.

Método de potencias inverso

Este método brinda una aproximación para *cualquier* valor propio, si se tiene una buena estimación inicial α del valor propio λ . En tal caso, sea $B = (A - \alpha I)^{-1}$ y se le aplica el método de potencias a B . Se puede demostrar que si los valores propios de A son $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, entonces los valores propios de B son

$$\frac{1}{\lambda_1 - \alpha}, \quad \frac{1}{\lambda_2 - \alpha}, \quad \dots, \quad \frac{1}{\lambda_n - \alpha}$$

y los vectores propios correspondientes coinciden con los de A . (Véase los ejercicios 15 y 16).

Suponga, por ejemplo, que α está más cerca de λ_2 que de los otros valores propios de A . Entonces, $1/(\lambda_2 - \alpha)$ será un valor propio estrictamente dominante de B . Si α está realmente cerca de λ_2 , entonces $1/(\lambda_2 - \alpha)$ será *mucho* mayor que los demás valores propios de B , y el método de potencias inverso produce una aproximación rápida a λ_2 para casi todas las elecciones de $\mathbf{x}_0$. El siguiente algoritmo presenta los detalles.

MÉTODO DE POTENCIAS INVERSO PARA ESTIMAR UN VALOR PROPIO λ DE A

1. Seleccione una estimación inicial λ lo suficientemente cerca a λ .
2. Elija un vector inicial $\mathbf{x}_0$ cuya entrada más grande sea 1.
3. Para $k = 0, 1, \dots$,
 - a) Resuelva $(A - \alpha I)\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$ para $\mathbf{y}_k$.
 - b) Sea μ_k una entrada en $\mathbf{y}_k$ cuyo valor absoluto es tan grande como sea posible.
 - c) Calcule $\nu_k = \alpha + (1/\mu_k)$.
 - d) Determine $\mathbf{x}_{k+1} = (1/\mu_k)\mathbf{y}_k$.
4. Para casi todas las elecciones de $\mathbf{x}_0$, la secuencia $\{\nu_k\}$ se aproxima al valor propio λ de A , y la secuencia $\{\mathbf{x}_k\}$ tiende a un vector propio correspondiente.

Observe que B , o bien $(A - \alpha I)^{-1}$, no se encuentra en el algoritmo. En vez de calcular $(A - \alpha I)^{-1}\mathbf{x}_k$ para obtener el siguiente vector en la secuencia, es mucho mejor *resolver* la ecuación $(A - \alpha I)\mathbf{y}_k = \mathbf{x}_k$ para $\mathbf{y}_k$ (y después escalar $\mathbf{y}_k$ para producir $\mathbf{x}_{k+1}$). Como esta ecuación para $\mathbf{y}_k$ se debe resolver para cada k , entonces una factorización LU de $A - \alpha I$ acelerará el proceso.

EJEMPLO 3 En algunas aplicaciones no es poco común necesitar conocer el valor propio más pequeño de una matriz A y tener a mano estimaciones burdas de los valores propios. Suponga que 21, 3.3 y 1.9 son estimaciones para los valores propios de la matriz A que se muestra a continuación. Encuentre el valor propio más pequeño, exacto a seis decimales.

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -8 & -4 \\ -8 & 13 & 4 \\ -4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN Los dos valores propios menores parecen estar cercanos entre sí, de modo que se emplea el método de potencias inverso para $A - 1.9I$. La tabla 3 muestra los resultados de los cálculos obtenidos con MATLAB. Aquí $\mathbf{x}_0$ se eligió arbitrariamente, $\mathbf{y}_k = (A - 1.9I)^{-1}\mathbf{x}_k$, μ_k es la entrada más grande en $\mathbf{y}_k$, $\nu_k = 1.9 + 1/\mu_k$ y $\mathbf{x}_{k+1} = (1/\mu_k)\mathbf{y}_k$. Resulta que la estimación inicial del valor propio fue muy buena y la secuencia de potencias inversa convergió de manera rápida. El valor propio más pequeño es exactamente 2. ■

TABLA 3 Método de potencias inverso

k	0	1	2	3	4
$\mathbf{x}_k$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .5736 \\ .0646 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .5054 \\ .0045 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .5004 \\ .0003 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} .50003 \\ .00002 \\ 1 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_k$	$\begin{bmatrix} 4.45 \\ .50 \\ 7.76 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.0131 \\ .0442 \\ 9.9197 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.0012 \\ .0031 \\ 9.9949 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.0001 \\ .0002 \\ 9.9996 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5.000006 \\ .000015 \\ 9.999975 \end{bmatrix}$
μ_k	7.76	9.9197	9.9949	9.9996	9.999975
ν_k	2.03	2.0008	2.00005	2.000004	2.0000002

Si no se dispone de una estimación para el valor propio más pequeño de una matriz, se puede simplemente tomar $\alpha = 0$ en el método de potencias inverso. Esta elección de α funciona razonablemente bien, cuando el valor propio más pequeño está mucho más cerca de cero que los demás valores propios.

Los dos algoritmos presentados en esta sección son herramientas prácticas para muchas situaciones simples, y brindan una introducción al problema de la estimación de valores propios. Un método iterativo más robusto y ampliamente utilizado es el algoritmo QR. Por ejemplo, este es el corazón del comando `eig(A)` de MATLAB, que rápidamente calcula valores propios y vectores propios de A . En los ejercicios de la sección 7.2 se presenta una breve descripción del algoritmo QR. En casi todos los libros modernos de análisis numérico se presentan más detalles.

PROBLEMA DE PRÁCTICA[‡]

- 1. ¿Cómo se podría decidir si un vector $\mathbf{x}$ dado es una buena aproximación a un vector propio de una matriz A ? Si lo es, ¿cómo se estimaría el valor propio correspondiente? Experimente con

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 8 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -4.3 \\ 8.1 \end{bmatrix}$$

7.8 EJERCICIOS[†]

En los ejercicios 1 a 4, la matriz A va seguida por una secuencia $\{\mathbf{x}_k\}$ generada por el método de potencias. Utilice esos datos para estimar el mayor valor propio de A , y dé un vector propio correspondiente.

1. $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$;
 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ .25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ .3158 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ .3298 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ .3326 \end{bmatrix}$
2. $A = \begin{bmatrix} 1.8 & -.8 \\ -3.2 & 4.2 \end{bmatrix}$;
 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -.5625 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -.3021 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -.2601 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -.2520 \\ 1 \end{bmatrix}$
3. $A = \begin{bmatrix} .5 & .2 \\ .4 & .7 \end{bmatrix}$;
 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ .8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} .6875 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} .5577 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} .5188 \\ 1 \end{bmatrix}$
4. $A = \begin{bmatrix} 4.1 & -6 \\ 3 & -4.4 \end{bmatrix}$;
 $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ .7368 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ .7541 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ .7490 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ .7502 \end{bmatrix}$
5. Sea $A = \begin{bmatrix} 15 & 16 \\ -20 & -21 \end{bmatrix}$. Los vectores $\mathbf{x}, \dots, A^5\mathbf{x}$ son $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$,
 $\begin{bmatrix} 31 \\ -41 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -191 \\ 241 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 991 \\ -1241 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4991 \\ 6241 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 24991 \\ -31241 \end{bmatrix}$.

Encuentre un vector con un 1 en la segunda entrada que sea cercano a un vector propio de A . Use cuatro lugares decimales. Compruebe su respuesta y dé una estimación para el valor propio dominante de A .

6. Sea $A = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$. Repita el ejercicio 5, utilizando la siguiente secuencia $\mathbf{x}, A\mathbf{x}, \dots, A^5\mathbf{x}$.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -5 \\ 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -29 \\ 61 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -125 \\ 253 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -509 \\ 1021 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2045 \\ 4093 \end{bmatrix}$$

[M] Los ejercicios 7 a 12 requieren MATLAB u otra herramienta computacional. En los ejercicios 7 y 8, utilice el método de potencias con $\mathbf{x}_0$ dado. Liste $\{\mathbf{x}_k\}$ y $\{\mu_k\}$ para $k = 1, \dots, 5$. En los ejercicios 9 y 10, indique μ_5 y μ_6 .

7. $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
8. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
9. $A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 12 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Otra estimación se puede realizar para un valor propio cuando está disponible un vector propio aproximado. Observe que si $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, entonces $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \mathbf{x}^T (\lambda\mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}^T \mathbf{x})$, y el **cociente de Rayleigh**

$$R(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T A \mathbf{x}}{\mathbf{x}^T \mathbf{x}}$$

es igual a λ . Si $\mathbf{x}$ es cercano a un vector propio para λ , entonces este cociente es cercano a λ . Cuando A es una matriz simétrica ($A^T = A$), el cociente de Rayleigh $R(\mathbf{x}_k) = (\mathbf{x}_k^T A \mathbf{x}_k) / (\mathbf{x}_k^T \mathbf{x}_k)$ tendrá aproximadamente el doble de dígitos de exactitud que el factor de escalamiento μ_k en el método de potencias. En los ejercicios 11 y 12 compruebe el aumento de precisión mediante el cálculo de μ_k y $R(\mathbf{x}_k)$ para $k = 1, \dots, 4$.

$$11. A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$12. A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Los ejercicios 13 y 14 se aplican a una matriz A de 3×3 cuyos valores propios se estiman como 4, -4 y 3.

- *13. Si se conoce que los valores propios cercanos a 4 y -4 tienen diferentes valores absolutos, ¿funcionará el método de potencias? ¿El método continúa siendo útil?
- *14. Suponga que se conoce que los valores propios cercanos a 4 y -4 tienen exactamente el mismo valor absoluto. Describa cómo se podría obtener una secuencia que estime el valor propio cercano a 4.
15. Suponga que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ con $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Sean α un escalar distinto de los valores propios de A , y $B = (A - \alpha I)^{-1}$. Reste $\alpha\mathbf{x}$ en ambos miembros de la ecuación $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$, y utilice álgebra para demostrar que $1/(\lambda - \alpha)$ es un valor propio de B , con $\mathbf{x}$ como un vector propio correspondiente.
16. Suponga que μ es un valor propio de B en el ejercicio 15, y que $\mathbf{x}$ es un vector propio correspondiente, de manera que $(A - \alpha I)^{-1}\mathbf{x} = \mu\mathbf{x}$. Utilice esta ecuación para encontrar un valor propio de A en términos de μ y α . [Nota: $\mu \neq 0$ porque B es invertible].
17. [M] Utilice el método de potencias inverso para estimar el valor propio intermedio de la A del ejemplo 3, con una exactitud a cuatro lugares decimales. Haga $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)$.

18. [M] Sea A como en el ejercicio 9. Aplique el método de potencias inverso con $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0)$ para estimar el valor propio de A cercano a $\alpha = -1.4$, con una exactitud a cuatro decimales.

[M] En los ejercicios 19 y 20, determine: a) el valor propio más grande y b) el valor propio más cercano a cero. En cada caso, $\mathbf{x}_0 = (1, 0, 0, 0)$ y realice las aproximaciones hasta que la secuencia de acercamiento parezca exacta con cuatro decimales. Incluya el vector propio aproximado.

$$19. A = \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$20. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 12 & 13 & 11 \\ -2 & 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

- *21. Un error común es que si A tiene un valor propio estrictamente dominante, entonces, para cualquier k suficientemente grande, el vector $A^k\mathbf{x}$ es aproximadamente igual a un vector propio de A . Para las tres matrices que se muestran a continuación, estudie qué sucede a $A^k\mathbf{x}$ cuando $\mathbf{x} = (.5, .5)$, e intente obtener conclusiones generales (para una matriz de 2×2).

$$a) A = \begin{bmatrix} .8 & 0 \\ 0 & .2 \end{bmatrix} \quad b) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & .8 \end{bmatrix}$$

$$c) A = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE PRÁCTICA

Para A y $\mathbf{x}$ dados,

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 \\ 8 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.00 \\ -4.30 \\ 8.10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.00 \\ -13.00 \\ 24.50 \end{bmatrix}$$

Si $A\mathbf{x}$ es cercanamente un múltiplo de $\mathbf{x}$, entonces las razones de las entradas correspondientes en los dos vectores deberían ser casi constantes. Entonces, calcule:

$$\begin{array}{ccc} \{\text{entrada en } A\mathbf{x}\} & \div & \{\text{entrada en } \mathbf{x}\} = \{\text{razón}\} \\ 3.00 & & 1.00 & 3.000 \\ -13.00 & & -4.30 & 3.023 \\ 24.50 & & 8.10 & 3.025 \end{array}$$

Cada entrada en $A\mathbf{x}$ es alrededor de tres veces la entrada correspondiente en $\mathbf{x}$, de manera que $\mathbf{x}$ es cercano a un vector propio de A . Cualquiera de las razones anteriores es una estimación del valor propio. (Con cinco decimales, el valor propio es 3.02409).

WEB

CAPÍTULO 7 EJERCICIOS COMPLEMENTARIOS

En estos ejercicios suplementarios, A y B representan matrices cuadradas de tamaño adecuado.

- Marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique cada respuesta.
 - Si A es invertible y 1 es uno de sus valores propios, entonces 1 también es valor propio de A^{-1} .
 - Si A es equivalente por filas a la matriz identidad I , entonces A es diagonalizable.
 - Si A contiene una fila o una columna de ceros, entonces 0 es un valor propio de A .
 - Cada valor propio de A también lo es de A^2 .
 - Cada vector propio de A también lo es de A^2 .
 - Cada vector propio de una matriz invertible A también lo es de A^{-1} .
 - Los valores propios deben ser escalares diferentes de cero.
 - Los vectores propios deben ser vectores distintos de cero.
 - Dos vectores propios correspondientes al mismo valor propio siempre son linealmente dependientes.
 - Las matrices similares siempre tienen exactamente los mismos valores propios.
 - Las matrices similares siempre tienen exactamente los mismos vectores propios.
 - La suma de dos vectores propios de una matriz A también es vector propio de esta.
 - Los valores propios de una matriz triangular A superior son exactamente las entradas distintas de cero sobre la diagonal de A .
 - Las matrices A y A^T tienen los mismos valores propios, contando sus multiplicidades.
 - Si una matriz A de 5×5 tiene menos de 5 valores propios distintos, entonces A no es diagonalizable.
 - Existe una matriz de 2×2 que no tiene vectores propios en $\mathbb{R}^2$.
 - Si A es diagonalizable, entonces las columnas de A son linealmente independientes.
 - Un vector distinto de cero no puede corresponder a dos valores propios diferentes de A .
 - Una matriz (cuadrada) A es invertible si y solo si existe un sistema de coordenadas donde la transformación $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ esté representada por una matriz diagonal.
 - Si cada vector $\mathbf{e}_j$ en la base estándar para $\mathbb{R}^n$ es un vector propio de A , entonces A es una matriz diagonal.
 - Si A es similar a una matriz diagonalizable B , entonces A también es diagonalizable.
 - Si A y B son matrices de $n \times n$ invertibles, entonces AB es similar a BA .
 - Una matriz de $n \times n$ con n vectores propios linealmente independientes es invertible.
- Si A es una matriz de $n \times n$ diagonalizable, entonces cada vector en $\mathbb{R}^n$ se escribe como una combinación lineal de vectores propios de A .
- Demuestre que si $\mathbf{x}$ es un vector propio de la matriz producto AB y $B\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces $B\mathbf{x}$ es un vector propio de BA .
- Suponga que $\mathbf{x}$ es un vector propio de A correspondiente a un valor propio λ .
 - Pruebe que $\mathbf{x}$ es un vector propio de $5I - A$. ¿Cuál es el valor propio asociado?
 - Demuestre que $\mathbf{x}$ es un vector propio de $5I - 3A + A^2$. ¿Cuál es el valor propio asociado?
- Utilice inducción matemática para demostrar que si λ es un valor propio de una matriz A de $n \times n$, con $\mathbf{x}$ como un vector propio correspondiente, entonces, para cada entero positivo m , λ^m es un valor propio de A^m con $\mathbf{x}$ como un vector propio correspondiente.
- Si $p(t) = c_0 + c_1t + c_2t^2 + \cdots + c_nt^n$, defina $p(A)$ como la matriz formada al reemplazar cada potencia de t en $p(t)$ por la potencia correspondiente de A (con $A^0 = I$). Es decir,

$$p(A) = c_0I + c_1A + c_2A^2 + \cdots + c_nA^n$$
 Demuestre que si λ es un valor propio de A , entonces un valor propio de $p(A)$ es $p(\lambda)$.
- Suponga que $A = PDP^{-1}$, donde P es 2×2 y $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$.
 - Sea $B = 5I - 3A + A^2$. Demuestre que B es diagonalizable encontrando una factorización conveniente de B .
 - Dados $p(t)$ y $p(A)$ como en el ejercicio 5, demuestre que $p(A)$ es diagonalizable.
- Suponga que A es diagonalizable y que $p(t)$ es el polinomio característico de A . Defina $p(A)$ como en el ejercicio 5, y pruebe que $p(A)$ es la matriz cero. Este hecho, el cual es válido para cualquier matriz cuadrada, se conoce como *teorema de Cayley-Hamilton*.
- Sea A una matriz de $n \times n$ diagonalizable. Demuestre que si la multiplicidad de un valor propio λ es n , entonces $A = \lambda I$.
 - Utilice el inciso a) para demostrar que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$
 no es diagonalizable.
- Demuestre que $I - A$ es invertible cuando todos los valores propios de A son menores que 1 en magnitud. [Sugerencia: ¿Qué sería cierto si $I - A$ no fuera invertible?]
- Demuestre que si A es diagonalizable, con todos los valores propios menores que 1 en magnitud, entonces A^k tiende a la matriz cero conforme $k \rightarrow \infty$. [Sugerencia: Considere $A^k\mathbf{x}$ donde $\mathbf{x}$ representa cualquiera de las columnas de I].
- Sean $\mathbf{u}$ un vector propio de A correspondiente a un valor propio λ , y H la recta en $\mathbb{R}^n$ que pasa por $\mathbf{u}$ y por el origen.
 - Explique por qué H es invariante bajo A en el sentido de que $A\mathbf{x}$ está en H siempre que $\mathbf{x}$ esté en H .

b) Sea K el subespacio unidimensional de $\mathbb{R}^n$ que es invariante bajo A . Explique por qué K contiene un vector propio de A .

12. Sea $G = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix}$. Utilice la fórmula (1) para el determinante dado en la sección 7.2 para explicar por qué $\det G = (\det A)(\det B)$. De esto, deduzca que el polinomio característico de G es el producto de los polinomios característicos de A y B .

Utilice el ejercicio 12 para encontrar los valores propios de las matrices en los ejercicios 13 y 14.

13. $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 & -7 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

15. Sea J la matriz de $n \times n$ con todas las entradas igual a 1, y considere $A = (a - b)I + bJ$; es decir,

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{bmatrix}$$

Con los resultados del ejercicio 16 de los ejercicios complementarios del capítulo 3 demuestre que los valores propios de A son $a - b$ y $a + (n - 1)b$. ¿Cuáles son las multiplicidades de esos valores propios?

16. Aplique el resultado del ejercicio 15 para obtener los valores

propios de las matrices $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

y $\begin{bmatrix} 7 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 7 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 7 \end{bmatrix}$.

17. Sea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Recuerde del ejercicio 25 de la sección 7.4 que $\text{tr } A$ (la traza de A) es la suma de las entradas diagonales en A . Demuestre que el polinomio característico de A es

$$\lambda^2 - (\text{tr } A)\lambda + \det A$$

Entonces, demuestre que los valores propios de una matriz A

de 2×2 son reales si y solo si $\det A \leq \left(\frac{\text{tr } A}{2}\right)^2$.

18. Sea $A = \begin{bmatrix} .4 & -.3 \\ .4 & 1.2 \end{bmatrix}$. Explique por qué A^k se aproxima a

$$\begin{bmatrix} -.5 & -.75 \\ 1.0 & 1.50 \end{bmatrix} \text{ cuando } k \rightarrow \infty.$$

Los ejercicios 19 a 23 conciernen al polinomio

$$p(t) = a_0 + a_1t + \cdots + a_{n-1}t^{n-1} + t^n$$

y a una matriz C_p de $n \times n$ llamada **matriz compañera** de p :

$$C_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

19. Escriba la matriz compañera C_p para $p(t) = 6 - 5t + t^2$ y, luego, determine el polinomio característico de C_p .

20. Sea $p(t) = (t - 2)(t - 3)(t - 4) = -24 + 26t - 9t^2 + t^3$. Escriba la matriz compañera para $p(t)$, y utilice las técnicas del capítulo 3 para obtener su polinomio característico.

21. Utilice inducción matemática y pruebe que para $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} \det(C_p - \lambda I) &= (-1)^n (a_0 + a_1\lambda + \cdots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \lambda^n) \\ &= (-1)^n p(\lambda) \end{aligned}$$

[Sugerencia: Desarrolle por cofactores sobre la primera columna, para demostrar que $\det(C_p - \lambda I)$ tiene la forma $(-\lambda)B + (-1)^n a_0$, donde B es cierto polinomio (por la suposición de inducción)].

22. Sean $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + t^3$, y λ un cero de p .

a) Escriba la matriz compañera para p .

b) Explique por qué $\lambda^3 = -a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2$, y demuestre que $(1, \lambda, \lambda^2)$ es un vector propio de la matriz compañera de p .

23. Sea p el polinomio del ejercicio 22, y suponga que la ecuación $p(t) = 0$ tiene las raíces distintas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Sea V la matriz de Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

(La transpuesta de V se consideró en el ejercicio complementario 11 del capítulo 2). Utilice el ejercicio 22 y un teorema de este capítulo para deducir que V es invertible (pero no calcule V^{-1}). Después, explique por qué $V^{-1}C_pV$ es una matriz diagonal.

24. [M] El comando `roots(p)` de MATLAB calcula las raíces de la ecuación polinomial $p(t) = 0$. Lea un manual de MATLAB y, luego, describa la idea básica que sustenta el algoritmo para el comando `roots`.

25. [M] Aplique un programa matricial para diagonalizar

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 14 & 7 & -1 \\ -6 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

si es posible. Utilice el comando de valores propios para construir la matriz diagonal D . Si el programa tiene un comando que genere vectores propios, úselo para crear una matriz invertible P . Después, determine $AP - PD$ y PDP^{-1} . Analice sus resultados.

26. [M] Repita el ejercicio 25 para $A = \begin{bmatrix} -8 & 5 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 1 & -2 \\ 10 & -8 & 6 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

AUTOEVALUACIÓN

1. Sean $A = \begin{bmatrix} -24 & -14 \\ 84 & 46 \end{bmatrix}$ y $\lambda = 4$. Encuentre un vector propio de A correspondiente a λ .

2. Sean $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & 4 \\ 4 & -4 & -7 \end{bmatrix}$ y $\lambda = -3$. Encuentre una base para el espacio propio correspondiente al valor propio λ .

3. Encuentre los valores propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 85 & 16 \\ -440 & -83 \end{bmatrix}$.

4. Encuentre la ecuación característica de la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -7 & 4 & 9 \\ 0 & -5 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

5. El polinomio característico de una matriz de 5×5 es $\lambda^5 - 13\lambda^4 - 9\lambda^3 + 405\lambda^2$. Encuentre todos los valores propios y sus multiplicidades.

6. Si $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ y $D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, encuentre una fórmula para A^k si se sabe que $A = PDP^{-1}$.

7. Diagonalice, si es posible, la matriz $A = \begin{bmatrix} -8 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 8 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. En este caso afirmativo, encuentre una matriz invertible P y una matriz diagonal D tales que $A = PDP^{-1}$.

8. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación entre dos espacios vectoriales. Encuentre la matriz de T relativa a las bases $B = [b_1, b_2]$ y $C = [c_1, c_2, c_3]$ si se sabe que T está definida por $T[b_1] = -5c_1 - 6c_2 + 5c_3$ y $T[b_2] = -5c_1 - 12c_2 + 2c_3$.

9. Encuentre los valores propios y una base de los espacios propios de la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$.

10. Determine si el origen es un atractor, un repulsor o un punto silla del sistema dinámico $x_{k+1} = Ax_k$, donde A es una matriz $A = \begin{bmatrix} 11 & -7 \\ 10.5 & -6.5 \end{bmatrix}$; encuentre la dirección de mayor atracción o repulsión.

11. Si se supone que A es una matriz tal que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 0.5$, $\lambda_3 = 0.4$ son sus valores propios y $v_1 = \begin{bmatrix} -6 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ y $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ son vectores propios, respectivamente, encuentre

la solución general para la ecuación en diferencias $x_{k+1} = Ax_k$ si el vector inicial x_0 es

$$x_0 = \begin{bmatrix} -47 \\ 29 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

12. Resuelva el problema de valores iniciales $x' = Ax$, $x(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 3.2 \end{bmatrix}$, donde $A = \begin{bmatrix} -4 & -3.125 \\ 8 & -4 \end{bmatrix}$.

13. Sea $A = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Usando el método de potencias con el vector $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, encuentre una aproximación del valor propio más grande.