

9

Geometría de espacios vectoriales

COMPETENCIAS POR DESARROLLAR

- 1 Aplicar las propiedades de conjuntos de vectores que pueden considerarse como objetos geométricos (segmentos de recta, polígonos y objetos sólidos) en problemas de gráficas por computadora, programación lineal, etcétera.
- 2 Explicar la aplicación posible de las coordenadas baricéntricas en la coloración, iluminación y sombreado de pequeñas superficies triangulares planas con un programa de gráficos.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

- ◆ Identificar si una combinación lineal de vectores dada es una combinación afín. Dar un punto $\mathbf{p}$ que sea combinación afín de un conjunto de vectores. Expresar $\mathbf{y}$ como una combinación afín de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$. Determinar si un punto $\mathbf{p}$ es combinación afín de un conjunto de vectores.
 - ◆ Proporcionar la envolvente afín de los conjuntos $\{\mathbf{v}_1\}$ y $\{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2\}$. Dados $S = \{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k\}$ y $\mathbf{p}$, determinar si $\mathbf{p}$ está en el espacio generado por S y si está en la envolvente afín de S . Visualizar geoméricamente ejemplos de envolventes afines de conjuntos.
 - ◆ Si el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es la forma $\mathbf{x} = c\mathbf{u} + \mathbf{p}$, encontrar $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ tales que el conjunto solución sea la envolvente afín de $\{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2\}$.
 - ◆ Dados $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k$ y $\mathbf{p}$, expresar $\mathbf{p}$ como una combinación afín de los vectores utilizando la forma homogénea estándar. Determinar si un conjunto $S = \{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k\}$ es afinmente dependiente (con métodos diferentes) y construir una relación de dependencia afín para los puntos. Construir ejemplos de conjuntos que tengan dependencia afín (con uno, dos o tres puntos diferentes de cero). Construir ejemplos de conjuntos en R^2 y R^3 que tengan independencia afín. Proporcionar las coordenadas baricéntricas de un punto en R^2 respecto a un conjunto de tres vectores en R^2 afinmente independientes e interpretarlas geoméricamente. En un plano coordenado, dibujar los tres puntos de un conjunto S afinmente independiente, formar un triángulo con ellos, dibujar varios puntos (unos fuera del triángulo, otros dentro, otros sobre algún lado) y determinar, sin calcular los valores reales, el signo de las coordenadas baricéntricas de cada uno.
 - ◆ Dados los colores de tres vértices de un triángulo en R^3 , encontrar el color interpolado de un punto $\mathbf{p}$.
 - ◆ Determinar si una combinación lineal de la forma $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k$, con $\mathbf{v}_i$ en R^n , es una combinación convexa. Describir o bosquejar la envolvente convexa de un conjunto S de puntos $\mathbf{p}$ en R^2 que satisface ciertas condiciones dadas. Determinar si un conjunto de puntos dados está en la envolvente convexa descrita y si un punto se encuentran en la envolvente convexa de un conjunto $S = \{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k\}$. Determinar, dado un conjunto de puntos y un conjunto $S = \{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k\}$, si los puntos se encuentran en el espacio generado por S , en la envolvente afín de S y en la envolvente convexa de S . Considerar ejemplos en los que la propiedad de ortogonalidad de S permita calcular los pesos de la combinación lineal usando la proyección ortogonal.
 - ◆ Dados un conjunto $S = \{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k\}$ afinmente independiente y las coordenadas baricéntricas de un conjunto de puntos respecto a S , determinar si cada punto está dentro, fuera, sobre la superficie o sobre una arista de la envolvente convexa de S .
 - ◆ Dados $\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k \in R^n$, $\mathbf{p} \in R^n$, $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{p}$ y $d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + \dots + d_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, utilizar el procedimiento de la demostración del teorema de Cartheodory para expresar $\mathbf{p}$ en términos de $k - 1$ de las $\mathbf{v}_i$. Hacerlo de dos formas distintas.
- 3 Entender la naturaleza multidimensional de los problemas de programación lineal para poder modelar y resolver aplicaciones de este tipo en diferentes áreas del conocimiento.
 - 4 Identificar las características de las curvas de Bézier que las hacen fundamentales en programas de diseño asistido por computadora (CAD), simuladores de vuelo, así como en Adobe Illustrator, Macromedia Freehand y lenguajes de programación como Open GL.
 - 5 Analizar la aplicación de las curvas de Bézier para crear y almacenar objetos gráficos y programas de composición tipográfica revisando por ejemplo su uso en PostScript® y TrueType®.

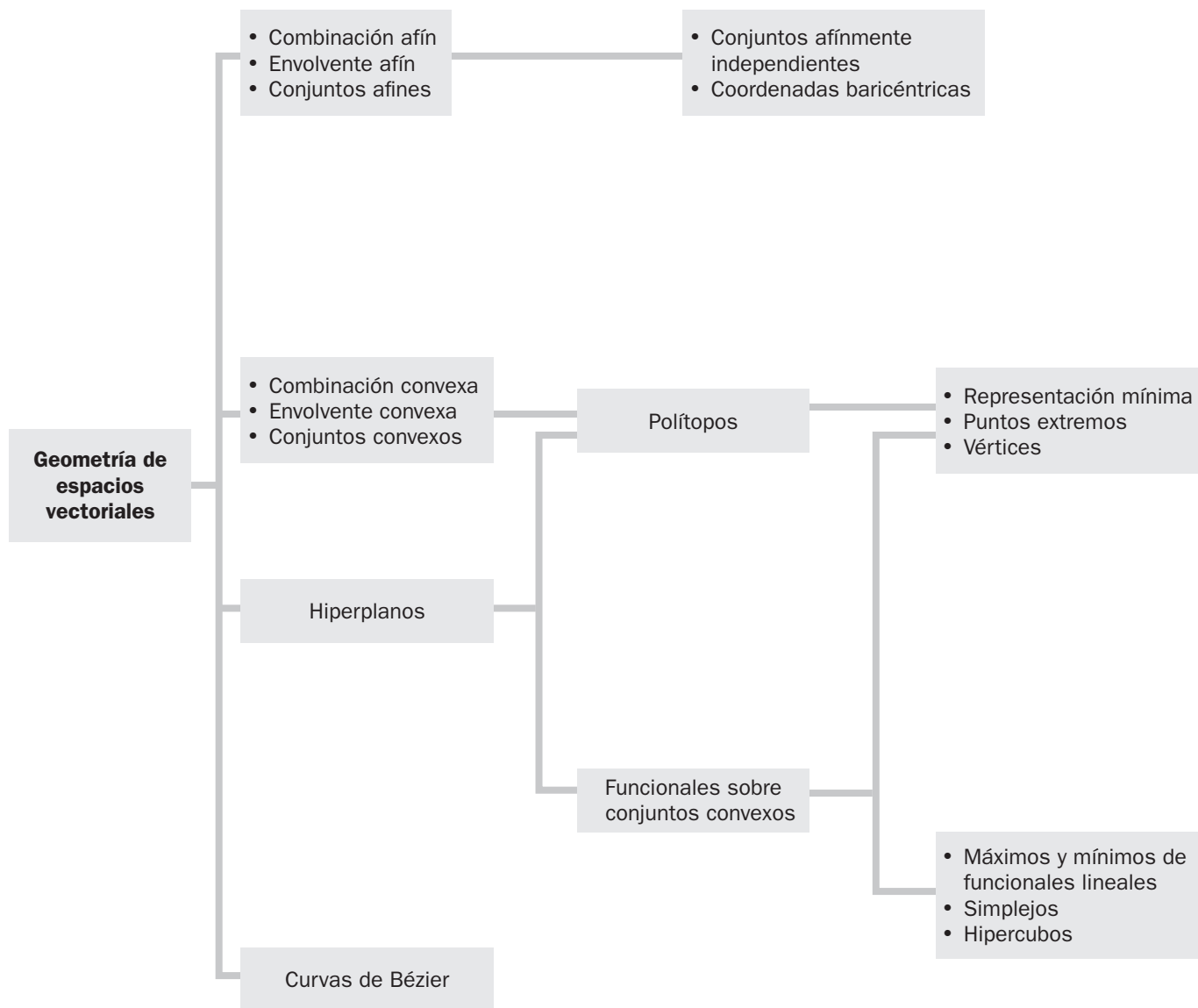


COMPETENCIAS POR DESARROLLAR

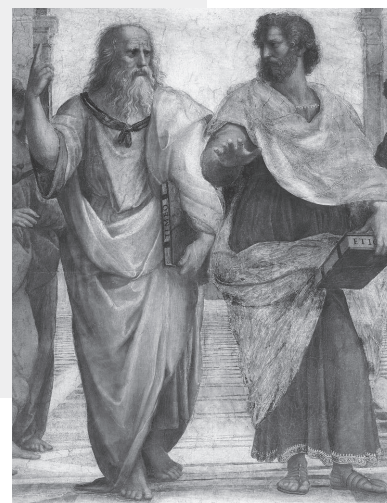
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE

- ◆ Dada una representación implícita de la recta, encontrar una descripción explícita de la recta en forma vectorial paramétrica y recíprocamente.
- ◆ Sea L la recta en R^2 que pasa por los puntos $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$, encontrar una funcional lineal f y un número d tales que $L = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) = d\}$.
- ◆ Analizar gráficamente parejas de rectas de la forma $L_0 = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) = 0\}$ y $L_1 = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) = d\}$ en R^2 .
- ◆ Analizar gráficamente hiperplanos paralelos. Proporcionar una representación explícita del hiperplano $H = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) = d\}$ en R^n , en forma vectorial paramétrica. Dado $H = \{\mathbf{x} | \mathbf{A}\mathbf{x} = b\}$, encontrar una funcional lineal f y un número d tales que $H = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) = d\}$.
- ◆ Determinar si un conjunto es abierto o cerrado; o bien ni abierto ni cerrado; y si un conjunto es compacto o no, y si es convexo o no.
- ◆ Dados tres puntos en R^3 por los que pasa un hiperplano H , determinar un vector normal a él; obtener una funcional lineal f y un número d tales que $H = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) = d\}$.
- ◆ Dado un hiperplano H con vector normal $\mathbf{n}$ y un punto $\mathbf{p}$ en H , determinar qué puntos del conjunto $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ están del mismo lado de H que el origen.
- ◆ Dado un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ en R^2 y un punto $\mathbf{p}$, encontrar la recta que separe estrictamente $\mathbf{p}$ de la envolvente convexa del conjunto.
- ◆ Dados dos conjuntos de puntos A y B y un hiperplano $H = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) = d\}$, determinar si separa a los conjuntos, y si no lo hace, indicar si existe algún hiperplano paralelo a él que los separe. Dados dos conjuntos de puntos A y B y un vector $\mathbf{n}$, encontrar un hiperplano H con vector normal $\mathbf{n}$ que separe a los conjuntos. Determinar si existe un hiperplano paralelo a H que los separe estrictamente.
- ◆ Analizar gráficamente las intersecciones de un cubo con distintos planos que no lo cortan para determinar la dimensión de los conjuntos que corresponden a una cara, una arista y un vértice.
- ◆ Dada una envolvente convexa de $S = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ en R^2 y una función lineal f , obtener el máximo (mínimo) de la función y los puntos donde lo alcanza. Graficar los puntos, la envolvente convexa y el conjunto de puntos donde la función alcanza el máximo (mínimo).
- ◆ Si P es un polígono en R^2 que satisface $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, encontrar la representación mínima de P . Hacerlo con un proceso geométrico y con uno algebraico. Construir un simplejo 3-dimensional, dibujar los que se van obteniendo. Determinar el número de k -caras de un simplejo de n dimensiones S^n para $k = 0, 1, \dots, n - 1$ y verificar que la representación satisfaga la fórmula de Euler.
- ◆ Describir en forma paramétrica estándar algunas curvas de Bézier en R^2, R^3 y R^4 . Enunciar sus propiedades fundamentales con respecto a las transformaciones lineales y la envolvente de un conjunto de puntos e identificar sus ventajas respecto a los splines cúbicos naturales. Calcular el vector tangente $\mathbf{w}'(t)$ de la curva cuadrática (cúbica) de Bézier $\mathbf{w}(t)$, determinar cómo $\mathbf{w}'(0)$ y $\mathbf{w}'(1)$ están relacionados con los puntos de control y realizar una descripción geométrica de las direcciones de esos vectores tangentes. Explorar qué ocurre si $\mathbf{w}'(0) = \mathbf{w}'(1) = \mathbf{0}$. Indicar las restricciones algebraicas que se deben imponer sobre los puntos de control $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ y $\{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ de dos curvas cuadráticas (dos curvas cúbicas) de Bézier $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ que se unen en $\mathbf{p}_2 = \mathbf{x}(1) = \mathbf{y}(0)$ para que tengan continuidad geométrica G^0 ; continuidad geométrica G^1 o continuidad paramétrica C^1 (o continuidad paramétrica C^2). Construir la matriz base de Bézier para una curva de Bézier $\mathbf{x}(t)$. Escribir una curva de Bézier $\mathbf{x}(t)$ como un producto de la matriz de geometría G , la matriz base de Bézier y un vector columna de potencias de t , $\mathbf{u}(t)$. Para una curva cuadrática de Bézier $\mathbf{w}(t)$, con puntos de control $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$, encontrar los puntos de control $\{\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3\}$ para una curva cúbica de Bézier $\mathbf{x}(t)$ tal que $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{w}(t)$ tengan los mismos puntos inicial y final y los mismos vectores tangentes en $t = 0$ y $t = 1$. Verificar además que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{w}(t)$ para $0 \leq t \leq 1$.
- ◆ Utilizar algún paquete de cómputo que permita dibujar un conjunto de puntos de control y la curva de Bézier correspondiente.

ORGANIZADOR GRÁFICO



Los sólidos platónicos



En la ciudad de Atenas, en el año 387 a. C., el filósofo griego Platón fundó una Academia, a la que muchos consideran como la primera universidad en el mundo. Aunque ahí se estudiaban ciencias como astronomía, biología, teoría política y filosofía, el tema fundamental de estudio fue la geometría. En efecto, a la entrada de la Academia se leía la inscripción: *No entre aquí quien no sepa geometría*.

Los griegos quedaron muy impresionados por los patrones geométricos, como los sólidos regulares. Un poliedro se llama regular si sus caras son polígonos regulares congruentes y todos los ángulos en los vértices son iguales. Cerca de 150 años antes de Euclides, los pitagóricos conocían al menos tres sólidos regulares: el tetraedro (4 caras triangulares), el cubo (6 caras cuadradas) y el octaedro (8 caras triangulares). (Véase la figura 1). Esas formas se presentan de manera natural en cristales de minerales comunes. Solo existen cinco de estos sólidos regulares; a los ya mencionados hay que añadir el dodecaedro (12 caras pentagonales) y el icosaedro (20 caras triangulares).

En el Libro XIII de sus *Elementos*, Platón analizó la teoría básica de esos cinco sólidos, y desde entonces se les conoce con el nombre de sólidos platónicos.

Durante siglos no hubo necesidad de considerar objetos geométricos de más de tres dimensiones. Pero en la actualidad

es común que los matemáticos trabajen con objetos en espacios vectoriales de cuatro, cinco o incluso cientos de dimensiones. No necesariamente son claras las propiedades geométricas que pudieran atribuirse a esos objetos de grandes dimensiones.

Por ejemplo, ¿qué propiedades tienen las rectas en espacios bidimensionales y los planos en espacios tridimensionales? ¿Cuáles de esas propiedades podrían ser útiles en mayores dimensiones? Las secciones 9.1 y 9.4 presentan algunas respuestas. Los hiperplanos de la sección 9.4 serán importantes para entender la naturaleza multidimensional de los problemas de programación lineal.

¿A que “se parecería” el análogo de un poliedro en más de tres dimensiones? Se obtiene una respuesta parcial con las proyecciones bidimensionales del objeto tetradimensional, creadas de manera análoga a las proyecciones bidimensionales de un objeto tridimensional. La sección 9.5 ilustra esta idea para el “cubo” y el “simplejo” de cuatro dimensiones.

El estudio geométrico en grandes dimensiones no solo aporta nuevas formas de visualizar conceptos algebraicos abstractos, sino que también genera herramientas aplicables en $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, las secciones 9.2 y 9.6 incluyen aplicaciones a gráficos de computadora, y en la sección 9.5 se delinea una demostración (en el ejercicio 21) de que en $\mathbb{R}^3$ solo existen cinco poliedros regulares.

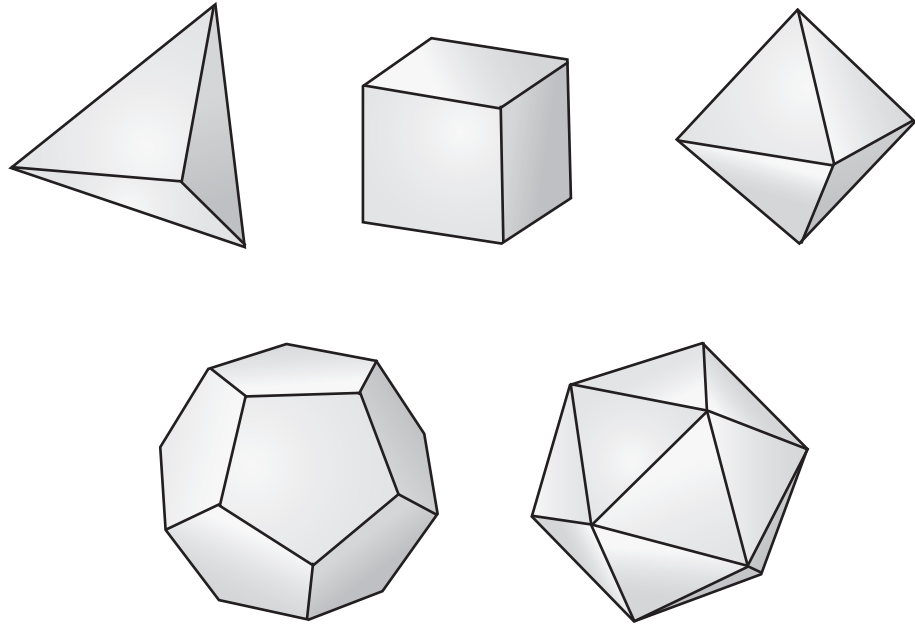


FIGURA 1 Los cinco sólidos platónicos.

En los capítulos anteriores, la mayoría de las aplicaciones implicaron cálculos algebraicos con subespacios y combinaciones lineales de vectores. Este capítulo estudia conjuntos de vectores que se pueden visualizar como objetos geométricos, segmentos de recta, polígonos y objetos sólidos. Los vectores individuales se ven como puntos. Los conceptos que se presentan en este capítulo se emplean en gráficos de computadora, en programación lineal y en otras áreas de matemáticas.¹

A lo largo del capítulo, los conjuntos de vectores se describen mediante combinaciones lineales, pero con diferentes restricciones acerca de los pesos utilizados en dichas combinaciones. Por ejemplo, en la sección 9.1, la suma de los pesos es 1, mientras que en la sección 9.2, los pesos son positivos y suman 1. Desde luego, las visualizaciones son en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, pero los conceptos también se aplican a $\mathbb{R}^n$ y a otros espacios vectoriales.

9.1 COMBINACIONES AFINES

Una combinación afín de vectores es un tipo especial de combinación lineal. Dados los vectores (o “puntos”) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ en $\mathbb{R}^n$ y los escalares $c_1, \dots, c_p$, una **combinación afín** de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ es una combinación lineal

$$c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_p\mathbf{v}_p$$

tal que los pesos satisfacen $c_1 + \cdots + c_p = 1$.

¹ Véase Foley, Van Dam, Feiner y Hughes, *Computer Graphics-Principles and Practice*, 2a. edición (Boston: Addison-Wesley, 1996), pp. 1083-1112. Este material también analiza “espacios afines” sin coordenadas.

DEFINICIÓN

El conjunto de todas las combinaciones afines de puntos en un conjunto S es la **envolvente afín** (o el **afín generado**) de S , y se denota como $\text{aff } S$.

La envolvente afín de un solo punto $\mathbf{v}_1$ es justamente el conjunto $\{\mathbf{v}_1\}$, ya que tiene la forma $c_1\mathbf{v}_1$, donde $c_1 = 1$. Es frecuente que la envolvente afín de dos puntos distintos se escriba de manera especial. Suponga que $\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ con $c_1 + c_2 = 1$. Se escribe t en lugar de c_2 , de manera que $c_1 = 1 - c_2 = 1 - t$. Entonces, la envolvente afín de $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es el conjunto

$$\mathbf{y} = (1 - t)\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2, \quad \text{con } t \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Este conjunto de puntos incluye a $\mathbf{v}_1$ (cuando $t = 0$) y a $\mathbf{v}_2$ (cuando $t = 1$). Si $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, entonces la ecuación (1) nuevamente describe solo un punto. En otras palabras, (1) describe la *recta* que pasa por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Para ver esto, se rescribe (1) en la forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{v}_1 + t(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{p} + t\mathbf{u}, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

donde $\mathbf{p}$ es $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{u}$ es $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. El conjunto de todos los múltiplos de $\mathbf{u}$ es $\text{Gen } \{\mathbf{u}\}$, la recta que pasa por $\mathbf{u}$ y por el origen. El hecho de sumar $\mathbf{p}$ a cada punto sobre esta recta traslada $\text{Gen } \{\mathbf{u}\}$ a la recta que pasa por $\mathbf{p}$ paralela a la recta que pasa por $\mathbf{u}$ y por el origen. Véase la figura 1. (Compare esta figura con la número 5 de la sección 1.5).

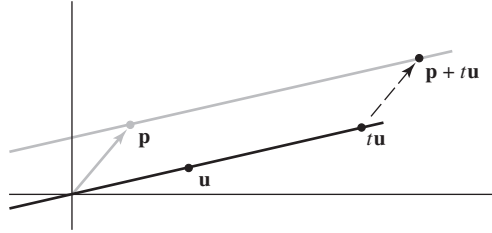


FIGURA 1

La figura 2 utiliza los puntos originales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, y muestra $\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ como la recta que pasa por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

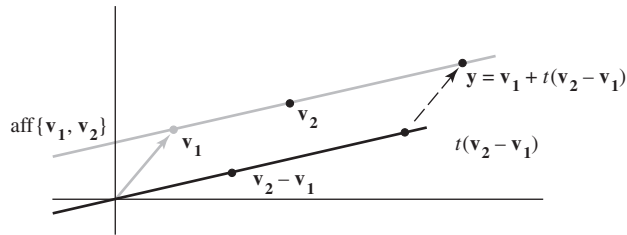


FIGURA 2

Observe que mientras que el punto $\mathbf{y}$ en la figura 2 es una combinación afín de $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, el punto $\mathbf{y} - \mathbf{v}_1$ es igual a $t(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$, que es una combinación lineal (de hecho, un múltiplo) de $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$. Esta relación entre $\mathbf{y}$ y $\mathbf{y} - \mathbf{v}_1$ es válida para cualquier combinación afín de puntos, como lo indica el siguiente teorema.

TEOREMA 1

Un punto $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$ es una combinación afín de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ en $\mathbb{R}^n$ si y solo si $\mathbf{y} - \mathbf{v}_1$ es una combinación lineal de los puntos trasladados $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_1$.

DEMOSTRACIÓN Si $\mathbf{y} - \mathbf{v}_1$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_1$, entonces existen pesos $c_2, \dots, c_p$ tales que

$$\mathbf{y} - \mathbf{v}_1 = c_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \dots + c_p(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_1) \quad (2)$$

Luego,

$$\mathbf{y} = (1 - c_2 - \dots - c_p)\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_p\mathbf{v}_p \quad (3)$$

y los pesos en esta combinación lineal suman 1. Así, $\mathbf{y}$ es una combinación afín de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$. A la inversa, suponga que

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_p\mathbf{v}_p \quad (4)$$

donde $c_1 + \dots + c_p = 1$. Como $c_1 = 1 - c_2 - \dots - c_p$, entonces la ecuación (4) se puede escribir como en la ecuación (3), y esto conduce a (2), lo que demuestra que $\mathbf{y} - \mathbf{v}_1$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_1$. ■

En el enunciado del teorema 1, el punto $\mathbf{v}_1$ se podría remplazar por cualquier otro punto de la lista $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$. En la demostración solo cambiaría la notación.

EJEMPLO 1 Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Si es posible, escriba $\mathbf{y}$ como una combinación afín de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$.

SOLUCIÓN Se calculan los puntos trasladados

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Se encuentran los escalares c_2, c_3 y c_4 tales que

$$c_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + c_3(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) + c_4(\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{y} - \mathbf{v}_1 \quad (5)$$

ahora se reduce por filas la matriz aumentada teniendo estos puntos como columnas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 9 & -10 \end{bmatrix}$$

Esto demuestra que la ecuación (5) es consistente, y la solución general es $c_2 = 3c_4 + 3$, $c_3 = -9c_4 - 10$, con c_4 libre. Cuando $c_4 = 0$,

$$\mathbf{y} - \mathbf{v}_1 = 3(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - 10(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) + 0(\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1)$$

y

$$\mathbf{y} = 8\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - 10\mathbf{v}_3$$

Como otro ejemplo, se toma $c_4 = 1$. Entonces, $c_2 = 6$ y $c_3 = -19$, así que

$$\mathbf{y} - \mathbf{v}_1 = 6(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) - 19(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) + 1(\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1)$$

y

$$\mathbf{y} = 13\mathbf{v}_1 + 6\mathbf{v}_2 - 19\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4 \quad \blacksquare$$

Mientras que el procedimiento del ejemplo 1 funciona para puntos arbitrarios $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ en $\mathbb{R}^n$, la pregunta se puede contestar más directamente si los puntos seleccionados $\mathbf{v}_i$ son una base para $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ dicha base. Entonces cualquier $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$ es una combinación *lineal* única de $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$. Esta combinación es una combinación afín de las $\mathbf{b}$ si y solo si los pesos suman 1. (Estos pesos son justamente las $\mathcal{B}$ -coordenadas de $\mathbf{y}$, como en la sección 4.4).

EJEMPLO 2 Sean $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

El conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$. Determine si los puntos $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ son combinaciones afines de los puntos en $\mathcal{B}$.

SOLUCIÓN Encuentre las $\mathcal{B}$ -coordenadas de $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$. Estos dos cálculos se pueden combinar reduciendo por filas la matriz $[\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \mathbf{b}_3 \ \mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2]$, con dos columnas aumentadas:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Lea la columna 4 para construir $\mathbf{p}_1$, y la columna 5 para construir $\mathbf{p}_2$:

$$\mathbf{p}_1 = -2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + 2\mathbf{b}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_2 = \frac{2}{3}\mathbf{b}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{b}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{b}_3$$

La suma de los pesos en la combinación lineal para $\mathbf{p}_1$ es -1 , no 1 , de manera que $\mathbf{p}_1$ *no* es una combinación afín de las $\mathbf{b}$. Sin embargo, $\mathbf{p}_2$ *es* una combinación afín de las $\mathbf{b}$ porque la suma de los pesos para $\mathbf{p}_2$ es 1 . ■

DEFINICIÓN

Un conjunto S es **afín** si $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$ implica que $(1 - t)\mathbf{p} + t\mathbf{q} \in S$ para todo número real t .

Geométricamente, un conjunto es afín si siempre que dos puntos estén en el conjunto, la recta completa que pasa por esos puntos también está en el conjunto. (Si S solamente contiene un punto, $\mathbf{p}$, entonces la recta pasa por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{p}$ es justamente un punto, una recta “degenerada”). Algebraicamente, para que un conjunto S sea afín, la definición requiere que cada combinación afín de dos puntos de S pertenezca a S . De manera notable, esto es equivalente a pedir que S contenga toda combinación afín de un número arbitrario de puntos de S .

TEOREMA 2

Un conjunto S es afín si y solo si cada combinación afín de puntos de S está en S . Es decir, S es afín si y solo si $S = \text{aff } S$.

DEMOSTRACIÓN Se supone que S es afín y se utiliza inducción sobre el número m de puntos de S que participan en una combinación afín. Cuando m es 1 o 2 , una combinación afín de m puntos de S se encuentra en S , de acuerdo con la definición de conjunto afín. Ahora, se supone que cada combinación afín de k o menos puntos de S conducen a un punto en S , y se considera una combinación de $k + 1$ puntos. Tomemos $\mathbf{v}_i$ en S para $i = 1, \dots, k + 1$, y sea $\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}$, donde $c_1 + \dots + c_{k+1} = 1$. Como las c_i suman 1 , al menos una de ellas no debe ser igual a 1 . Al reindexar las $\mathbf{v}_i$ y las c_i , si es necesario, se puede suponer que $c_{k+1} \neq 1$. Sea $t = c_1 + \dots + c_k$. Entonces $t = 1 - c_{k+1} \neq 0$, y

$$\mathbf{y} = (1 - c_{k+1}) \left(\frac{c_1}{t}\mathbf{v}_1 + \dots + \frac{c_k}{t}\mathbf{v}_k \right) + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} \quad (6)$$

De acuerdo con la hipótesis de inducción, el punto $\mathbf{z} = (c_1/t)\mathbf{v}_1 + \dots + (c_k/t)\mathbf{v}_k$ está en S , ya que los coeficientes suman 1 . De esta forma, (6) presenta a $\mathbf{y}$ como una combinación afín de dos puntos en S , y así $\mathbf{y} \in S$. De acuerdo con el principio de inducción, cada combinación afín de dichos puntos está en S . Es decir, $\text{aff } S \subset S$. Pero la inclusión inversa, $S \subset \text{aff } S$, siempre se aplica. Por lo tanto, cuando S es afín, $S = \text{aff } S$. A la inversa, si $S = \text{aff } S$, entonces las combinaciones afines de dos (o más) puntos de S están en S , por consiguiente, S es afín. ■

La siguiente definición aporta terminología para conjuntos afines que pone de relieve su cercana relación con subespacios de $\mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN

Un traslado de un conjunto S en $\mathbb{R}^n$ por un vector $\mathbf{p}$ es el conjunto $S + \mathbf{p} = \{\mathbf{s} + \mathbf{p} : \mathbf{s} \in S\}$.² Un **plano afín** en $\mathbb{R}^n$ es un traslado de un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Dos planos afines son **paralelos** si uno es el traslado del otro. La **dimensión de un plano** afín es la dimensión del subespacio paralelo correspondiente. La **dimensión de un conjunto** S , escrito como $\dim S$, es la dimensión del plano afín más pequeño que contiene a S . Una **recta** en $\mathbb{R}^n$ es un plano afín de dimensión 1. Un **hiperplano** en $\mathbb{R}^n$ es un plano afín de dimensión $n - 1$.

En $\mathbb{R}^3$, los subespacios propios³ consisten en el origen $\mathbf{0}$, el conjunto de todas las líneas que pasan por $\mathbf{0}$, y el conjunto de todos los planos que pasan por $\mathbf{0}$. Así, los planos afines propios en $\mathbb{R}^3$ son puntos (dimensión cero), rectas (unidimensionales) y planos (bidimensionales), los cuales pueden pasar o no por el origen.

El siguiente teorema indica que esas descripciones geométricas de rectas y planos en $\mathbb{R}^3$ (como traslados de subespacios) en realidad coinciden con sus anteriores descripciones algebraicas como conjuntos de todas las combinaciones afines de dos o tres puntos, respectivamente.

TEOREMA 3

Un conjunto S no vacío es afín si y solo si es un plano afín.

DEMOSTRACIÓN Supongamos que S es afín. Sea $\mathbf{p}$ cualquier punto fijo en S , y $W = S + (-\mathbf{p})$, de manera que $S = W + \mathbf{p}$. Para demostrar que S es un plano afín, es suficiente demostrar que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Puesto que $\mathbf{p}$ está en S , el vector cero está en W . Para demostrar que W es cerrado bajo sumas y múltiplos escalares, basta con probar que si $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ son elementos de W , entonces $\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2$ está en W para cada t real. Como $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ están en W , existen $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ en S tales que $\mathbf{u}_1 = \mathbf{s}_1 - \mathbf{p}$ y $\mathbf{u}_2 = \mathbf{s}_2 - \mathbf{p}$. Así, para cada t real,

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 &= (\mathbf{s}_1 - \mathbf{p}) + t(\mathbf{s}_2 - \mathbf{p}) \\ &= (1 - t)\mathbf{s}_1 + t(\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 - \mathbf{p}) - \mathbf{p}\end{aligned}$$

Sea $\mathbf{y} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 - \mathbf{p}$. Entonces $\mathbf{y}$ es una combinación afín de puntos en S . Como S es afín, $\mathbf{y}$ está en S (de acuerdo con el teorema 2). Pero entonces $(1 - t)\mathbf{s}_1 + t\mathbf{y}$ también está en S . Así, $\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2$ está en $-\mathbf{p} + S = W$. Esto demuestra que W es un subespacio de $\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, S es un plano afín, porque $S = W + \mathbf{p}$.

A la inversa, suponga que S es un plano afín. Es decir, $S = W + \mathbf{p}$ para alguna $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ y algún subespacio W . Para probar que S es afín, es suficiente demostrar que para cualquier par de puntos $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ en S , la recta que pasa por $\mathbf{s}_1$ y $\mathbf{s}_2$ está en S . Por definición de W , existen $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ en W tales que $\mathbf{s}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{p}$ y $\mathbf{s}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{p}$. Así, para cada t real,

$$\begin{aligned}(1 - t)\mathbf{s}_1 + t\mathbf{s}_2 &= (1 - t)(\mathbf{u}_1 + \mathbf{p}) + t(\mathbf{u}_2 + \mathbf{p}) \\ &= (1 - t)\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 + \mathbf{p}\end{aligned}$$

Como W es un subespacio, $(1 - t)\mathbf{u}_1 + t\mathbf{u}_2 \in W$ y así $(1 - t)\mathbf{s}_1 + t\mathbf{s}_2 \in W + \mathbf{p} = S$. Por lo tanto, S es afín. ■

² Si $\mathbf{p} = \mathbf{0}$, entonces el traslado es S mismo. Véase la figura 4 de la sección 1.5.

³ Un subconjunto A de un conjunto B es un subconjunto **propio** de B si $A \neq B$. La misma condición se aplica a subespacios propios y planos afines propios en $\mathbb{R}^n$: no son iguales a $\mathbb{R}^n$.

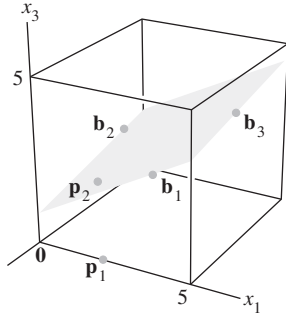


FIGURA 3

El teorema 3 ofrece un enfoque geométrico para la envolvente afín de un conjunto: es el plano afín que consiste en todas las combinaciones afines de puntos en el conjunto. Por ejemplo, la figura 3 muestra los puntos estudiados en el ejemplo 2. Aunque el conjunto de todas las combinaciones *lineales* de $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_3$ es todo de $\mathbb{R}^3$, el conjunto de todas las combinaciones *afines* es solamente el plano a través de $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_3$. Observe que $\mathbf{p}_2$ (del ejemplo 2) está en el plano por $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ y $\mathbf{b}_3$, mientras que $\mathbf{p}_1$ no se encuentra en ese plano. También, véase el ejercicio 14.

El siguiente ejemplo ofrece una mirada renovada a un conjunto familiar: el conjunto de todas soluciones de un sistema $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

EJEMPLO 3 Suponga que las soluciones de una ecuación $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ son todas de la forma

$$\mathbf{x} = x_3 \mathbf{u} + \mathbf{p}, \text{ donde } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}. \text{ De la sección 1.5 recuerde que este con-}$$

junto es paralelo al conjunto solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, que consiste en todos los puntos de la forma $x_3 \mathbf{u}$. Encuentre puntos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ tales que el conjunto solución de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ sea $\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

SOLUCIÓN El conjunto solución es una recta que pasa por $\mathbf{p}$ en la dirección de $\mathbf{u}$, como se muestra en la figura 1. Como $\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es una recta que pasa por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, identifique dos puntos sobre la recta $\mathbf{x} = x_3 \mathbf{u} + \mathbf{p}$. Se presentan dos sencillas elecciones cuando $x_3 = 0$ y $x_3 = 1$. Es decir, tome $\mathbf{v}_1 = \mathbf{p}$ y $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u} + \mathbf{p}$, de forma que

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u} + \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

En este caso, el conjunto solución se describe como el conjunto de todas las combinaciones afines de la forma

$$\mathbf{x} = (1 - x_3) \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Anteriormente, el teorema 1 reveló una importante conexión entre combinaciones afines y combinaciones lineales. El siguiente teorema ofrece otra perspectiva de las combinaciones afines, que para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ está cercanamente relacionada con aplicaciones a gráficos generados por computadora, como se explicará en la siguiente sección (y como se vio en la sección 2.7).

DEFINICIÓN

Para $\mathbf{v}$ en $\mathbb{R}^n$, la **forma homogénea** estándar de $\mathbf{v}$ es el punto $\tilde{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ 1 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$.

TEOREMA 4

Un punto $\mathbf{y}$ en $\mathbb{R}^n$ es una combinación afín de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ en $\mathbb{R}^n$ si y solo si la forma homogénea de $\mathbf{y}$ está en $\text{Gen}\{\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_p\}$. De hecho, $\mathbf{y} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_p \mathbf{v}_p$, con $c_1 + \dots + c_p = 1$, si y solo si $\tilde{\mathbf{y}} = c_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + \dots + c_p \tilde{\mathbf{v}}_p$.

DEMOSTRACIÓN Un punto $\mathbf{y}$ está en $\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ si y solo si existen pesos $c_1, \dots, c_p$ tales que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ 1 \end{bmatrix} + \dots + c_p \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esto ocurre si y solo si $\tilde{\mathbf{y}}$ se encuentra en $\text{Gen}\{\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_p\}$. ■

EJEMPLO 4 Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$. Utilice el teorema

4 para escribir $\mathbf{p}$ como una combinación afín de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, si es posible.

SOLUCIÓN Se reduce por filas la matriz aumentada para la ecuación

$$x_1 \tilde{\mathbf{v}}_1 + x_2 \tilde{\mathbf{v}}_2 + x_3 \tilde{\mathbf{v}}_3 = \tilde{\mathbf{p}}$$

Para simplificar la aritmética, se mueve la cuarta fila de unos hasta arriba (lo que equivale a tres intercambios de filas). Después de esto, el número de operaciones aritméticas aquí es básicamente el mismo que el número que necesita el método del teorema 1.

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{v}}_1 \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 \quad \tilde{\mathbf{v}}_3 \quad \tilde{\mathbf{p}}] &\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &\sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1.5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & .5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema 4, $1.5 \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + .5 \mathbf{v}_3 = \mathbf{p}$. Véase la figura 4, que muestra el plano que contiene a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ y $\mathbf{p}$ (junto con los puntos sobre los ejes coordenados). ■

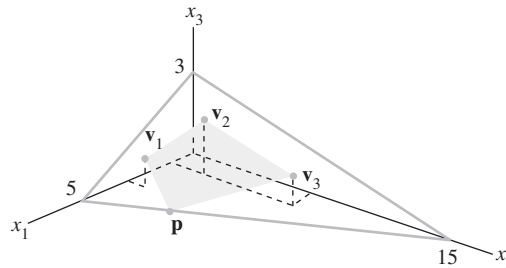


FIGURA 4

PROBLEMA DE PRÁCTICA[‡]

- Dibuje los puntos $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ en un hoja de papel para gráficas, y explique por qué $\mathbf{p}$ debe ser una combinación afín de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Después, encuentre la combinación afín para $\mathbf{p}$. [Sugerencia: Pregúntese cuál es la dimensión de $\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$].

9.1 EJERCICIOS[†]

En los ejercicios 1 a 4, escriba $\mathbf{y}$ como una combinación afín de los otros puntos indicados, si es posible.

1. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 17 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix}$

En los ejercicios 5 y 6, sean $\mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

y $S = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Observe que S es una base ortogonal para $\mathbb{R}^3$. Escriba cada uno de los puntos dados como una combinación afín de los puntos del conjunto S , si es posible. [Sugerencia: Para encontrar los pesos, aplique el teorema 5 de la sección 5.2 en vez de la reducción por filas].

[‡] Se sugiere trabajar los problemas marcados con un punto primero en forma individual y, luego, discutirlos con todo el grupo y el profesor.

[†] Los ejercicios marcados con un asterisco deben trabajarse en colaboración con los compañeros de clase. Se sugiere formar equipos de dos o tres estudiantes.

$$5. \quad \begin{array}{lll} \text{a. } \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix} & \text{b. } \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} & \text{c. } \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -5 \end{bmatrix} \\ \text{6. } \text{a. } \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -19 \\ -5 \end{bmatrix} & \text{b. } \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1.5 \\ -1.3 \\ -0.5 \end{bmatrix} & \text{c. } \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

7. Sean

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -9 \\ 10 \\ 9 \\ -13 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Es posible demostrar que S es linealmente independiente.

- a) ¿Está $\mathbf{p}_1$ en Gen S ? ¿Se encuentra $\mathbf{p}_1$ en aff S ?
 b) ¿Se encuentra $\mathbf{p}_2$ en Gen S ? ¿Está $\mathbf{p}_2$ en aff S ?
 c) ¿Está $\mathbf{p}_3$ en Gen S ? ¿Se encuentra $\mathbf{p}_3$ en aff S ?

8. Repita el ejercicio 7 considerando

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 12 \\ -6 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 15 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -8 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix}$$

9. Suponga que las soluciones de una ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ son todas

$$\text{de la forma } \mathbf{x} = x_3\mathbf{u} + \mathbf{p}, \text{ donde } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Encuentre los puntos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ tales que el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea aff $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

10. Suponga que las soluciones de una ecuación $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ son todas

$$\text{de la forma } \mathbf{x} = x_3\mathbf{u} + \mathbf{p}, \text{ donde } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Obtenga puntos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ tales que el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sea aff $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$.

En los ejercicios 11 y 12, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

*11. a) El conjunto de todas las combinaciones afines de puntos en un conjunto S se denomina envolvente afín de S .

b) Si $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$ es un subconjunto linealmente independiente de $\mathbb{R}^n$ y si $\mathbf{p}$ es una combinación lineal de $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$, entonces $\mathbf{p}$ es una combinación afín de $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$.

c) La envolvente afín de dos puntos distintos se llama recta.

d) Un plano afín es un subespacio.

e) El plano en $\mathbb{R}^3$ es un hiperplano.

*12. a) Si $S = \{\mathbf{x}\}$, entonces aff S es el conjunto vacío.

b) Un conjunto es afín si y solo si contiene su envolvente afín.

c) Un plano afín de dimensión 1 se llama recta.

d) Un plano afín de dimensión 2 se llama hiperplano.

e) Un plano afín que pasa por el origen es un subespacio.

13. Suponga que $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$. Demuestre que Gen $\{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1\}$ es un plano en $\mathbb{R}^3$. [Sugerencia: Piense qué se puede decir sobre $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ cuando Gen $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ es un plano].

14. Demuestre que si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una base para $\mathbb{R}^3$, entonces aff $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es el plano a través de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.

15. Sea A una matriz de $m \times n$ y, si $\mathbf{b}$ está en $\mathbb{R}^m$, demuestre que el conjunto S de todas las soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ es un subconjunto afín de $\mathbb{R}^n$.

16. Considere que $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$. Demuestre que $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = k\}$ es un subconjunto afín de $\mathbb{R}^n$.

*17. Seleccione un conjunto S de tres puntos tales que aff S sea el plano en $\mathbb{R}^3$ cuya ecuación es $x_3 = 5$. Justifique su trabajo.

*18. Seleccione un conjunto S de cuatro puntos distintos en $\mathbb{R}^3$ tal que aff S sea el plano $2x_1 + x_2 - 3x_3 = 12$. Justifique su trabajo.

19. Sea S un subconjunto afín de $\mathbb{R}^n$, y suponga que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal, y que $f(S)$ denota el conjunto de imágenes $\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\}$. Demuestre que $f(S)$ es un subconjunto afín de $\mathbb{R}^m$.

20. Sean $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, T un subconjunto afín de $\mathbb{R}^m$, y $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \in T\}$. Demuestre que S es un subconjunto afín de $\mathbb{R}^n$.

En los ejercicios 21 a 26, demuestre el enunciado sobre subconjuntos A y B de $\mathbb{R}^n$, o dé el ejemplo requerido en $\mathbb{R}^2$. Una demostración para un ejercicio puede utilizar los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores (así como los teoremas disponibles en el libro).

21. Si $A \subset B$ y B es afín, entonces aff $A \subset B$.

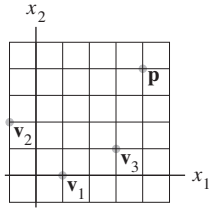
22. Si $A \subset B$, entonces aff $A \subset$ aff B .

*23. $[(\text{aff } A) \cup (\text{aff } B)] \subset \text{aff } (A \cup B)$. [Sugerencia: Para demostrar que $D \cup E \subset F$, demuestre que $D \subset F$ y $E \subset F$].

*24. Encuentre un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ para demostrar que la igualdad no necesariamente es válida en el enunciado del ejercicio 23. [Sugerencia: Considere los conjuntos A y B , cada uno los cuales solamente contiene uno o dos puntos].

*25. aff $(A \cap B) \subset (\text{aff } A \cap \text{aff } B)$

*26. Encuentre un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ para demostrar que la igualdad no necesita ser válida en el enunciado del ejercicio 25.



SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE PRÁCTICA

Como los puntos $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ no son colineales (es decir, no están sobre una recta), $\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ no puede ser unidimensional. Por lo tanto, $\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ debe ser igual a $\mathbb{R}^2$. Para encontrar los pesos reales utilizados para expresar $\mathbf{p}$ como una combinación afín de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, primero calcule

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{p} - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Para escribir $\mathbf{p} - \mathbf{v}_1$ como una combinación lineal de $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$, se reduce por filas la matriz que tiene estos puntos como columnas:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Así, $\mathbf{p} - \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + 2(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)$, lo que muestra que

$$\mathbf{p} = \left(1 - \frac{1}{2} - 2\right)\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 = -\frac{3}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$$

Esto expresa $\mathbf{p}$ como una combinación afín de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, porque los coeficientes suman 1.

Alternativamente, utilice el método del ejemplo 3 y reduzca por filas:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{p} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Esto demuestra que $\mathbf{p} = -\frac{3}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$.

9.2 INDEPENDENCIA AFÍN

En esta sección se continuará explorando la relación entre conceptos lineales y conceptos afines. Primero considere un conjunto de tres vectores en $\mathbb{R}^3$, por ejemplo, $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Si S es linealmente dependiente, entonces uno de los vectores es una combinación lineal de los otros dos vectores. ¿Qué ocurre cuando uno de los vectores es una combinación *afín* de los otros? Por ejemplo, suponga que

$$\mathbf{v}_3 = (1 - t)\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2, \quad \text{para alguna } t \text{ en } \mathbb{R}.$$

Entonces,

$$(1 - t)\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Esta es una relación de dependencia lineal ya que no todos los pesos son cero. Pero hay algo más que es verdad: los pesos en la relación de dependencia suman cero:

$$(1 - t) + t + (-1) = 0$$

Esta es la propiedad adicional necesaria para definir *dependencia afín*.

DEFINICIÓN

Un conjunto indexado de puntos $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ es **afínmente dependiente** si existen números reales $c_1, \dots, c_p$, no todos cero, tales que

$$c_1 + \dots + c_p = 0 \quad \text{y} \quad c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \quad (1)$$

De lo contrario, será **afínmente independiente**.

Una combinación afín es un tipo especial de combinación lineal, y la dependencia afín es un tipo restringido de dependencia lineal. Por lo tanto, cada conjunto afínmente dependiente es, de manera automática, linealmente dependiente.

Un conjunto $\{\mathbf{v}_1\}$ de solo un punto (aun el vector cero) debe ser afínmente independiente porque las propiedades requeridas de los coeficientes c_i no se pueden satisfacer cuando solo existe un coeficiente. Para $\{\mathbf{v}_1\}$, la primera ecuación en (1) es justamente $c_1 = 0$, y al menos un coeficiente (el único) debe ser distinto de cero.

En el ejercicio 13 se le pide demostrar que un conjunto indexado $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es afínmente dependiente si y solo si $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$. El siguiente teorema trata el caso general y muestra cómo el concepto de dependencia afín es análogo al de dependencia lineal. Los incisos *c)* y *d)* brindan métodos útiles para determinar si un conjunto es afínmente dependiente. De la sección 9.1, recuerde que si $\mathbf{v}$ está en $\mathbb{R}^n$, entonces el vector $\tilde{\mathbf{v}}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ denota la forma homogénea de $\mathbf{v}$.

TEOREMA 5

Dado un conjunto indexado $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ en $\mathbb{R}^n$, con $p \geq 2$, los siguientes enunciados son lógicamente equivalentes. Es decir, todos ellos son verdaderos o todos son falsos.

- a) S es afínmente dependiente.
- b) Uno de los puntos en S es una combinación afín de los demás puntos en S .
- c) El conjunto $\{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_1\}$ en $\mathbb{R}^n$ es linealmente dependiente.
- d) El conjunto $\{\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_p\}$ de formas homogéneas en $\mathbb{R}^{n+1}$ es linealmente dependiente.

DEMOSTRACIÓN Suponga que el enunciado *a)* es verdadero, y sea que $c_1, \dots, c_p$ satisfagan (1). Al renombrar los puntos en caso necesario, se puede suponer que $c_1 \neq 0$ y dividir ambas ecuaciones en (1) entre c_1 , de manera que $1 + (c_2/c_1) + \dots + (c_p/c_1) = 0$ y

$$\mathbf{v}_1 = (-c_2/c_1)\mathbf{v}_2 + \dots + (-c_p/c_1)\mathbf{v}_p \quad (2)$$

Observe que los coeficientes en el lado derecho de (2) suman 1. Así, *a)* implica *b)*. Ahora, suponga que *b)* es verdadero. Al renombrar los puntos en caso necesario, se puede suponer que $\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_p\mathbf{v}_p$, donde $c_2 + \dots + c_p = 1$. Entonces,

$$(c_2 + \dots + c_p)\mathbf{v}_1 = c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_p\mathbf{v}_p \quad (3)$$

y

$$c_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \dots + c_p(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \quad (4)$$

No todos los coeficientes $c_2, \dots, c_p$ pueden ser cero porque suman 1. Así, *b)* implica *c)*.

Ahora si *c)* es verdadero, entonces existen pesos $c_2, \dots, c_p$, no todos cero, tales que la ecuación (4) se cumple. Se rescribe (4) como (3) y se establece $c_1 = -(c_2 + \dots + c_p)$. Entonces, $c_1 + \dots + c_p = 0$. Así, (3) muestra que (1) es verdadera. Por lo que *c)* implica *a)*, lo que prueba que *a)*, *b)* y *c)* son lógicamente equivalentes. Por último, *d)* es equivalente a *a)* porque las dos ecuaciones en (1) son equivalentes a la siguiente ecuación que implica las formas homogéneas de los puntos en S :

$$c_1 \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \dots + c_p \begin{bmatrix} \mathbf{v}_p \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

En el enunciado *c)* del teorema 5, $\mathbf{v}_1$ se podría remplazar por cualquiera de los otros puntos en la lista $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$. En la demostración, solo cambiaría la notación. Así, para determinar si un conjunto es afínmente dependiente, se resta un punto en el conjunto de los demás puntos, y se comprueba si el conjunto trasladado de $p - 1$ puntos es linealmente dependiente.

EJEMPLO 1 La envolvente afín de dos distintos puntos $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ es una recta. Si un tercer punto $\mathbf{r}$ está sobre la recta, entonces $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$ es un conjunto afinmente dependiente. Si un punto $\mathbf{s}$ no está sobre la recta que pasa por $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$, entonces esos tres puntos no son colineales y $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{s}\}$ es un conjunto afinmente independiente. Véase la figura 1. ■



FIGURA 1 $\{\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}\}$ es afinmente dependiente.

EJEMPLO 2 Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 6.5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Determine si S es afinmente independiente.

SOLUCIÓN Se calcula $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -0.5 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Esos dos puntos no son múltiplos, así que forman un conjunto linealmente independiente, S' . De manera que son falsos todos los enunciados del teorema 5, y S es afinmente independiente. La figura 2 muestra a S y al conjunto trasladado S' . Observe que $\text{Gen } S'$ es un plano que pasa por el origen y $\text{aff } S$ es un plano paralelo que pasa por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. (Desde luego, aquí solo se muestra una parte de cada plano). ■

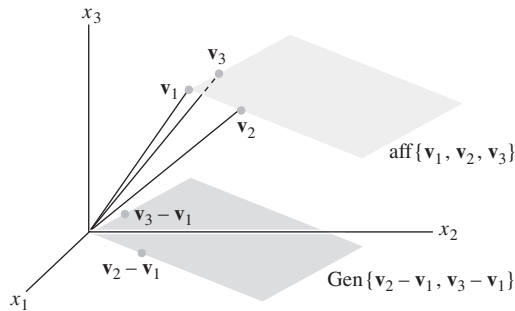


FIGURA 2 Un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ afinmente independiente.

EJEMPLO 3 Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 6.5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 14 \\ 6 \end{bmatrix}$, y $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4\}$. ¿ S es afinmente dependiente?

SOLUCIÓN Se calcula $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -0.5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 11 \\ -1 \end{bmatrix}$, y se reduce por filas la matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 11 \\ -0.5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & -0.5 & -1.5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Recuerde, de la sección 4.6 (o de la sección 2.8) que las columnas son linealmente dependientes porque no toda columna es una columna pivote; así que $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1$

son linealmente dependientes. De acuerdo con el enunciado *c*) del teorema 5, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ es afínmente dependiente. Esta dependencia también se puede establecer empleando el inciso *d*) del teorema 5 en vez del *c*). ■

Los cálculos del ejemplo 3 muestran que $\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1$ es una combinación lineal de $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$, lo que significa que $\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1$ está en $\text{Gen}\{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1\}$. De acuerdo con el teorema 1 de la sección 9.1, $\mathbf{v}_4$ se encuentra en $\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. De hecho, si en el ejemplo 3 se completara la reducción por filas de la matriz se mostraría que

$$\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1 = 2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + 3(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \quad (5)$$

$$\mathbf{v}_4 = -4\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 \quad (6)$$

Véase la figura 3.

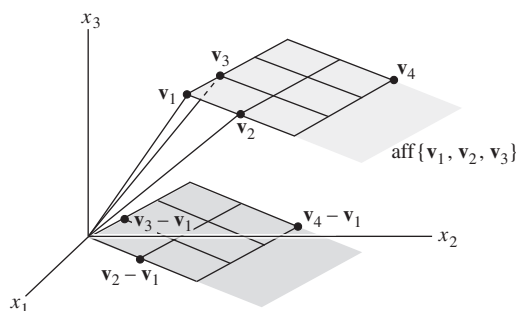


FIGURA 3 $\mathbf{v}_4$ está en el plano $\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

La figura 3 muestra rejillas sobre $\text{Gen}\{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1\}$ y $\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. La rejilla sobre $\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ se basa en la ecuación (5). Otro “sistema de coordenadas” se puede basar en la ecuación (6), en la cual los coeficientes -4 , 2 y 3 son las coordenadas *afines* o *baricéntricas* de $\mathbf{v}_4$.

Coordenadas baricéntricas

La definición de coordenadas baricéntricas depende de la siguiente versión afín del teorema de representación única de la sección 4.4. Para la demostración, véase el ejercicio 17 de esta sección.

TEOREMA 6

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto afínmente independiente en $\mathbb{R}^n$. Entonces, cada $\mathbf{p}$ en $\text{aff } S$ tiene una única representación como una combinación afín de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Es decir, para cada $\mathbf{p}$ existe un único conjunto de escalares $c_1, \dots, c_k$ tales que

$$\mathbf{p} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k \quad \text{y} \quad c_1 + \dots + c_k = 1 \quad (7)$$

DEFINICIÓN

Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ un conjunto afínmente independiente. Así, para cada punto $\mathbf{p}$ en $\text{aff } S$, los coeficientes $c_1, \dots, c_p$ en la representación única (7) de $\mathbf{p}$ son las **coordenadas baricéntricas** (que, en ocasiones, también se conocen como **coordenadas afines**) de $\mathbf{p}$.

Observe que (7) es equivalente a la ecuación

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ 1 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ 1 \end{bmatrix} + \dots + c_k \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ 1 \end{bmatrix} \quad (8)$$

que implica las formas homogéneas de los puntos. La reducción por filas de la matriz aumentada $\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_1 & \dots & \tilde{\mathbf{v}}_k & \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix}$ para (8) produce las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{p}$.

EJEMPLO 4 Sean $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. Encuentre las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{p}$ determinadas por el conjunto afínmente independiente $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

SOLUCIÓN Reduzca por filas la matriz aumentada de puntos en forma homogénea, moviendo la última fila de unos hacia la parte superior para así simplificar la aritmética:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}} & \tilde{\mathbf{b}} & \tilde{\mathbf{c}} & \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 & 5 \\ 7 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & 5 \\ 7 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \\ \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{12} \end{bmatrix}$$

Las coordenadas son $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{5}{12}$ de manera que $\mathbf{p} = \frac{1}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{5}{12}\mathbf{c}$. ■

Las coordenadas baricéntricas tienen interpretaciones físicas y geométricas. Originalmente, A. F. Moebius las definió en 1827 para un punto $\mathbf{p}$ dentro de una región triangular con vértices $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Moebius escribió que las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{p}$ son tres números no negativos $m_{\mathbf{a}}$, $m_{\mathbf{b}}$ y $m_{\mathbf{c}}$ tales que $\mathbf{p}$ es el centro de masa de un sistema que consiste en el triángulo (sin masa) y las masas $m_{\mathbf{a}}$, $m_{\mathbf{b}}$ y $m_{\mathbf{c}}$ en los vértices correspondientes. Las masas están unívocamente determinadas al requerir que su suma sea 1. Este punto de vista es útil en la física actual.¹

La figura 4 da una interpretación geométrica a las coordenadas baricéntricas del ejemplo 4, al mostrar el triángulo Δabc y tres pequeños triángulos Δpbc , Δapc y Δabp . Las áreas de los pequeños triángulos son proporcionales a las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{p}$. En efecto,

$$\begin{aligned} \text{área}(\Delta pbc) &= \frac{1}{4} \cdot \text{área}(\Delta abc) \\ \text{área}(\Delta apc) &= \frac{1}{3} \cdot \text{área}(\Delta abc) \\ \text{área}(\Delta abp) &= \frac{5}{12} \cdot \text{área}(\Delta abc) \end{aligned} \quad (9)$$

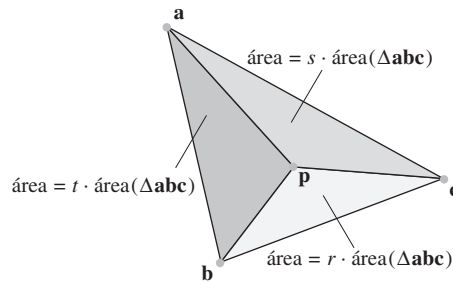


FIGURA 4 $\mathbf{p} = r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$. Aquí, $r = \frac{1}{4}$, $s = \frac{1}{3}$, $t = \frac{5}{12}$.

En los ejercicios 21 a 23 se comprueban las fórmulas de la figura 4. Las igualdades análogas para volúmenes de tetraedros son válidas para el caso en que $\mathbf{p}$ es un punto dentro de un tetraedro en $\mathbb{R}^3$, con vértices en $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$.

¹ Véase el ejercicio 29 de la sección 1.3. En astronomía, sin embargo, el término “coordenadas baricéntricas” por lo general se refiere a las coordenadas ordinarias de puntos en $\mathbb{R}^3$ y que ahora se conoce como *Sistema de referencia celeste internacional*, un sistema de coordenadas cartesianas para el espacio exterior, con el origen en el centro de masa (el baricentro) del Sistema Solar.

Cuando un punto no está dentro del triángulo (o del tetraedro), algunas o todas las coordenadas baricéntricas serán negativas. En la figura 5 se ilustra el caso de un triángulo, para los vértices **a**, **b**, **c**, y los valores coordenados anteriores r , s , t . Por ejemplo, los puntos sobre la recta que pasa por **b** y **c** tienen $r = 0$ porque son combinaciones afines solamente de **b** y **c**. La recta paralela que pasa por **a** identifica los puntos con $r = 1$.

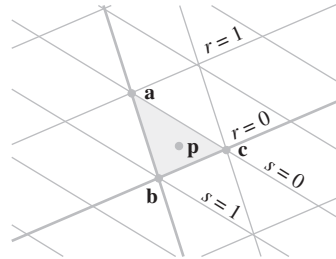


FIGURA 5 Coordenadas baricéntricas para puntos en $\text{aff}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

Coordenadas baricéntricas en gráficos generados por computadora

Cuando un diseñador trabaja con objetos geométricos en un programa de generación de gráficos, puede utilizar una aproximación de “malla de alambre” para un objeto en ciertos puntos clave durante el proceso con la finalidad de crear una imagen final realista.² Por ejemplo, si la superficie de una parte del objeto consiste en pequeñas superficies triangulares planas, entonces el programa de gráficos fácilmente puede agregar color, iluminación y sombreado a cada pequeña superficie cuando solo se conoce esa información en los vértices. Las coordenadas baricéntricas ofrecen la herramienta para interpolar suavemente la información de los vértices hacia el interior de un triángulo. La interpolación en un punto es simplemente la combinación lineal de los valores en los vértices utilizando como pesos las coordenadas baricéntricas.

Con frecuencia, los colores en un monitor de computadora se describen mediante las coordenadas RGB. Una terna (r, g, b) indica la cantidad de cada color (rojo, verde y azul) con parámetros que varían de 0 a 1. Por ejemplo, rojo puro es $(1, 0, 0)$, blanco es $(1, 1, 1)$ y negro es $(0, 0, 0)$.

EJEMPLO 5 Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3.5 \end{bmatrix}$. Los colores en

los vértices $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ de un triángulo son magenta $(1, 0, 1)$, magenta claro $(1, .4, 1)$ y púrpura $(.6, 0, 1)$, respectivamente. Encuentre el color interpolado en **p**. Véase la figura 6.

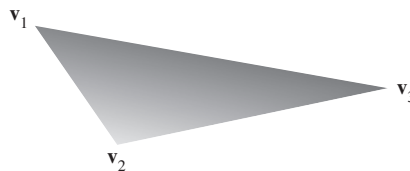


FIGURA 6 Colores interpolados.

² El ejemplo introductorio del capítulo 2 menciona un modelo de alambre para un avión Boeing 777, empleado para visualizar el flujo de aire sobre la superficie de la aeronave.

SOLUCIÓN Primero, determine las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{p}$. Aquí se presenta el cálculo utilizando las formas homogéneas de los puntos; el primer paso consiste en mover la fila 4 a la fila 1:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{v}}_1 & \tilde{\mathbf{v}}_2 & \tilde{\mathbf{v}}_3 & \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 3.5 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .25 \\ 0 & 1 & 0 & .50 \\ 0 & 0 & 1 & .25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, $\mathbf{p} = .25\mathbf{v}_1 + .5\mathbf{v}_2 + .25\mathbf{v}_3$. Utilice las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{p}$ para hacer una combinación lineal de los datos de color. Los valores RGB para $\mathbf{p}$ son

$$.25 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + .50 \begin{bmatrix} 1 \\ .4 \\ 1 \end{bmatrix} + .25 \begin{bmatrix} .6 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .9 \\ .2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{rojo} \\ \text{verde} \\ \text{azul} \end{matrix}$$

■

Uno de los últimos pasos en la preparación de la escena gráfica para mostrarla en el monitor consiste en eliminar las “superficies ocultas” que no deberían ser visibles en la pantalla. Imagine que la pantalla de visualización está formada por un millón de píxeles, y considere un rayo o una “línea de visión” desde el ojo del observador hacia un píxel y la colección de objetos que forman la escena 3D. El color y el resto de la información que se muestra en el píxel sobre el monitor deberían provenir del primer objeto sobre el que incide el rayo. Véase la figura 7. Cuando los objetos en la escena gráfica se aproximan por mallas de alambre con parches triangulares, el problema de la superficie oculta se puede resolver empleando coordenadas baricéntricas.

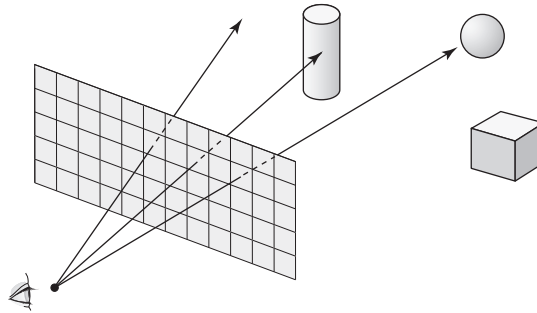


FIGURA 7 Un rayo proveniente del ojo cruza la pantalla hacia el objeto más cercano.

También es posible utilizar matemáticas para encontrar las intersecciones del triángulo de rayos para realizar sombreados extremadamente realistas de objetos. Actualmente, este método de *trazado de rayos* es muy lento para trabajos en tiempo real, pero esto podría cambiar en el futuro gracias a recientes avances en implementaciones de hardware.³

EJEMPLO 6 Sean

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} .7 \\ .4 \\ -3 \end{bmatrix},$$

y $\mathbf{x}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ para $t \geq 0$. Determine el punto donde el rayo $\mathbf{x}(t)$ se interseca con el plano que contiene el triángulo con vértices $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. ¿Este punto se encuentra dentro del triángulo?

³ Véase Joshua Fender y Jonathan Rose, “A High-Speed Ray Tracing Engine Built on a Field-Programmable System”, en *Proc. Int. Conf. on Field-Programmable Technology*, IEEE (2003). (Un solo procesador puede calcular 600 millones de intersecciones de triángulos de rayos por segundo).

SOLUCIÓN El plano es $\text{aff}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Un punto típico en este plano se puede escribir como $(1 - c_2 - c_3)\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ para algunos c_2 y c_3 . (En esta combinación los pesos suman 1). El rayo $\mathbf{x}(t)$ hace intersección con el plano cuando c_2, c_3 y t satisfacen

$$(1 - c_2 - c_3)\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$$

Reacomode esto como $c_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + c_3(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) + t(-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{v}_1$. En forma matricial,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 & -\mathbf{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \\ t \end{bmatrix} = \mathbf{a} - \mathbf{v}_1$$

Para los puntos específicos dados aquí,

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 16 \end{bmatrix}$$

La reducción por filas de la matriz aumentada anterior produce

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & -.7 & -1 \\ 0 & 10 & -.4 & -1 \\ 2 & 4 & 3 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & .3 \\ 0 & 1 & 0 & .1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Así, $c_2 = .3$, $c_3 = .1$ y $t = 5$. Por lo tanto, el punto de intersección es

$$\mathbf{x}(5) = \mathbf{a} + 5\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} .7 \\ .4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 2.0 \\ -5.0 \end{bmatrix}$$

Además,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(5) &= (1 - .3 - .1)\mathbf{v}_1 + .3\mathbf{v}_2 + .1\mathbf{v}_3 \\ &= .6 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \end{bmatrix} + .3 \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} + .1 \begin{bmatrix} 5 \\ 11 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 \\ 2.0 \\ -5.0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

El punto de intersección está dentro del triángulo porque todos los pesos baricéntricos para $\mathbf{x}(5)$ son positivos. ■

PROBLEMAS DE PRÁCTICA[‡]

- 1. Describa un método rápido para determinar cuándo tres puntos son colineales.
- 2. Los puntos $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ forman un conjunto afínmente dependiente. Encuentre los pesos $c_1, \dots, c_4$ que produzcan una **relación de dependencia afín** $c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$, donde $c_1 + \dots + c_4 = 0$, pero no todas las c_i son ceros. [Sugerencia: Véase el final de la demostración del teorema 5].

9.2 EJERCICIOS[†]

En los ejercicios 1 a 6, determine si el conjunto de puntos es afínmente dependiente. (Véase el problema de práctica 2). Si es así, entonces construya una relación de dependencia afín para los puntos.

$$1. \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 2. \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$3. \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 11 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 15 \\ -9 \end{bmatrix}$$

$$4. \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$5. \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$6. \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 7 y 8, encuentre las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{p}$ con respecto al conjunto de puntos afínmente independiente que lo precede.

$$7. \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$8. \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{p} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En los ejercicios 9 y 10, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

- * 9. a) Si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ están en $\mathbb{R}^n$ y si el conjunto $\{\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p - \mathbf{v}_2\}$ es linealmente dependiente, entonces $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ es afínmente dependiente. (Lea esto con sumo cuidado).
 b) Si $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ están en $\mathbb{R}^n$ y si el conjunto de formas homogéneas $\{\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_p\}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ es linealmente independiente, entonces $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ es afínmente dependiente.
 c) Un conjunto finito de puntos $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ es afínmente dependiente si existen números reales $c_1, \dots, c_k$, no todos ceros, tales que $c_1 + \dots + c_k = 1$ y $c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$.
 d) Si $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ es afínmente independiente y si $\mathbf{p}$ en $\mathbb{R}^n$ tiene una coordenada baricéntrica negativa determinada por S , entonces $\mathbf{p}$ no está en $\text{aff } S$.
 e) Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$ están en $\mathbb{R}^3$ y si un rayo $\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ para $t \geq 0$ se interseca con el triángulo de vértices $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, entonces todas las coordenadas baricéntricas del punto de intersección son no negativas.
- *10. a) Si $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto afínmente dependiente, entonces el conjunto $\{\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_p\}$ en $\mathbb{R}^{n+1}$ de formas homogéneas puede ser linealmente independiente.

- b) Si $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ y $\mathbf{v}_4$ están en $\mathbb{R}^3$ y si el conjunto $\{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1\}$ es linealmente independiente, entonces $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_4\}$ es afínmente independiente.
 c) Dado $S = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$, cada $\mathbf{p}$ en $\text{aff } S$ tiene representación única como una combinación afín de $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_k$.
 d) Cuando una información de color se especifica en cada vértice $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ de un triángulo en $\mathbb{R}^3$, entonces el color se puede interpolar en un punto $\mathbf{p}$ en $\text{aff } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ empleando las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{p}$.
 e) Si T es un triángulo en $\mathbb{R}^2$ y si un punto $\mathbf{p}$ está sobre una arista del triángulo, entonces no todas las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{p}$ (para este triángulo) son positivas.

- *11. Explique por qué cualquier conjunto de cinco o más puntos en $\mathbb{R}^3$ debe tener dependencia afín.
 12. Demuestre que un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ en $\mathbb{R}^n$ es afínmente dependiente cuando $p \geq n + 2$.
 13. Utilice sólo la definición de dependencia afín para demostrar que un conjunto indexado $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ en $\mathbb{R}^n$ es afínmente dependiente si y solo si $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.
 *14. Las condiciones para dependencia afín son más estrictas que para dependencia lineal, así que un conjunto afínmente dependiente, de manera automática, es linealmente dependiente. Además, un conjunto linealmente independiente no puede ser afínmente dependiente y, por lo tanto, debe ser afínmente independiente. Construya dos conjuntos indexados linealmente dependientes S_1 y S_2 en $\mathbb{R}^2$ tales que S_1 y S_2 tengan dependencia e independencia afines, respectivamente. En cada caso, el conjunto deberá contener uno, dos o tres puntos diferentes de cero.

- *15. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ y sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
 a) Demuestre que el conjunto S es afínmente independiente.

- b) Encuentre las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p}_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, con respecto a S .

- c) Sea T el triángulo con vértices $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Cuando se extienden los lados de T , las rectas dividen $\mathbb{R}^2$ en siete regiones. Véase la figura 8. Observe los signos de las coordenadas baricéntricas de los puntos en cada región. Por ejemplo, $\mathbf{p}_5$ está dentro del triángulo T y todas sus coordenadas baricéntricas son positivas. El punto $\mathbf{p}_1$ tiene coordenadas $(-, +, +)$. Su tercera coordenada es positiva porque $\mathbf{p}_1$ está sobre el lado $\mathbf{v}_3$ de la recta que pasa por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Su primera coordenada es negativa porque $\mathbf{p}_1$ es opuesto al lado $\mathbf{v}_1$ de la recta que pasa por $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. El punto $\mathbf{p}_2$ está sobre la arista $\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3$ de T . Sus coordenadas son $(0, +, +)$. Sin calcular los valores reales, determine los signos de las coordenadas baricéntricas de los puntos $\mathbf{p}_6$, $\mathbf{p}_7$ y $\mathbf{p}_8$ que se muestran en la figura 8.

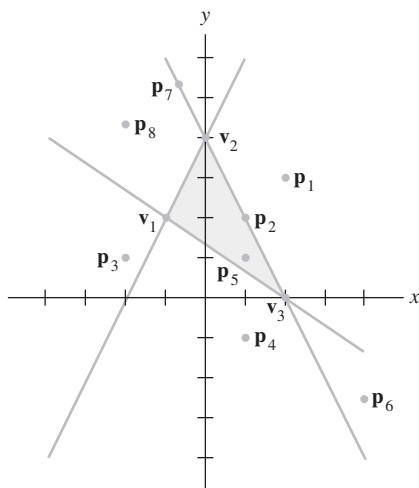


FIGURA 8

- *16. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_7 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
- Demuestre que el conjunto S es afínmente independiente.
 - Encuentre las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$ con respecto a S .
 - En papel milimétrico trace el triángulo T con vértices $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, extienda los lados como en la figura 5, y trace los puntos $\mathbf{p}_4$, $\mathbf{p}_5$, $\mathbf{p}_6$ y $\mathbf{p}_7$. Sin calcular los valores reales, determine los signos de las coordenadas baricéntricas de los puntos $\mathbf{p}_4$, $\mathbf{p}_5$, $\mathbf{p}_6$ y $\mathbf{p}_7$.
17. Demuestre el teorema 6 para un conjunto afínmente independiente $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$. [Sugerencia: Un método es imitar la demostración del teorema 7 de la sección 4.4].
- *18. Sea T un tetraedro en posición “estándar”, con tres aristas a lo largo de los tres ejes coordenados positivos en $\mathbb{R}^3$, y suponga que los vértices son $a\mathbf{e}_1$, $b\mathbf{e}_2$, $c\mathbf{e}_3$ y $\mathbf{0}$, donde $[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_3] = I_3$. Obtenga las fórmulas para las coordenadas baricéntricas de un punto arbitrario $\mathbf{p}$ en $\mathbb{R}^3$.

19. Sean $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^n$ afínmente dependiente y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal. Demuestre que $\{f(\mathbf{p}_1), f(\mathbf{p}_2), f(\mathbf{p}_3)\}$ es afínmente dependiente en $\mathbb{R}^m$.
20. Suponga que $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ es un conjunto afínmente independiente en $\mathbb{R}^n$ y que $\mathbf{q}$ es un punto arbitrario en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que el conjunto trasladado $\{\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}, \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}, \mathbf{p}_3 + \mathbf{q}\}$ también es afínmente independiente.

En los ejercicios 21 a 24, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ son puntos no colineales en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbf{p}$ es cualquier otro punto en $\mathbb{R}^2$. Sea que Δabc denote la región triangular cerrada determinada por $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$, y sea Δpbc la región determinada por $\mathbf{p}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$. Por conveniencia, suponga que $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$ se arreglan de tal forma que $\det[\tilde{\mathbf{a}} \ \tilde{\mathbf{b}} \ \tilde{\mathbf{c}}]$ es positivo, donde $\tilde{\mathbf{a}}$, $\tilde{\mathbf{b}}$ y $\tilde{\mathbf{c}}$ son las formas homogéneas estándar de los puntos.

21. Demuestre que el área de Δabc es $\det[\tilde{\mathbf{a}} \ \tilde{\mathbf{b}} \ \tilde{\mathbf{c}}]/2$. [Sugerencia: Consulte las secciones 3.2 y 3.3, incluyendo los ejercicios].
22. Sea $\mathbf{p}$ un punto sobre la recta que pasa por $\mathbf{a}$ y $\mathbf{b}$. Demuestre que $\det[\tilde{\mathbf{a}} \ \tilde{\mathbf{b}} \ \tilde{\mathbf{p}}] = 0$.
23. Sea $\mathbf{p}$ cualquier punto interior de Δabc , con coordenadas baricéntricas (r, s, t) , de manera que

$$[\tilde{\mathbf{a}} \ \tilde{\mathbf{b}} \ \tilde{\mathbf{c}}] \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{p}}$$

Utilice el ejercicio 19 y un hecho relacionado con determinantes (capítulo 3) para demostrar que

$$\begin{aligned} r &= (\text{área de } \Delta pbc) / (\text{área de } \Delta abc) \\ s &= (\text{área de } \Delta apc) / (\text{área de } \Delta abc) \\ t &= (\text{área de } \Delta abp) / (\text{área de } \Delta abc) \end{aligned}$$

- *24. Tome a $\mathbf{q}$ sobre el segmento de recta de $\mathbf{b}$ a $\mathbf{c}$ y considere la recta que pasa por $\mathbf{q}$ y $\mathbf{a}$, que se puede representar como $\mathbf{p} = (1 - x)\mathbf{q} + x\mathbf{a}$ para toda x real. Pruebe que, para cada x , $\det[\tilde{\mathbf{p}} \ \tilde{\mathbf{b}} \ \tilde{\mathbf{c}}] = x \cdot \det[\tilde{\mathbf{a}} \ \tilde{\mathbf{b}} \ \tilde{\mathbf{c}}]$. A partir de esto y de un trabajo anterior, concluya que el parámetro x es la primera coordenada baricéntrica de $\mathbf{p}$. Sin embargo, por construcción, el parámetro x también determina la distancia relativa entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ sobre el segmento de $\mathbf{q}$ a $\mathbf{a}$. (Cuando $x = 1$, $\mathbf{p} = \mathbf{a}$). Cuando este resultado se aplica al ejemplo 5, demuestra que los colores en el vértice $\mathbf{a}$ y el punto $\mathbf{q}$ se interpolan suavemente conforme $\mathbf{p}$ se mueve a lo largo de la recta entre $\mathbf{a}$ y $\mathbf{q}$.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Del ejemplo 1, el problema es determinar si los puntos son afínmente dependientes. Utilice el método del ejemplo 2 y reste un punto de los otros dos. Si uno de esos dos nuevos puntos es múltiplo del otro, entonces los tres puntos originales se encuentran sobre una recta.

2. En esencia, la demostración del teorema 5 señala que una relación de dependencia afín entre puntos corresponde a una relación de dependencia lineal entre las formas homogéneas de los puntos, utilizando los *mismos* pesos. Así, por reducción de filas:

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{v}}_1 \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 \quad \tilde{\mathbf{v}}_3 \quad \tilde{\mathbf{v}}_4] &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \end{bmatrix} \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1.25 \\ 0 & 0 & 1 & .75 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Vea esta matriz como la matriz de coeficientes de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ con cuatro variables. Entonces x_4 es libre, $x_1 = x_4$, $x_2 = -1.25x_4$, y $x_3 = -.75x_4$. Una solución es $x_1 = x_4 = 4$, $x_2 = -5$ y $x_3 = -3$. Una dependencia lineal entre las formas homogéneas es $4\tilde{\mathbf{v}}_1 - 5\tilde{\mathbf{v}}_2 - 3\tilde{\mathbf{v}}_3 + 4\tilde{\mathbf{v}}_4 = \mathbf{0}$. De esta forma, $4\mathbf{v}_1 - 5\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 + 4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$.

Otro método de solución es trasladar el problema al origen restando $\mathbf{v}_1$ de los otros puntos, encontrar una relación de dependencia lineal entre los puntos trasladados, y después reacomodar los términos. La cantidad de aritmética implicada es casi la misma que en el enfoque que se acaba de mostrar.

9.3 COMBINACIONES CONVEXAS

La sección 9.1 consideró combinaciones lineales especiales de la forma

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k \quad \text{donde} \quad c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$$

Esta sección, además, impone la restricción de que los pesos sean no negativos.

DEFINICIÓN

Una **combinación convexa** de puntos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ en $\mathbb{R}^n$ es una combinación lineal de la forma

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k$$

tal que $c_1 + c_2 + \cdots + c_k = 1$ y $c_i \geq 0$ para toda i . El conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos en un conjunto S es la **envolvente convexa** de S , y se denota como $\text{conv } S$.

La envolvente convexa de un solo punto $\mathbf{v}_1$ es justamente el conjunto $\{\mathbf{v}_1\}$, igual que la envolvente afín. En otros casos, la envolvente convexa está adecuadamente contenida en la envolvente afín. Recuerde que la envolvente afín de puntos distintos $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ es la recta

$$\mathbf{y} = (1 - t)\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2, \quad \text{con } t \in \mathbb{R}$$

Como los pesos en una combinación convexa son no negativos, los puntos en $\text{conv } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ se pueden escribir en la forma

$$\mathbf{y} = (1 - t)\mathbf{v}_1 + t\mathbf{v}_2, \quad \text{con } 0 \leq t \leq 1$$

que es el **segmento de recta** entre $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, y de aquí en adelante se denotará como $\overline{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}$.

Si un conjunto S es afínmente independiente y si $\mathbf{p} \in \text{aff } S$, entonces $\mathbf{p} \in \text{conv } S$ si y solo si las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{p}$ son no negativas. El ejemplo 1 muestra una situación especial en la cual S es mucho más que solo afínmente independiente.

EJEMPLO 1 Sean

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -10 \\ 5 \\ 11 \\ -4 \end{bmatrix},$$

y $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Observe que S es un conjunto ortogonal. Determine si $\mathbf{p}_1$ está en $\text{Gen } S$, $\text{aff } S$ y $\text{conv } S$. Y después haga lo mismo para $\mathbf{p}_2$.

SOLUCIÓN Si $\mathbf{p}_1$, es al menos, una combinación *lineal* de los puntos en S , entonces es fácil calcular los pesos porque S es un conjunto ortogonal. Sea W el subespacio generado por S . Un cálculo como en la sección 5.3 indica que la proyección ortogonal de $\mathbf{p}_1$ sobre W es el mismo $\mathbf{p}_1$:

$$\begin{aligned} \text{proy}_W &= \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 + \frac{\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3} \mathbf{v}_3 \\ &= \frac{18}{54} \mathbf{v}_1 + \frac{18}{54} \mathbf{v}_2 + \frac{18}{54} \mathbf{v}_3 \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{p}_1 \end{aligned}$$

Esto muestra que $\mathbf{p}_1$ está *en* $\text{Gen } S$. Además, puesto que los coeficientes suman 1, $\mathbf{p}_1$ está en $\text{aff } S$. De hecho, $\mathbf{p}_1$ está en $\text{conv } S$ porque los coeficientes también son no negativos.

Para $\mathbf{p}_2$, un cálculo similar indica que $\text{proy}_W \mathbf{p}_2 \neq \mathbf{p}_2$. Como $\text{proy}_W \mathbf{p}_2$ es el punto en $\text{Gen } S$ más cercano a $\mathbf{p}_2$, entonces el punto $\mathbf{p}_2$ no está en $\text{Gen } S$. En particular, $\mathbf{p}_2$ no puede estar en $\text{aff } S$ o $\text{conv } S$. ■

Recuerde que un conjunto S es afín si contiene todas las rectas determinadas por pares de puntos en S . Cuando la atención se restringe a combinaciones convexas, la condición adecuada implica segmentos de recta en vez de rectas.

DEFINICIÓN

Un conjunto S es **convexo** si para cada $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in S$, el segmento de recta $\overline{\mathbf{p}\mathbf{q}}$ está contenido en S .

Intuitivamente, un conjunto S es convexo si todo par de puntos en el conjunto se puede “ver” entre sí sin que la línea de visión salga del conjunto. La figura 1 ilustra esta idea.

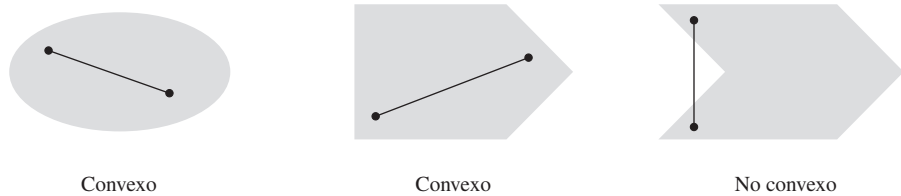


FIGURA 1

El siguiente resultado es análogo al teorema 2 para conjuntos afines.

TEOREMA 7

Un conjunto S es convexo si y solo si cada combinación convexa de puntos de S se encuentra en S . Es decir, S es convexo si y solo si $S = \text{conv } S$.

DEMOSTRACIÓN El argumento es similar al utilizado en la demostración del teorema 2. La única diferencia está en el paso de inducción. Al tomar una combinación convexa de $k + 1$ puntos, considere $\mathbf{y} = c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k + c_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}$, donde $c_1 + \cdots + c_{k+1} = 1$ y

$0 \leq c_i \leq 1$ para toda i . Si $c_{k+1} = 1$, entonces $\mathbf{y} = \mathbf{v}_{k+1}$, que pertenece a S , y no hay más que probar. Si $c_{k+1} < 1$, sea $t = c_1 + \cdots + c_k$. Entonces, $t = 1 - c_{k+1} > 0$ y

$$\mathbf{y} = (1 - c_{k+1})\left(\frac{c_1}{t}\mathbf{v}_1 + \cdots + \frac{c_k}{t}\mathbf{v}_k\right) + c_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} \quad (1)$$

Según la hipótesis de inducción, el punto $\mathbf{z} = (c_1/t)\mathbf{v}_1 + \cdots + (c_k/t)\mathbf{v}_k$ está en S porque los coeficientes no negativos suman 1. Así, la ecuación (1) presenta a $\mathbf{y}$ como una combinación convexa de dos puntos en S . De acuerdo con el principio de inducción, cada combinación convexa de tales puntos se encuentra en S . ■

El teorema 9 que se expone a continuación ofrece una caracterización más geométrica de la envolvente convexa de un conjunto. Se requiere un resultado preliminar de intersecciones de conjuntos. Recuerde de la sección 4.1 (ejercicio 32) que la intersección de dos subespacios es, en sí misma, un subespacio. De hecho, la intersección de cualquier colección de subespacios es, en sí misma, un subespacio. Un resultado similar es válido para conjuntos afines y conjuntos convexos.

TEOREMA 8

Sea $\{S_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ cualquier colección de conjuntos convexos. Entonces, $\bigcap_{\alpha \in \mathcal{A}} S_\alpha$ es convexo. Si $\{T_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$ es cualquier colección de conjuntos afines, entonces $\bigcap_{\beta \in \mathcal{B}} T_\beta$ es afín.

DEMOSTRACIÓN Si $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ están en $\bigcap S_\alpha$, entonces $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ están en cada S_α . Como cada S_α es convexo, el segmento de recta entre $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ está en S_α para toda α y, por lo tanto, ese segmento está contenido en $\bigcap S_\alpha$. La demostración para el caso afín es similar. ■

TEOREMA 9

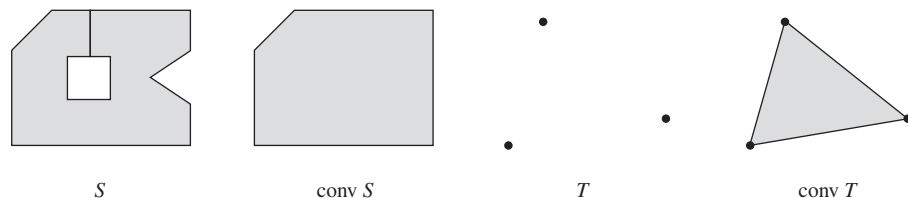
Para cualquier conjunto S , la envolvente convexa de S es la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S .

DEMOSTRACIÓN Sea T la intersección de todos los conjuntos convexos que contienen a S . Como $\text{conv } S$ es un conjunto convexo que contiene a S , se deduce que $T \subset \text{conv } S$. Por otro lado, sea C cualquier conjunto convexo que contiene a S . Entonces, C contiene a toda combinación convexa de puntos de C (teorema 7) y, por consiguiente, también contiene a toda combinación convexa de puntos del subconjunto S . Es decir, $\text{conv } S \subset C$. Puesto que esto es verdad para todo conjunto convexo C que contiene a S , esto también es válido para la intersección de todos ellos. Es decir, $\text{conv } S \subset T$. ■

El teorema 9 señala que $\text{conv } S$ es, en un sentido natural, el “menor” conjunto convexo que contiene a S . Por ejemplo, considere un conjunto S que está dentro de algún gran rectángulo en $\mathbb{R}^2$, e imagine estirar una banda de hule alrededor del exterior de S . Cuando la banda se contrae alrededor de S , indica la frontera de la envolvente convexa de S . O bien, para usar otra analogía, la envolvente convexa de S *llena* todos los huecos en el interior de S y *rellena* todas las abolladuras en la frontera de S .

EJEMPLO 2

a) A continuación se muestran las envolventes convexas de los conjuntos S y T en $\mathbb{R}^2$.



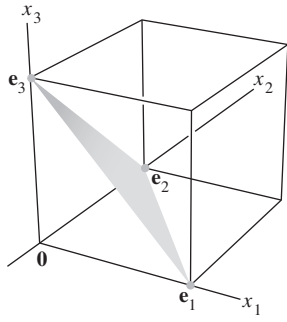


FIGURA 2

b) Sea S el conjunto que consta de la base estándar para $\mathbb{R}^3$, $S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Entonces, $\text{conv } S$ es una superficie triangular en $\mathbb{R}^3$, con vértices $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ y $\mathbf{e}_3$. Véase la figura 2. ■

EJEMPLO 3 Sea $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x \geq 0 \text{ y } y = x^2 \right\}$. Demuestre que la envolvente convexa de S es la unión del origen y $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x > 0 \text{ y } y \geq x^2 \right\}$. Véase la figura 3.

SOLUCIÓN Cada punto en $\text{conv } S$ debe estar en un segmento de recta que conecte dos puntos de S . La línea discontinua de la figura 3 indica que, excepto por el origen, el eje y positivo no está en $\text{conv } S$, porque el origen es el único punto de S sobre el eje y . Parecería razonable que la figura 3 muestre $\text{conv } S$, pero, ¿cómo se podría estar seguro de que el punto $(10^{-2}, 10^4)$, por ejemplo, está sobre un segmento de recta del origen a un punto sobre la curva en S ?

Considere cualquier punto $\mathbf{p}$ en la región sombreada de la figura 3, por ejemplo,

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{con } a > 0 \text{ y } b \geq a^2$$

La recta que pasa por $\mathbf{0}$ y $\mathbf{p}$ tiene la ecuación $y = (b/a)t$ para t real. Esta recta se interseca con S donde t satisface $(b/a)t = t^2$, es decir, cuando $t = b/a$. Así, $\mathbf{p}$ está sobre el segmento de recta de $\mathbf{0}$ a $\begin{bmatrix} b/a \\ b^2/a^2 \end{bmatrix}$, lo que indica que la figura 3 es correcta. ■

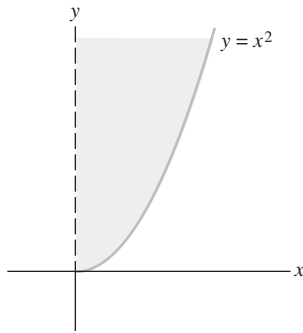


FIGURA 3

El siguiente teorema es básico en el estudio de conjuntos convexas. Constantin Caratheodory fue el primero en probarlo en 1907. Si $\mathbf{p}$ está en la envolvente convexa de S , entonces, por definición, $\mathbf{p}$ debe ser una combinación convexa de puntos de S . Pero la definición no establece cuántos puntos de S se requieren para construir la combinación. El notable teorema de Caratheodory dice que en un espacio n -dimensional, el número de puntos de S en la combinación convexa nunca es mayor que $n + 1$.

TEOREMA 10

(Caratheodory) Si S es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces cada punto en $\text{conv } S$ se puede expresar como una combinación convexa de $n + 1$ o menos puntos de S .

DEMOSTRACIÓN Dado $\mathbf{p}$ en $\text{conv } S$, se puede escribir $\mathbf{p} = c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k$, donde $\mathbf{v}_i \in S$, $c_1 + \cdots + c_k = 1$ y $c_i \geq 0$, para alguna k e $i = 1, \dots, k$. El objetivo es demostrar que tal expresión existe para $\mathbf{p}$ con $k \leq n + 1$.

Si $k > n + 1$, entonces $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$ es afínmente dependiente, de acuerdo con el ejercicio 12 de la sección 9.2. Así, existen escalares $d_1, \dots, d_k$, no todos cero, tales que

$$\sum_{i=1}^k d_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^k d_i = 0$$

Considere las dos ecuaciones

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k = \mathbf{p}$$

y

$$d_1 \mathbf{v}_1 + d_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + d_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

Restando un múltiplo adecuado de la segunda ecuación a la primera, se elimina uno de los términos $\mathbf{v}_i$ y se obtiene una combinación convexa de menos que k elementos de S que es igual a $\mathbf{p}$.

Como no todos los coeficientes d_i son cero, podemos suponer (reacomodando subíndices, si es necesario) que $d_k > 0$ y que $c_k/d_k \leq c_i/d_i$ para todas aquellas i para las que $d_i > 0$. Para $i = 1, \dots, k$, sea $b_i = c_i - (c_k/d_k)d_i$. Entonces, $b_k = 0$ y

$$\sum_{i=1}^k b_i = \sum_{i=1}^k c_i - \frac{c_k}{d_k} \sum_{i=1}^k d_i = 1 - 0 = 1$$

Además, cada $b_i \geq 0$. En realidad, si $d_i \leq 0$, entonces $b_i \geq c_i \geq 0$. Si $d_i > 0$, entonces $b_i = d_i(c_i/d_i - c_k/d_k) \geq 0$. Por construcción,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k-1} b_i \mathbf{v}_i &= \sum_{i=1}^k b_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^k \left(c_i - \frac{c_k}{d_k} d_i \right) \mathbf{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i - \frac{c_k}{d_k} \sum_{i=1}^k d_i \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{v}_i = \mathbf{p} \end{aligned}$$

De esta forma, $\mathbf{p}$ ahora es una combinación convexa de $k - 1$ de los puntos $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$. Este proceso se puede repetir hasta que $\mathbf{p}$ se exprese como una combinación convexa de, a lo sumo, $n + 1$ de los puntos de S . ■

El siguiente ejemplo ilustra los cálculos de la demostración anterior.

EJEMPLO 4 Sean

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \frac{10}{3} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

y $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Luego,

$$\frac{1}{4}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_3 + \frac{1}{12}\mathbf{v}_4 = \mathbf{p} \quad (2)$$

Utilice el procedimiento de la demostración del teorema de Caratheodory para expresar $\mathbf{p}$ como una combinación convexa de tres puntos de S .

SOLUCIÓN El conjunto S es afínmente dependiente. Utilice las técnicas de la sección 9.2 para obtener una relación de dependencia afín

$$-5\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3 + 4\mathbf{v}_4 = \mathbf{0} \quad (3)$$

Después, seleccione los puntos $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_4$ en (3), cuyos coeficientes sean positivos. Para cada punto, calcule la razón de los cocientes en las ecuaciones (2) y (3). La razón para $\mathbf{v}_2$ es $\frac{1}{6} \div 4 = \frac{1}{24}$, y para $\mathbf{v}_4$ es $\frac{1}{12} \div 4 = \frac{1}{48}$. La razón para $\mathbf{v}_4$ es menor, así que reste $\frac{1}{48}$ multiplicado por la ecuación (3) de la ecuación (2) para eliminar $\mathbf{v}_4$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{4} + \frac{5}{48}\right)\mathbf{v}_1 + \left(\frac{1}{6} - \frac{4}{48}\right)\mathbf{v}_2 + \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{48}\right)\mathbf{v}_3 + \left(\frac{1}{12} - \frac{4}{48}\right)\mathbf{v}_4 &= \mathbf{p} \\ \frac{17}{48}\mathbf{v}_1 + \frac{4}{48}\mathbf{v}_2 + \frac{27}{48}\mathbf{v}_3 &= \mathbf{p} \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Por lo general, este resultado no se puede mejorar al disminuir el número requerido de puntos. En realidad, dados cualesquiera tres puntos no colineales en $\mathbb{R}^2$, el centroide del triángulo formado por ellos está en la envolvente convexa de los tres, pero no está en la envolvente convexa de dos cualesquiera de ellos.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA†

- Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, y $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Determine si $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ están en $\text{conv } S$.
- Sea S el conjunto de puntos sobre la curva $y = 1/x$ para $x > 0$. Explique geoméricamente por qué $\text{conv } S$ consiste en todos los puntos sobre la curva S y por arriba de ella.

9.3 EJERCICIOS†

- En $\mathbb{R}^2$, sea $S = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} : 0 \leq y < 1 \right\} \cup \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Describa (o bosqueje) la envolvente convexa de S .

- Describa la envolvente convexa del conjunto S de puntos $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$ que satisfacen las condiciones indicadas. Justifique sus respuestas. (Demuestre que un punto arbitrario $\mathbf{p}$ en S pertenece a $\text{conv } S$).

a) $y = 1/x$ y $x \geq 1/2$

b) $y = \sin x$

c) $y = x^{1/2}$ y $x \geq 0$

- Considere los puntos del ejercicio 5 de la sección 9.1. ¿Cuáles de $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$ están en $\text{conv } S$?

- Considere los puntos del ejercicio 6 de la sección 9.1. ¿Cuáles de $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$ están en $\text{conv } S$?

- Sean

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

y sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$. Determine si $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ están en $\text{conv } S$.

- Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$,

$$\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} \end{bmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ y } S \text{ el conjunto}$$

ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$. Determine si cada $\mathbf{p}_i$ está en $\text{Gen } S$, $\text{aff } S$ o $\text{conv } S$.

- a) $\mathbf{p}_1$ b) $\mathbf{p}_2$ c) $\mathbf{p}_3$ d) $\mathbf{p}_4$

Los ejercicios 7 a 10 utilizan la terminología de la sección 9.2.

- a) Sea $T = \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$, y sean

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Encuentre las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ y $\mathbf{p}_4$ con respecto a T .

- Utilice sus respuestas del inciso a) para determinar si cada uno de $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_4$ en el inciso a) está dentro, fuera o en la arista de $\text{conv } T$, una región triangular.

- Repita el ejercicio 7 para $T = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ y

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- Sea $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4\}$ un conjunto afínmente independiente. Considere los puntos $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_5$, cuyas coordenadas baricéntricas con respecto a S están dadas por $(2, 0, 0, -1)$, $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2}, -1)$, $(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6})$ y $(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}, 0)$, respectivamente. Determine si cada uno de $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_5$ está dentro, fuera o sobre la superficie de $\text{conv } S$, un tetraedro. ¿Algunos de esos puntos están en la arista de $\text{conv } S$?

- Repita el ejercicio 9 para los puntos $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_5$ cuyas coordenadas baricéntricas con respecto a S están dadas por $(\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{2})$, $(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{2})$, $(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0)$, $(0, -2, 0, 3)$ y $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$, respectivamente.

En los ejercicios 11 y 12, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

- a) Si $\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ y $c_1 + c_2 + c_3 = 1$, entonces $\mathbf{y}$ es una combinación convexa de $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.
- b) Si S es un conjunto no vacío, entonces $\text{conv } S$ contiene algunos puntos que no están en S .
- c) Si S y T son conjuntos convexos, entonces $S \cup T$ también es convexo.
- a) Un conjunto es convexo si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ implica que el segmento de recta entre $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ está contenido en S .
- b) Si S y T son conjuntos convexos, entonces $S \cap T$ también es convexo.

- c) Si S es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^5$ y $\mathbf{y} \in \text{conv } S$, entonces existen distintos puntos $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_6$ en S tales que $\mathbf{y}$ es una combinación convexa de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_6$.
13. Sea S un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ y suponga que $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una transformación lineal. Demuestre que el conjunto $f(S) = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in S\}$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^m$.
14. Sean $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal y T un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que el conjunto $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) \in T\}$ es un subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.
15. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Confirme que
- $$\mathbf{p} = \frac{1}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{6}\mathbf{v}_3 + \frac{1}{6}\mathbf{v}_4 \text{ y } \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$
- Utilice el procedimiento de la demostración del teorema de Caratheodory para expresar $\mathbf{p}$ como una combinación convexa de tres de las $\mathbf{v}_i$. Haga esto de *dos* formas.
16. Repita el ejercicio 9 para los puntos $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, considerando que
- $$\mathbf{p} = \frac{1}{121}\mathbf{v}_1 + \frac{72}{121}\mathbf{v}_2 + \frac{37}{121}\mathbf{v}_3 + \frac{1}{11}\mathbf{v}_4$$
- y
- $$10\mathbf{v}_1 - 6\mathbf{v}_2 + 7\mathbf{v}_3 - 11\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$
- En los ejercicios 17 a 20, demuestre el enunciado en cuestión respecto de los subconjuntos A y B de $\mathbb{R}^n$. Una demostración para un ejercicio puede emplear resultados de ejercicios anteriores.
17. Si $A \subset B$ y B es convexo, entonces $\text{conv } A \subset B$.
18. Si $A \subset B$, entonces $\text{conv } A \subset \text{conv } B$.
- *19. a) $[(\text{conv } A) \cup (\text{conv } B)] \subset \text{conv } (A \cup B)$

b) Encuentre un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ para demostrar que la igualdad no necesariamente es válida en el inciso a).

*20. a) $\text{conv } (A \cap B) \subset [(\text{conv } A) \cap (\text{conv } B)]$

b) Encuentre un ejemplo en $\mathbb{R}^2$ para probar que la igualdad no necesita ser válida en el inciso a).

*21. Considere que $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ son puntos en $\mathbb{R}^n$, y defina $\mathbf{f}_0(t) = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1$, $\mathbf{f}_1(t) = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{g}(t) = (1-t)\mathbf{f}_0(t) + t\mathbf{f}_1(t)$ para $0 \leq t \leq 1$. Para los puntos que se muestran en la siguiente figura, realice un esquema que muestre $\mathbf{f}_0(\frac{1}{2})$, $\mathbf{f}_1(\frac{1}{2})$ y $\mathbf{g}(\frac{1}{2})$.



22. Repita el ejercicio 21 para $\mathbf{f}_0(\frac{3}{4})$, $\mathbf{f}_1(\frac{3}{4})$ y $\mathbf{g}(\frac{3}{4})$.

*23. Sea $\mathbf{g}(t)$ como se define en el ejercicio 21. Su gráfica se llama *curva cuadrática de Bézier*, y se utiliza en algunos diseños de gráficos computacionales. Los puntos $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ se llaman *puntos de control* de la curva. Calcule una fórmula para $\mathbf{g}(t)$ que implique solamente a $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$. Después, demuestre que $\mathbf{g}(t)$ está en $\text{conv } \{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ para $0 \leq t \leq 1$.

24. Dados los puntos de control $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$ en $\mathbb{R}^n$, sea $\mathbf{g}_1(t)$ para $0 \leq t \leq 1$ la curva cuadrática de Bézier del ejercicio 23 determinada por $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$, y sea $\mathbf{g}_2(t)$ definida de manera similar para $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$. Para $0 \leq t \leq 1$, defina $\mathbf{h}(t) = (1-t)\mathbf{g}_1(t) + t\mathbf{g}_2(t)$. Demuestre que la gráfica de $\mathbf{h}(t)$ está en la envolvente convexa de los cuatro puntos de control. A esta curva se le llama *curva cúbica de Bézier*, y su definición aquí es un paso en un algoritmo para construir curvas de Bézier (analizadas en la sección 9.6). Una curva de Bézier de grado k se determina por $k+1$ puntos de control, y su gráfica está en la envolvente convexa de esos puntos de control.

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. Los puntos $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ no son ortogonales, así que se calcula

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -8 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_1 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ y } \mathbf{p}_2 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Aumente la matriz $[\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1]$ con $\mathbf{p}_1 - \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{p}_2 - \mathbf{v}_1$ y reduzca por filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 & -5 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

La tercera columna indica que $\mathbf{p}_1 - \mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) + \frac{2}{3}(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1)$, lo que conduce a $\mathbf{p}_1 = 0\mathbf{v}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{v}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{v}_3$. Así, $\mathbf{p}_1$ está en $\text{conv } S$. De hecho, $\mathbf{p}_1$ está en $\text{conv } \{\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.

La última columna de la matriz indica que $\mathbf{p}_2 - \mathbf{v}_1$ no es una combinación lineal de $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$. Así, $\mathbf{p}_2$ no es una combinación afín de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, por lo que $\mathbf{p}_2$ quizá no esté en conv S .

Un método de solución alternativo consiste en reducir por filas la matriz aumentada de las formas homogéneas:

$$[\tilde{\mathbf{v}}_1 \quad \tilde{\mathbf{v}}_2 \quad \tilde{\mathbf{v}}_3 \quad \tilde{\mathbf{p}}_1 \quad \tilde{\mathbf{p}}_2] \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Si $\mathbf{p}$ es un punto arriba de S , entonces la recta que pasa por $\mathbf{p}$ con pendiente -1 se intersecará con S en dos puntos antes de llegar a los ejes x y y positivos.

9.4 HIPERPLANOS

Los hiperplanos desempeñan un papel especial en la geometría de $\mathbb{R}^n$ porque dividen el espacio en dos porciones, justo como un plano separa a $\mathbb{R}^3$ en dos partes y una recta corta a $\mathbb{R}^2$. La clave al trabajar con hiperplanos es utilizar simples descripciones *implícitas*, en vez de las representaciones *explícitas* o paramétricas de rectas y planos empleadas en el estudio anterior de conjuntos afines.¹

Una ecuación implícita de una recta en $\mathbb{R}^2$ tiene la forma $ax + by = d$. Una ecuación implícita de un plano en $\mathbb{R}^3$ tiene la forma $ax + by + cz = d$. Ambas ecuaciones describen la recta o el plano como el conjunto de todos los puntos en los cuales una expresión lineal (también llamada *funcional lineal*) tiene un valor fijo, d .

DEFINICIÓN

Una **funcional lineal** en $\mathbb{R}^n$ es una transformación lineal f de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$. Para todo escalar d en $\mathbb{R}$, el símbolo $[f: d]$ denota el conjunto de todas las $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$ para las cuales el valor de f es d . Es decir,

$$[f: d] \text{ es el conjunto } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = d\}$$

La **funcional cero** es la transformación tal que $f(\mathbf{x}) = 0$ para toda $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$. Todas las demás funcionales lineales en $\mathbb{R}^n$ son **diferentes de cero**.

EJEMPLO 1 En $\mathbb{R}^2$, la recta $x - 4y = 13$ es un hiperplano en $\mathbb{R}^2$, y es el conjunto de puntos en los que la funcional lineal $f(x, y) = x - 4y$ tiene valor 13. Es decir, la recta es el conjunto $[f: 13]$. ■

EJEMPLO 2 En $\mathbb{R}^3$, el plano $5x - 2y + 3z = 21$ es un hiperplano, el conjunto de puntos en los que la funcional lineal $g(x, y, z) = 5x - 2y + 3z$ tiene valor 21. Este hiperplano es el conjunto $[g: 21]$. ■

Si f es una funcional lineal en $\mathbb{R}^n$, entonces la matriz estándar de esta transformación lineal f es una matriz A de $1 \times n$, por ejemplo, $A = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$. De manera que

$$[f: 0] \text{ es igual que } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = 0\} = \text{Nul } A \quad (1)$$

¹ Las representaciones paramétricas se estudiaron en la sección 1.5.

Si f es una funcional distinta de cero, entonces $\text{rango de } A = 1$, y $\dim \text{Nul } A = n - 1$, de acuerdo con el teorema del rango.² Así, el subespacio $[f: 0]$ tiene dimensión $n - 1$ y, por lo tanto, es un hiperplano. Además, si d es cualquier número en $\mathbb{R}$, entonces

$$[f: d] \text{ es igual que } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : A\mathbf{x} = d\} \quad (2)$$

Recuerde del teorema 6 de la sección 1.5 que el conjunto de soluciones de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ se obtiene al trasladar el conjunto solución de $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, empleando cualquier solución particular $\mathbf{p}$ de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Cuando A es la matriz estándar de la transformación f , este teorema dice que

$$[f: d] = [f: 0] + \mathbf{p} \text{ para cualquier } \mathbf{p} \text{ en } [f: d] \quad (3)$$

Por lo tanto, los conjuntos $[f: d]$ son hiperplanos paralelos a $[f: 0]$. Véase la figura 1.

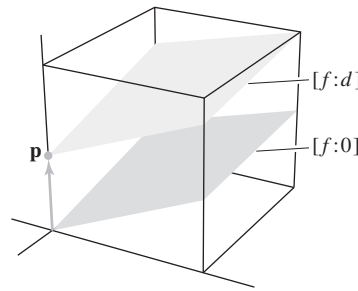


FIGURA 1 Hiperplanos paralelos, con $f(\mathbf{p}) = d$.

Cuando A es una matriz de $1 \times n$, la ecuación $A\mathbf{x} = d$ se puede escribir con un producto interno $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$, empleando $\mathbf{n}$ en $\mathbb{R}^n$ con las mismas entradas que A . Así, a partir de (2),

$$[f: d] \text{ es igual que } \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d\} \quad (4)$$

Entonces, $[f: 0] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0\}$, lo que muestra que $[f: 0]$ es el complemento ortogonal del subespacio generado por $\mathbf{n}$. En la terminología de cálculo y geometría en $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{n}$ se llama un vector **normal** a $[f: 0]$. (Un vector “normal” en este sentido no necesita tener longitud unitaria). Además, se dice que $\mathbf{n}$ es **normal** a cada hiperplano paralelo $[f: d]$, aunque $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$ no es cero cuando $d \neq 0$.

Otro nombre para $[f: d]$ es *conjunto nivel* de f , y $\mathbf{n}$ algunas veces se llama *gradiente* de f cuando $f(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}$ para cada $\mathbf{x}$.

EJEMPLO 3 Sean $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix}$, y sea $H = \{\mathbf{x} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 12\}$, de manera que $H = [f: 12]$, donde $f(x, y) = 3x + 4y$. Por lo tanto, H es la recta $3x + 4y = 12$. Encuentre una descripción implícita del hiperplano paralelo (recta) $H_1 = H + \mathbf{v}$.

SOLUCIÓN Primero, encuentre un punto $\mathbf{p}$ en H_1 . Para hacer esto, determine un punto en H y súmele $\mathbf{v}$. Por ejemplo, $\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ está en H , así que $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ está en H_1 . Ahora, calcule $\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} = -9$. Esto indica que $H_1 = [f: -9]$. Véase la figura 2, que también muestra el subespacio $H_0 = \{\mathbf{x} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0\}$. ■

Los siguientes tres ejemplos revelan conexiones entre descripciones implícitas y explícitas de hiperplanos. El ejemplo 4 inicia con una forma implícita.

² Véase el teorema 14 de la sección 2.9 o el teorema 14 de la sección 4.6.

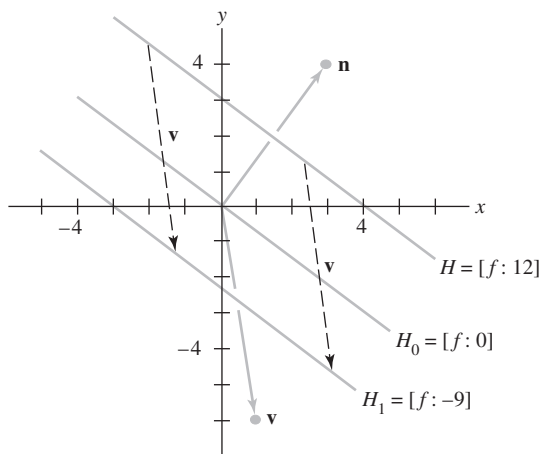


FIGURA 2

EJEMPLO 4 En $\mathbb{R}^2$, dé una descripción explícita de la recta $x - 4y = 13$ en forma vectorial paramétrica.

SOLUCIÓN Esto equivale a resolver una ecuación no homogénea $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde $A = [1 \ -4]$ y $\mathbf{b}$ es el número 13 en $\mathbb{R}$. Escriba $x = 13 + 4y$, donde y es una variable libre. En forma paramétrica, la solución es

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 + 4y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{p} + y\mathbf{q}, \quad y \in \mathbb{R} \quad \blacksquare$$

Es más complicado convertir una descripción explícita de una recta a la forma implícita. La idea básica es construir $[f: 0]$ y después encontrar d para $[f: d]$.

EJEMPLO 5 Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}$, y L_1 la recta que pasa por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Encuentre una funcional lineal f y una constante d tales que $L_1 = [f: d]$.

SOLUCIÓN La recta L_1 es paralela a la recta trasladada L_0 a través de $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ y el origen. La ecuación que define a L_0 tiene la forma

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0, \quad \text{donde} \quad \mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad (5)$$

Como $\mathbf{n}$ es ortogonal al subespacio L_0 , que contiene a $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, calcule

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

y resuelva

$$\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix} = 0$$

Por inspección, una solución es $[a \ b] = [2 \ 5]$. Sea $f(x, y) = 2x + 5y$. A partir de (5), $L_0 = [f: 0]$, y $L_1 = [f: d]$ para alguna d . Como $\mathbf{v}_1$ está sobre la recta L_1 , $d = f(\mathbf{v}_1) = 2(1) + 5(2) = 12$. Así, la ecuación para L_1 es $2x + 5y = 12$. Como comprobación, observe que $f(\mathbf{v}_2) = f(6, 0) = 2(6) + 5(0) = 12$, de manera que $\mathbf{v}_2$ también está sobre L_1 . $\blacksquare$

EJEMPLO 6 Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Encuentre una descripción implícita $[f: d]$ del plano H_1 que pasa por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.

SOLUCIÓN H_1 es paralelo a un plano H_0 que pasa por el origen y que contiene los puntos trasladados

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como esos dos puntos son linealmente independientes, $H_0 = \text{Gen}\{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1\}$.

Sea $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ la normal a H_0 . Entonces, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1$ son ortogonales a $\mathbf{n}$. Es decir,

$(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n} = 0$ y $(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{n} = 0$. Esas dos ecuaciones forman un sistema cuya matriz aumentada se puede reducir por filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Las operaciones de fila dan $a = (-\frac{2}{3})c$, $b = (\frac{5}{3})c$, con c libre. Establezca $c = 4$, por ejemplo.

Entonces, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $H_0 = [f: 0]$, donde $f(\mathbf{x}) = -2x_1 + 5x_2 + 4x_3$.

El hiperplano paralelo H_1 es $[f: d]$. Para encontrar d , considere el hecho de que $\mathbf{v}_1$ está en H_1 , y calcule $d = f(\mathbf{v}_1) = f(1, 1, 1) = -2(1) + 5(1) + 4(1) = 7$. Como comprobación, calcule $f(\mathbf{v}_2) = f(2, -1, 4) = -2(2) + 5(-1) + 4(4) = 16 - 9 = 7$. ■

El procedimiento del ejemplo 6 se generaliza a mayores dimensiones. Sin embargo, para el caso especial de $\mathbb{R}^3$, también se puede utilizar la fórmula del **producto cruz** para determinar $\mathbf{n}$, aplicando un determinante simbólico como una regla mnemotécnica:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \times (\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & \mathbf{i} \\ -2 & 0 & \mathbf{j} \\ 3 & 1 & \mathbf{k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= -2\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si solo se necesita la fórmula para f , el cálculo del producto cruz se puede escribir como un determinante ordinario

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & x_1 \\ -2 & 0 & x_2 \\ 3 & 1 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} x_1 - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} x_3 \\ &= -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 \end{aligned}$$

Hasta el momento, cada hiperplano examinado se ha descrito como $[f: d]$ para alguna funcional lineal f y alguna d en $\mathbb{R}$, o bien, de manera equivalente como $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d\}$ para alguna $\mathbf{n}$ en $\mathbb{R}^n$. El siguiente teorema indica que *todo* hiperplano tiene estas descripciones equivalentes.

TEOREMA 11

Un subconjunto H de $\mathbb{R}^n$ es un hiperplano si y solo si $H = [f: d]$ para alguna funcional lineal f diferente de cero y algún escalar d en $\mathbb{R}$. De esta forma, si H es un hiperplano, existe un vector $\mathbf{n}$ diferente de cero y un número real d tales que $H = \{\mathbf{x} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d\}$.

DEMOSTRACIÓN Suponga que H es un hiperplano, tome $\mathbf{p} \in H$, y sea $H_0 = H - \mathbf{p}$. Entonces, H_0 está en un subespacio de dimensión $(n - 1)$. Después, tome cualquier punto $\mathbf{y}$ que no esté en H_0 . De acuerdo con el teorema de descomposición ortogonal de la sección 5.3,

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 + \mathbf{n}$$

donde $\mathbf{y}_1$ es un vector en H_0 y $\mathbf{n}$ es ortogonal a todo vector en H_0 . La función f definida por

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} \quad \text{para } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

es una funcional lineal, por las propiedades del producto interno. Ahora, $[f: 0]$ es un hiperplano que contiene a H_0 , por construcción de $\mathbf{n}$. Se deduce que

$$H_0 = [f: 0]$$

[Argumento: H_0 contiene una base S de $n - 1$ vectores, y como S está en el subespacio $(n - 1)$ -dimensional $[f: 0]$, entonces S también debe ser una base para $[f: 0]$, de acuerdo con el teorema de la base]. Finalmente, sea $d = f(\mathbf{p}) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}$. Por lo tanto, como se muestra en la ecuación (3) anterior,

$$[f: d] = [f: 0] + \mathbf{p} = H_0 + \mathbf{p} = H$$

El enunciado inverso de que $[f: d]$ es un hiperplano se deduce de las ecuaciones (1) y (3) anteriores. ■

Muchas importantes aplicaciones de hiperplanos dependen de la posibilidad de “separar” dos conjuntos mediante un hiperplano. Intuitivamente, esto significa que uno de los conjuntos está sobre un lado del hiperplano, y el otro conjunto está sobre el lado contrario. La terminología y la notación que se presentan a continuación ayudarán a hacer más precisa esta idea.

TOPOLOGÍA EN $\mathbb{R}^n$: TÉRMINOS Y HECHOS

Para cualquier punto $\mathbf{p}$ en $\mathbb{R}^n$ y cualquier real $\delta > 0$, la **bola abierta** $B(\mathbf{p}, \delta)$ con centro en $\mathbf{p}$ y radio δ está dada por

$$B(\mathbf{p}, \delta) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta\}$$

Dado un conjunto S en $\mathbb{R}^n$, un punto $\mathbf{p}$ es un **punto interior** de S si existe un $\delta > 0$ tal que $B(\mathbf{p}, \delta) \subset S$. Si toda bola abierta centrada en $\mathbf{p}$ se interseca con S y con el complemento de S , entonces $\mathbf{p}$ se llama **punto frontera** de S . Un conjunto es **abierto** si no contiene a ninguno de sus puntos frontera. (Esto es equivalente a decir que todos sus puntos son puntos interiores). Un conjunto es **cerrado** si contiene todos sus puntos frontera. (Si S contiene solamente algunos de sus puntos frontera, entonces S no es abierto ni cerrado). Un conjunto S es **acotado** si existe una $\delta > 0$ tal que $S \subset B(\mathbf{0}, \delta)$. Un conjunto en $\mathbb{R}^n$ es **compacto** si es cerrado y acotado.

Teorema: La envolvente convexa de un conjunto abierto es abierta, y la envolvente convexa de un conjunto compacto es compacta. (La envolvente convexa de un conjunto cerrado no necesita ser cerrada. Véase el ejercicio 27).

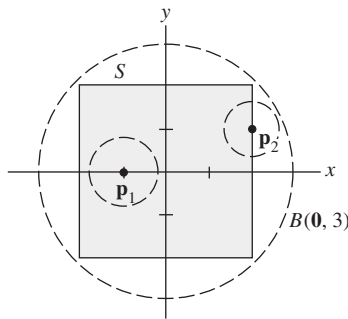


FIGURA 3
El conjunto S es cerrado y acotado.

EJEMPLO 7 Sean

$$S = \text{conv} \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

como se muestra en la figura 3. Entonces, $\mathbf{p}_1$ es un punto interior porque $B(\mathbf{p}_1, \frac{3}{4}) \subset S$. El punto $\mathbf{p}_2$ es un punto frontera porque cada bola abierta centrada en $\mathbf{p}_2$ se interseca con S y el complemento de S . El conjunto S es cerrado porque contiene todos sus puntos frontera. El conjunto S es acotado porque $S \subset B(\mathbf{0}, 3)$. Por lo tanto, S también es compacto. ■

Notación: Si f es una funcional lineal, entonces $f(A) \leq d$ significa que $f(\mathbf{x}) \leq d$ para cada $\mathbf{x} \in A$. Las notaciones correspondientes se emplearán cuando las desigualdades estén invertidas o cuando sean estrictas.

DEFINICIÓN

El hiperplano $H = [f: d]$ **separa** a dos conjuntos A y B si es válida una de las siguientes situaciones:

- i. $f(A) \leq d$ y $f(B) \geq d$, o
- ii. $f(A) \geq d$ y $f(B) \leq d$.

Si en las condiciones anteriores todas las desigualdades débiles se remplazan por desigualdades estrictas, entonces se dice que H **separa estrictamente** A y B .

Observe que la separación estricta requiere que los dos conjuntos sean disjuntos, lo que no ocurre en la separación simple. Es claro que si dos círculos en el plano son tangentes externamente, entonces su recta tangente común los separa (pero no estrictamente).

Aunque es necesario que los dos conjuntos sean disjuntos para separarlos estrictamente, esta condición no es suficiente, ni siquiera para conjuntos convexos cerrados. Por ejemplo, sean

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x \geq \frac{1}{2} \text{ y } \frac{1}{x} \leq y \leq 2 \right\} \quad \text{y} \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : x \geq 0 \text{ y } y = 0 \right\}$$

Entonces, A y B son conjuntos convexos cerrados disjuntos, pero no se pueden separar estrictamente mediante un hiperplano (recta en $\mathbb{R}^2$). Véase la figura 4. Así, el problema de separar (o de separar estrictamente) dos conjuntos con un hiperplano es más complicado de lo que parece.

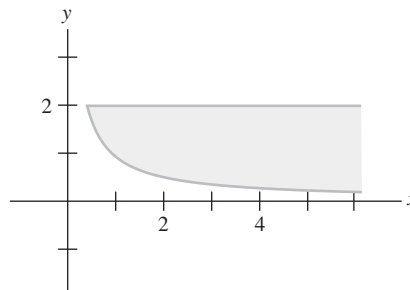


FIGURA 4 Conjuntos convexos cerrados disjuntos.

Hay muchas condiciones interesantes sobre los conjuntos A y B que implican la existencia de un hiperplano de separación, pero los siguientes dos teoremas son suficientes para esta sección. La demostración del primer teorema requiere de un poco de material preliminar,³ pero el segundo es consecuencia inmediata del primero.

TEOREMA 12

Suponga que A y B son conjuntos convexos no vacíos tales que A es compacto y B es cerrado. Entonces, existe un hiperplano H que separa estrictamente A y B si y solo si $A \cap B = \emptyset$.

TEOREMA 13

Suponga que A y B son conjuntos compactos no vacíos. Entonces, existe un hiperplano que separa estrictamente A y B si y solo si $(\text{conv } A) \cap (\text{conv } B) = \emptyset$.

³ Una demostración del teorema 12 se presenta en Steven R. Lay, *Convex Sets and Their Applications* (Nueva York: John Wiley & Sons, 1982; Mineola, NY: Dover Publications, 2007), pp. 34-39.

DEMOSTRACIÓN Suponga que $(\text{conv } A) \cap (\text{conv } B) = \emptyset$. Como la envolvente convexa de un conjunto compacto es compacta, entonces el teorema 12 asegura que existe un hiperplano H que separa estrictamente $\text{conv } A$ y $\text{conv } B$. Es claro que H también separa estrictamente a los conjuntos más pequeños A y B .

A la inversa, suponga que el hiperplano $H = [f: d]$ separa estrictamente A y B . Sin pérdida de generalidad, suponga que $f(A) < d$ y $f(B) > d$. Sea $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + \cdots + c_k\mathbf{x}_k$ cualquier combinación convexa de elementos de A . Entonces,

$$f(\mathbf{x}) = c_1f(\mathbf{x}_1) + \cdots + c_kf(\mathbf{x}_k) < c_1d + \cdots + c_kd = d$$

ya que $c_1 + \cdots + c_k = 1$. Por lo tanto, $f(\text{conv } A) < d$. Asimismo, $f(\text{conv } B) > d$, por lo que $H = [f: d]$ separa estrictamente $\text{conv } A$ y $\text{conv } B$. De acuerdo con el teorema 12, $\text{conv } A$ y $\text{conv } B$ deben ser disjuntos. ■

EJEMPLO 8 Sean

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix},$$

y sean $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ y $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$. Demuestre que el hiperplano $H = [f: 5]$, donde $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - 3x_2 + x_3$, no separa A y B . ¿Existe un hiperplano paralelo a H que separe A y B ? ¿Se intersecan las envolventes convexas de A y B ?

SOLUCIÓN Evalúe la funcional lineal f en cada uno de los puntos en A y B :

$$f(\mathbf{a}_1) = 2, \quad f(\mathbf{a}_2) = -11, \quad f(\mathbf{a}_3) = -6, \quad f(\mathbf{b}_1) = 4 \quad \text{y} \quad f(\mathbf{b}_2) = 12$$

Como $f(\mathbf{b}_1) = 4$ es menor que 5 y $f(\mathbf{b}_2) = 12$ es mayor que 5, los puntos de B están en ambos lados de $H = [f: 5]$ y así H no separa A y B .

Puesto que $f(A) < 3$ y $f(B) > 3$, el hiperplano paralelo $[f: 3]$ separa estrictamente A y B . Según el teorema 13, $(\text{conv } A) \cap (\text{conv } B) = \emptyset$.

Precaución: Si no hay hiperplanos paralelos a H que separen estrictamente A y B , esto no implicaría necesariamente la intersección de sus envolventes convexas. Tal vez algún otro hiperplano no paralelo a H los separara estrictamente. ■

PROBLEMA DE PRÁCTICA[‡]

• Sean $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, y considere que H_1 es el hiper-

plano (plano) en $\mathbb{R}^3$ que pasa por el punto $\mathbf{p}_1$ y que tiene vector normal $\mathbf{n}_1$, y H_2 es el hiperplano que pasa por el punto $\mathbf{p}_2$ con vector normal $\mathbf{n}_2$. Dé una descripción explícita de $H_1 \cap H_2$ mediante una fórmula que muestre cómo generar todos los puntos en $H_1 \cap H_2$.

9.4 EJERCICIOS[†]

1. Sea L la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por los puntos $\begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Encuentre una funcional lineal f y un número real d tales que $L = [f: d]$.

2. Sea L la recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Obtenga una funcional lineal f y un número real d tales que $L = [f: d]$.

En los ejercicios 3 y 4, determine si cada conjunto es abierto o cerrado, o bien, ni abierto ni cerrado.

3. a) $\{(x, y) : y > 0\}$
 b) $\{(x, y) : x = 2 \text{ y } 1 \leq y \leq 3\}$
 c) $\{(x, y) : x = 2 \text{ y } 1 < y < 3\}$
 d) $\{(x, y) : xy = 1 \text{ y } x > 0\}$
 e) $\{(x, y) : xy \geq 1 \text{ y } x > 0\}$
4. a) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$
 b) $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$
 c) $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1 \text{ y } y > 0\}$
 d) $\{(x, y) : y \geq x^2\}$
 e) $\{(x, y) : y < x^2\}$

En los ejercicios 5 y 6, determine si cada conjunto es compacto o no, y si es convexo o no.

5. Utilice los conjuntos del ejercicio 3.
 6. Utilice los conjuntos del ejercicio 4.

En los ejercicios 7 a 10, sea H el hiperplano que pasa por los puntos mencionados. a) Encuentre un vector $\mathbf{n}$ que sea normal al hiperplano. b) Obtenga una funcional lineal f y un número real d tales que $H = [f : d]$.

7. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$ 8. $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{bmatrix}$
9. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
10. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$
11. Sean $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$
 y $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, y H el hiperplano en $\mathbb{R}^4$ con normal $\mathbf{n}$ y que

pasa por $\mathbf{p}$. ¿Cuáles de los puntos $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$ están sobre un mismo lado de H como el origen, y cuáles no?

12. Sean $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix},$
 $\mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, y sean $A = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ y $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$. Encuentre un hiperplano H con nor-

mal $\mathbf{n}$ que separa A y B . ¿Existe un hiperplano paralelo a H que separe estrictamente A y B ?

*13. Sean $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ y
 $\mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, sean H_1 el hiperplano en $\mathbb{R}^4$ que pasa por $\mathbf{p}_1$ con

normal $\mathbf{n}_1$, y H_2 el hiperplano que pasa por $\mathbf{p}_2$ con normal $\mathbf{n}_2$. Dé una descripción explícita de $H_1 \cap H_2$. [Sugerencia: Obtenga un punto $\mathbf{p}$ en $H_1 \cap H_2$ y dos vectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ que generen un subespacio paralelo al plano afín bidimensional $H_1 \cap H_2$].

- *14. Sean F_1 y F_2 planos tetradimensionales en $\mathbb{R}^6$ y suponga que $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. ¿Cuáles son las posibles dimensiones de $F_1 \cap F_2$?

En los ejercicios 15 a 20, escriba una fórmula para una funcional lineal f y especifique un número d , tal que $[f : d]$ sea el hiperplano descrito en el ejercicio.

- *15. Sea A la matriz $[1 \ -3 \ 4 \ -2]$ de 1×4 , y sea $b = 5$. Además, $H = \{\mathbf{x} \text{ en } \mathbb{R}^4 : A\mathbf{x} = b\}$.

- *16. Sea A la matriz de $[2 \ 5 \ -3 \ 0 \ 6]$ de 1×5 . Observe que $\text{Nul } A$ está en $\mathbb{R}^5$. Sea $H = \text{Nul } A$.

- *17. Sea H el plano en $\mathbb{R}^3$ generado por las filas de $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Es decir, $H = \text{Fil } B$. [Sugerencia: Indague cuál es la relación entre H y $\text{Nul } B$. Véase la sección 5.1].

- *18. Sea H el plano en $\mathbb{R}^3$ generado por las filas de $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 8 \end{bmatrix}$. Es decir, $H = \text{Fil } B$.

- *19. Sea H el espacio columna de la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ -7 & -6 \end{bmatrix}$.

Es decir, $H = \text{Col } B$. [Sugerencia: Indague cuál es relación entre $\text{Col } B$ y $\text{Nul } B^T$. Véase la sección 5.1].

- *20. Sea H el espacio columna de la matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$.

Es decir, $H = \text{Col } B$.

En los ejercicios 21 y 22, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

- *21. a) Una transformación lineal de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^n$ se llama una funcional lineal.
 b) Si f es una funcional lineal definida en $\mathbb{R}^n$, entonces existe un número real k tal que $f(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}$ para toda $\mathbf{x}$ en $\mathbb{R}^n$.
 c) Si un hiperplano separa estrictamente a los conjuntos A y B , entonces $A \cap B = \emptyset$.
 d) Si A y B son conjuntos convexos cerrados y $A \cap B = \emptyset$, entonces existe un hiperplano que separa estrictamente A y B .

- *22. a) Si d es un número real y f es una funcional lineal diferente de cero definida en $\mathbb{R}^n$, entonces $[f : d]$ es un hiperplano en $\mathbb{R}^n$.
- b) Dado cualquier vector $\mathbf{n}$ y cualquier número real d , el conjunto $\{\mathbf{x} : \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = d\}$ es un hiperplano.
- c) Si A y B son conjuntos disjuntos no vacíos tales que A es compacto y B es cerrado, entonces existe un hiperplano que separa estrictamente A y B .
- d) Si existe un hiperplano H tal que H no separa estrictamente a dos conjuntos A y B , entonces $(\text{conv } A) \cap (\text{conv } B) \neq \emptyset$.
23. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Encuentre un hiperplano $[f : d]$ (en este caso, una recta) que separe estrictamente $\mathbf{p}$ de $\text{conv } \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$.
24. Repita el ejercicio 23 para $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.
25. Sea $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Encuentre un hiperplano $[f : d]$ que separe estrictamente $B(\mathbf{0}, 3)$ y $B(\mathbf{p}, 1)$. [Sugerencia: Después de encontrar f , demuestre que el punto $\mathbf{v} = (1 - .75)\mathbf{0} + .75\mathbf{p}$ no está en $B(\mathbf{0}, 3)$ ni en $B(\mathbf{p}, 1)$].
26. Sean $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}$. Encuentre un hiperplano $[f : d]$ que separe estrictamente $B(\mathbf{q}, 3)$ y $B(\mathbf{p}, 1)$.
- *27. Dé un ejemplo de un subconjunto cerrado S de $\mathbb{R}^2$ tal que $\text{conv } S$ no sea cerrado.
- *28. Dé un ejemplo de un conjunto compacto A y un conjunto cerrado B en $\mathbb{R}^2$ tales que $(\text{conv } A) \cap (\text{conv } B) = \emptyset$, pero considerando que A y B no se puedan separar estrictamente con un hiperplano.
29. Pruebe que la bola abierta $B(\mathbf{p}, \delta) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x} - \mathbf{p}\| < \delta\}$ es un conjunto convexo. [Sugerencia: Utilice la desigualdad del triángulo].
30. Demuestre que la envolvente convexa de un conjunto acotado también está acotada.

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE PRÁCTICA

Primero, calcule $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{p}_1 = -3$ y $\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{p}_2 = 7$. El hiperplano H_1 es el conjunto solución de la ecuación $x_1 + x_2 - 2x_3 = -3$, y H_2 es el conjunto solución de la ecuación $-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7$. Entonces,

$$H_1 \cap H_2 = \{\mathbf{x} : x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \text{ y } -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7\}$$

Esta es una descripción implícita de $H_1 \cap H_2$. Para encontrar una descripción explícita, resuelva el sistema de ecuaciones por reducción de filas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{5}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $x_1 = -\frac{10}{3} + \frac{5}{3}x_3$, $x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x_3$, $x_3 = x_3$. Sean $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$.

La solución general se puede escribir como $\mathbf{x} = \mathbf{p} + x_3\mathbf{v}$. Así, $H_1 \cap H_2$ es la recta que pasa por $\mathbf{p}$ en la dirección de $\mathbf{v}$. Observe que $\mathbf{v}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{n}_1$ como a $\mathbf{n}_2$.

9.5 POLÍTOPOS

Esta sección estudia propiedades geométricas de una importante clase de conjuntos convexos compactos llamados polítopos. Esos conjuntos se presentan en todo género de aplicaciones, incluyendo teoría de juegos, programación lineal y problemas de optimización más generales, como el diseño de controles de retroalimentación para sistemas de ingeniería.

Un **polígono** en $\mathbb{R}^n$ es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos. En $\mathbb{R}^2$, un polígono es simplemente un polígono. En $\mathbb{R}^3$, un polígono se llama poliedro. Características importantes de un poliedro son sus caras, aristas y vértices. Por ejemplo, el cubo tiene 6 caras cuadradas, 12 aristas y 8 vértices. Las siguientes definiciones aportan terminología para mayores dimensiones, así como para $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$. Recuerde que la dimensión de un conjunto en $\mathbb{R}^n$ es la dimensión del plano afín más pequeño que lo contiene. Además, observe que un polígono es un tipo especial de conjunto convexo compacto, porque un conjunto finito en $\mathbb{R}^n$ es compacto y la envolvente convexa de este conjunto también es compacta, de acuerdo con el teorema incluido en el recuadro de términos y hechos en topología, de la sección 9.4.

DEFINICIÓN

Sea S un subconjunto convexo compacto de $\mathbb{R}^n$. Un subconjunto F no vacío de S es una **cara** (propia) de S si $F \neq S$ y existe un hiperplano $H = [f: d]$ tal que $F = S \cap H$ y $f(S) \leq d$ o $f(S) \geq d$. El hiperplano H es un **hiperplano de soporte** para S . Si la dimensión de F es k , entonces F es una **k -cara** de S .

Si P es un polígono de dimensión k , entonces P se llama un **k -polígono**. Una 0-cara de P se llama **vértice**, una 1-cara es una **arista**, y una $(k - 1)$ -dimensional cara es una **faceta** de S .

EJEMPLO 1 Suponga que S es un cubo en $\mathbb{R}^3$. Cuando un plano H se traslada en $\mathbb{R}^3$ hasta que apenas toca (soporta) al cubo, pero no corta el interior de este, entonces hay tres posibilidades para $H \cap S$, dependiendo de la orientación de H . (Véase la figura 1).

$H \cap S$ puede ser una cara cuadrada bidimensional (faceta) del cubo.

$H \cap S$ puede ser una arista unidimensional del cubo.

$H \cap S$ puede ser un vértice de dimensión 0 del cubo. ■

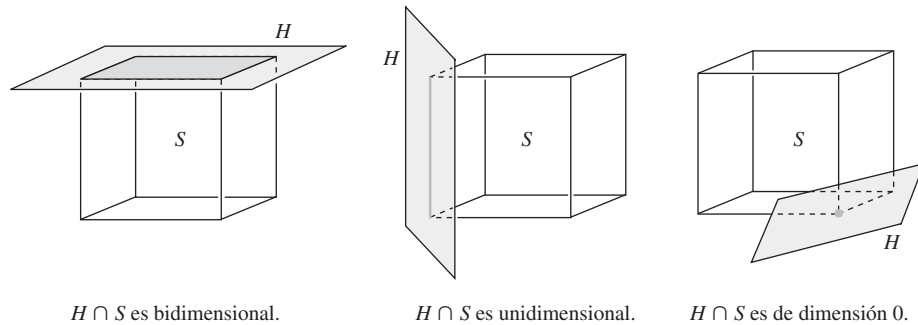


FIGURA 1

La mayoría de las aplicaciones de polígonos de alguna manera implican a los vértices, porque estos tienen una propiedad especial que se identifica en la siguiente definición.

DEFINICIÓN

Sea S un conjunto convexo. Un punto $\mathbf{p}$ en S es un **punto extremo** de S si $\mathbf{p}$ no está en el interior de algún segmento de recta contenido en S . Más precisamente, si $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$ y $\mathbf{p} \in \overline{\mathbf{x}\mathbf{y}}$, entonces $\mathbf{p} = \mathbf{x}$ o $\mathbf{p} = \mathbf{y}$. El conjunto de todos los puntos extremos de S se llama **perfil** de S .

Un vértice de cualquier conjunto convexo S compacto es automáticamente un punto extremo de S . Este hecho queda asentado en la demostración del teorema 14, que se presenta a continuación. Al trabajar con un polítopo, por ejemplo, $P = \text{conv} \{v_1, \dots, v_k\}$ para $v_1, \dots, v_k$ en $\mathbb{R}^n$, por lo general es útil saber que $v_1, \dots, v_k$ son los puntos extremos de P . Sin embargo, esta lista podría contener puntos extraños. Es decir, por ejemplo, algún vector v_i podría ser el punto medio de una arista del polítopo. Desde luego, en este caso v_i realmente no se necesita para generar la envolvente convexa. La siguiente definición describe la propiedad de los vértices que hace que sean puntos extremos.

DEFINICIÓN

El conjunto $\{v_1, \dots, v_k\}$ es una **representación mínima** del polítopo P si $P = \text{conv} \{v_1, \dots, v_k\}$ y para cada $i = 1, \dots, k$, $v_i \notin \text{conv} \{v_j : j \neq i\}$.

Cada polítopo tiene una representación mínima. Si $P = \text{conv} \{v_1, \dots, v_k\}$ y si alguna v_i es una combinación convexa de los otros puntos, entonces es posible eliminar v_i del conjunto de puntos sin cambiar la envolvente convexa. Este proceso se puede repetir hasta obtener la representación mínima. Es factible demostrar que la representación mínima es única.

TEOREMA 14

Suponga que $M = \{v_1, \dots, v_k\}$ es la representación mínima del polítopo P . Entonces los siguientes tres enunciados son equivalentes:

- a) $p \in M$.
- b) p es un vértice de P .
- c) p es un punto extremo de P .

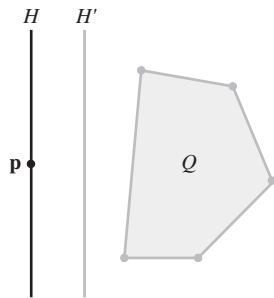


FIGURA 2

DEMOSTRACIÓN $a) \Rightarrow b)$. Suponga que $p \in M$ y sea $Q = \text{conv} \{v : v \in M \text{ y } v \neq p\}$. De la definición de M se deduce que $p \notin Q$, y como Q es compacto, el teorema 13 implica la existencia de un hiperplano H' que separa estrictamente $\{p\}$ y Q . Sea H el hiperplano que pasa por p paralelo a H' . Véase la figura 2.

Entonces Q está en uno de los semiespacios cerrados H^+ acotado por H , y $P \subseteq H^+$. Por lo tanto, H es soporte para P en p . Además, p es el único punto de P que puede estar en H , de manera que $H \cap P = \{p\}$, y p es un vértice de P .

$b) \Rightarrow c)$. Sea p un vértice en P . Entonces existe un hiperplano $H = [f : d]$ tal que $H \cap P = \{p\}$ y $f(p) = d$. Si p no fuera un punto extremo, entonces se tendrían puntos x y y en P tales que $p = (1 - c)x + cy$ con $0 < c < 1$. Es decir,

$$cy = p - (1 - c)x \quad \text{y} \quad y = \left(\frac{1}{c}\right)(p) - \left(\frac{1}{c} - 1\right)(x)$$

Se deduce que $f(y) = \frac{1}{c}f(p) - \left(\frac{1}{c} - 1\right)f(x)$. Pero, $f(p) = d$ y $f(x) \geq d$, por lo que

$$f(y) \leq \left(\frac{1}{c}\right)(d) - \left(\frac{1}{c} - 1\right)(d) = d$$

Por otro lado, $y \in P$, así que $f(y) \geq d$. Se deduce que $f(y) = d$ y que $y \in H \cap P$. Esto contradice el hecho de que p es un vértice. Entonces, p debe ser un punto extremo. (Observe que esta parte de la demostración no depende de que P sea un polítopo. Es válida para cualquier conjunto convexo compacto).

$c) \Rightarrow a)$. Es claro que cualquier punto extremo de P debe ser un miembro de M . ■

EJEMPLO 2 Recuerde que el perfil de un conjunto S es el conjunto de puntos extremos de S . El teorema 14 muestra que el perfil de un polígono en $\mathbb{R}^2$ es el conjunto de vértices. (Véase la figura 3). El perfil de una bola cerrada es su frontera. Un conjunto abierto no tiene puntos extremos, de manera que su perfil es vacío. Un semiespacio cerrado no tiene puntos extremos, por lo que su perfil es vacío. ■



FIGURA 3

El ejercicio 18 le pide demostrar que un punto $\mathbf{p}$ en un conjunto convexo S es un punto extremo de S si, y solo si, cuando $\mathbf{p}$ se elimina de S , los puntos restantes aún siguen formando un conjunto convexo. Se deduce que si S^* es cualquier subconjunto de S tal que $\text{conv } S^*$ es igual a S , entonces S^* debe contener el perfil de S . Los conjuntos del ejemplo 2 muestran que, en general, S^* puede ser más grande que el perfil de S . Sin embargo, es cierto que cuando S es compacto, S^* se puede considerar como el perfil de S , como lo demostrará el teorema 15. Así, cada conjunto S compacto no vacío tiene un punto extremo, y el conjunto de todos los puntos extremos es el subconjunto más pequeño de S cuya envolvente convexa es igual a S .

TEOREMA 15

Sea S un conjunto convexo compacto no vacío. Entonces S es la envolvente convexa de su perfil (el conjunto de puntos extremos de S).

DEMOSTRACIÓN La demostración es por inducción sobre la dimensión del conjunto S .¹ ■

Una importante aplicación del teorema 15 es el siguiente teorema. Es uno de los resultados teóricos clave en el desarrollo de la programación lineal. Las funcionales lineales son continuas, y las funciones continuas siempre alcanzan sus máximos y mínimos sobre un conjunto compacto. El significado del teorema 16 es que para conjuntos convexos compactos, el máximo (y el mínimo) realmente se obtiene en un punto extremo de S .

TEOREMA 16

Sea f una funcional lineal definida sobre un conjunto convexo S compacto y no vacío. Entonces, existen puntos extremos $\hat{\mathbf{v}}$ y $\hat{\mathbf{w}}$ de S tales que

$$f(\hat{\mathbf{v}}) = \max_{\mathbf{v} \in S} f(\mathbf{v}) \quad \text{y} \quad f(\hat{\mathbf{w}}) = \min_{\mathbf{v} \in S} f(\mathbf{v})$$

DEMOSTRACIÓN Suponga que f alcanza su máximo m sobre S en algún punto $\mathbf{v}'$ en S . Es decir, $f(\mathbf{v}') = m$. Se desea demostrar que existe un punto extremo en S con la misma propiedad. De acuerdo con el teorema 15, $\mathbf{v}'$ es una combinación convexa de los puntos extremos de S . Es decir, existen puntos extremos $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ de S y no negativos $c_1, \dots, c_k$ tales que

$$\mathbf{v}' = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_k \mathbf{v}_k \quad \text{con} \quad c_1 + \dots + c_k = 1$$

Si ninguno de los puntos extremos de S satisface $f(\mathbf{v}) = m$, entonces

$$f(\mathbf{v}_i) < m \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, k$$

¹ Los detalles se pueden encontrar en Steven R. Lay, *Convex Sets and Their Applications* (Nueva York: John Wiley & Sons, 1982; Mineola, NY: Dover Publications, 2007, p. 43).

porque m es el máximo de f sobre S . Pero entonces, como f es lineal,

$$\begin{aligned} m &= f(\mathbf{v}') = f(c_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + c_k \mathbf{v}_k) \\ &= c_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + c_k f(\mathbf{v}_k) \\ &< c_1 m + \cdots + c_k m = m(c_1 + \cdots + c_k) = m \end{aligned}$$

Esta contradicción implica que algún punto extremo $\hat{\mathbf{v}}$ de S debe satisfacer $f(\hat{\mathbf{v}}) = m$. La demostración para $\hat{\mathbf{w}}$ es similar. ■

EJEMPLO 3 Dados los puntos $\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$, sea $S = \text{conv}\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$. Para cada funcional lineal f , encuentre el valor máximo m de f sobre el conjunto S , y obtenga todos los puntos $\mathbf{x}$ en S en los que $f(\mathbf{x}) = m$.

a) $f_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ b) $f_2(x_1, x_2) = -3x_1 + x_2$ c) $f_3(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$

SOLUCIÓN De acuerdo con el teorema 16, el valor máximo se alcanza en uno de los puntos extremos de S . Así que para encontrar m , se evalúa f en cada punto extremo y se selecciona el valor más grande.

- a) $f_1(\mathbf{p}_1) = -1$, $f_1(\mathbf{p}_2) = 4$ y $f_1(\mathbf{p}_3) = 3$, de manera que $m_1 = 4$. Trace la gráfica de la recta $f_1(x_1, x_2) = m_1$, es decir, $x_1 + x_2 = 4$, y observe que $\mathbf{x} = \mathbf{p}_2$ es el único punto en S en el cual $f_1(\mathbf{x}) = 4$. Véase la figura 4a).
- b) $f_2(\mathbf{p}_1) = 3$, $f_2(\mathbf{p}_2) = -8$ y $f_2(\mathbf{p}_3) = -1$, por lo que $m_1 = 3$. Trace la gráfica de la recta $f_2(x_1, x_2) = m_2$, es decir, $-3x_1 + x_2 = 3$, y observe que $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1$ es el único punto en S en el cual $f_2(\mathbf{x}) = 3$. Véase la figura 4b).
- c) $f_3(\mathbf{p}_1) = -1$, $f_3(\mathbf{p}_2) = 5$ y $f_3(\mathbf{p}_3) = 5$, de manera que $m_1 = 5$. Trace la gráfica de la recta $f_3(x_1, x_2) = m_3$, es decir, $x_1 + 2x_2 = 5$. Aquí, f_3 alcanza su valor máximo en $\mathbf{p}_2$, en $\mathbf{p}_3$ y en cada punto de la envolvente convexa de $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$. Véase la figura 4c). ■

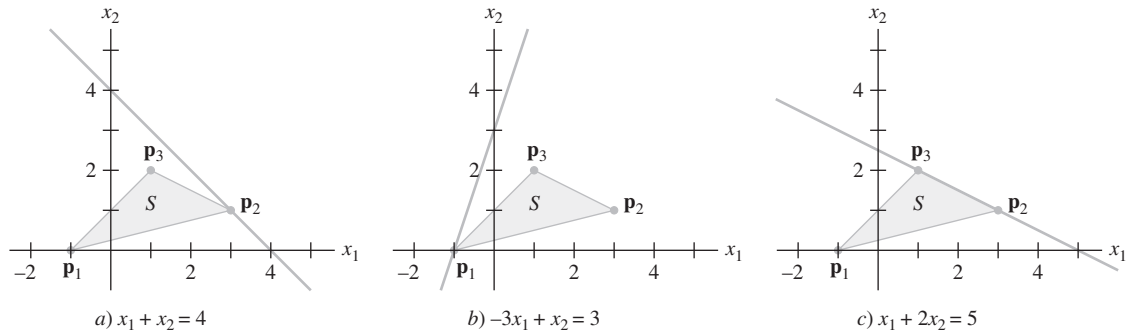


FIGURA 4

La situación ilustrada en el ejemplo 3 para $\mathbb{R}^2$ también se aplica en mayores dimensiones. El valor máximo de una funcional lineal f en un polítopo P está en la intersección de un hiperplano soporte y P . Esta intersección es un solo punto extremo de P , o bien, la envolvente convexa de 2 o más puntos extremos de P . En cualquier caso, la intersección es un polítopo, y sus puntos extremos forman un subconjunto de los puntos extremos de P .

Por definición, un polítopo es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos. Esta es una representación explícita del polítopo porque identifica puntos en el conjunto. Un polítopo también se puede representar implícitamente como la intersección de un número finito de semiespacios cerrados. El ejemplo 4 ilustra esto en $\mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 4 Sean

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

en $\mathbb{R}^2$, y $S = \text{conv} \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$. Álgebra sencilla indica que la recta que pasa por $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ está dada por $x_1 + x_2 = 1$, y S está en el lado de esta recta donde

$$x_1 + x_2 \geq 1 \quad \text{o, de manera equivalente,} \quad -x_1 - x_2 \leq -1.$$

De forma similar, la recta que pasa por $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$ es $x_1 - x_2 = 1$, y S está sobre el lado donde

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

Además, la recta que pasa por $\mathbf{p}_3$ y $\mathbf{p}_1$ es $-x_1 + 3x_2 = 3$, y S se encuentra en el lado donde

$$-x_1 + 3x_2 \leq 3$$

Véase la figura 5. Se deduce que S se puede describir como el conjunto solución del sistema de desigualdades lineales

$$-x_1 - x_2 \leq -1$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$-x_1 + 3x_2 \leq 3$$

Este sistema se puede escribir como $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Observe que una desigualdad entre dos vectores, tales como $A\mathbf{x}$ y $\mathbf{b}$, se aplica a cada una de las coordenadas correspondientes en esos vectores. ■

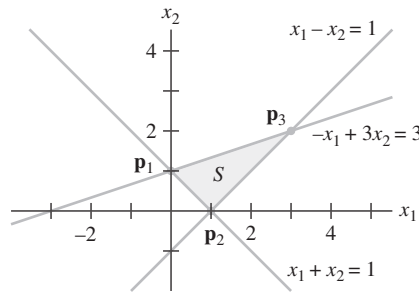


FIGURA 5

En ocasiones será necesario remplazar una descripción implícita de un polígono por una representación mínima del polígono, listando todos los puntos extremos del polígono. En casos sencillos, es factible una solución gráfica. El siguiente ejemplo muestra cómo manejar la situación cuando varios puntos de interés están muy cercanos para identificarlos fácilmente en una gráfica.

EJEMPLO 5 Sea P el conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$ que satisfacen $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$, donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 18 \\ 8 \\ 21 \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$. Encuentre la representación mínima de P .

SOLUCIÓN La condición $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ coloca a P en el primer cuadrante de $\mathbb{R}^2$, una condición típica en problemas de programación lineal. Las tres desigualdades en $A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ implican tres rectas frontera:

$$(1) \ x_1 + 3x_2 = 18 \quad (2) \ x_1 + x_2 = 8 \quad (3) \ 3x_1 + 2x_2 = 21$$

Las tres rectas tienen pendientes negativas, por lo que una idea general de la forma de P es fácil de visualizar. Incluso un burdo esquema de las gráficas de esas rectas revelará que $(0, 0)$, $(7, 0)$ y $(0, 6)$ son vértices del polítopo P .

¿Qué ocurre con las intersecciones de las rectas (1), (2) y (3)? A partir de la gráfica, algunas veces es claro cuáles intersecciones incluir. Si no es así, el siguiente procedimiento algebraico funcionará bien:

Cuando se encuentra un punto de intersección que corresponde a dos desigualdades, pruébelo en las otras desigualdades para ver si el punto está en el polítopo.

La intersección de (1) y (2) es $\mathbf{p}_{12} = (3, 5)$. Ambas coordenadas son no negativas, así que $\mathbf{p}_{12}$ satisface todas las desigualdades, excepto quizá la tercera. Pruebe esto:

$$3(3) + 2(5) = 19 < 21$$

Este punto de intersección satisface la desigualdad para (3), de manera que $\mathbf{p}_{12}$ está en el polítopo.

La intersección de (2) y (3) es $\mathbf{p}_{23} = (5, 3)$. Esto satisface todas las desigualdades, excepto quizá la desigualdad para (1). Pruebe esto:

$$1(5) + 3(3) = 14 < 18$$

Esto demuestra que $\mathbf{p}_{23}$ está en el polítopo.

Por último, la intersección de (1) y (3) es $\mathbf{p}_{13} = (\frac{27}{7}, \frac{33}{7})$. Pruebe esto en la desigualdad para (2):

$$1\left(\frac{27}{7}\right) + 1\left(\frac{33}{7}\right) = \frac{60}{7} \approx 8.6 > 8$$

Por lo tanto, $\mathbf{p}_{13}$ **no** satisface la segunda desigualdad, lo que demuestra que $\mathbf{p}_{13}$ **no** está en P . En conclusión, la representación mínima del polítopo P es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\} \quad \blacksquare$$

El resto de esta sección analiza la construcción de dos polítopos básicos en $\mathbb{R}^3$ (y mayores dimensiones). El primero se presenta en problemas de programación lineal. Ambos polítopos brindan oportunidades para visualizar $\mathbb{R}^4$ en una forma notable.

Simplejo

Un **simplejo** es la envolvente convexa de un conjunto finito de vectores afínmente independientes. Para construir un simplejo k -dimensional (o k -simplejo), se procede como sigue:

0-simplejo S^0 : un solo punto $\{\mathbf{v}_1\}$

1-simplejo S^1 : $\text{conv}(S^0 \cup \{\mathbf{v}_2\})$, y $\mathbf{v}_2$ no está en $\text{aff } S^0$

2-simplejo S^2 : $\text{conv}(S^1 \cup \{\mathbf{v}_3\})$, y $\mathbf{v}_3$ no se encuentra en $\text{aff } S^1$

$\vdots$

k -simplejo S^k : $\text{conv}(S^{k-1} \cup \{\mathbf{v}_{k+1}\})$, y $\mathbf{v}_{k+1}$ no está en $\text{aff } S^{k-1}$

El simplejo S^1 es un segmento de recta. El triángulo S^2 proviene de seleccionar un punto $\mathbf{v}_3$ que no está en la recta que contiene a S_1 y después formar la envolvente convexa con S_2 .

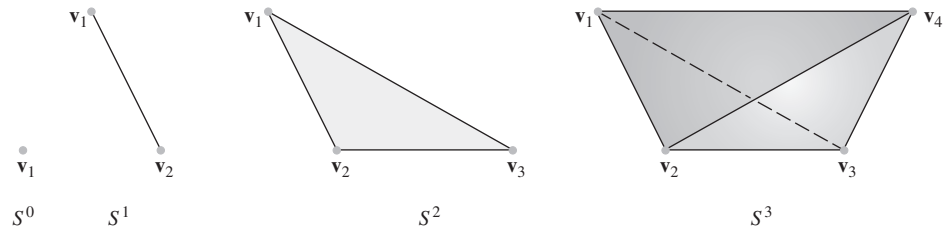


FIGURA 6

(Véase la figura 6). El tetraedro S_3 se produce al elegir un punto v_4 que no esté en el plano de S^2 y después formar la envolvente convexa con S^2 .

Antes de continuar, considere algunos de los patrones que se están presentando. El triángulo S^2 tiene tres aristas. Cada una de esas aristas es un segmento de recta semejante a S^1 . ¿De dónde provienen esos tres segmentos de recta? Uno de ellos es S^1 . Otro viene de la unión del punto final v_2 con el nuevo punto v_3 . El tercero proviene de unir el otro punto final v_1 con v_3 . Se podría decir que cada punto extremo en S^1 se estira dentro de un segmento de recta en S^2 .

El tetraedro S^3 de la figura 6 tiene cuatro caras triangulares. Una de ellas es el triángulo original S^2 , y las otras tres se obtienen al estirar las aristas de S^2 al nuevo punto v_4 . Además, observe que los vértices de S^2 se estiran para formar las aristas de S^3 . Las otras aristas de S^3 provienen de las aristas de S^2 . Esto sugiere cómo “visualizar” el S^4 de cuatro dimensiones.

La construcción de S^4 , llamado pentatopo, implica formar la envolvente convexa de S^3 con un punto v_5 que no está en el 3-espacio S^3 . Desde luego, es imposible un esquema completo, pero la figura 7 es sugestiva: S^4 tiene cinco vértices, y cualesquiera cuatro de los vértices determinan una faceta en la forma de un tetraedro. Por ejemplo, la figura enfatiza la faceta con vértices v_1, v_2, v_4 y v_5 y la faceta con vértices v_2, v_3, v_4 y v_5 . Hay cinco de estas

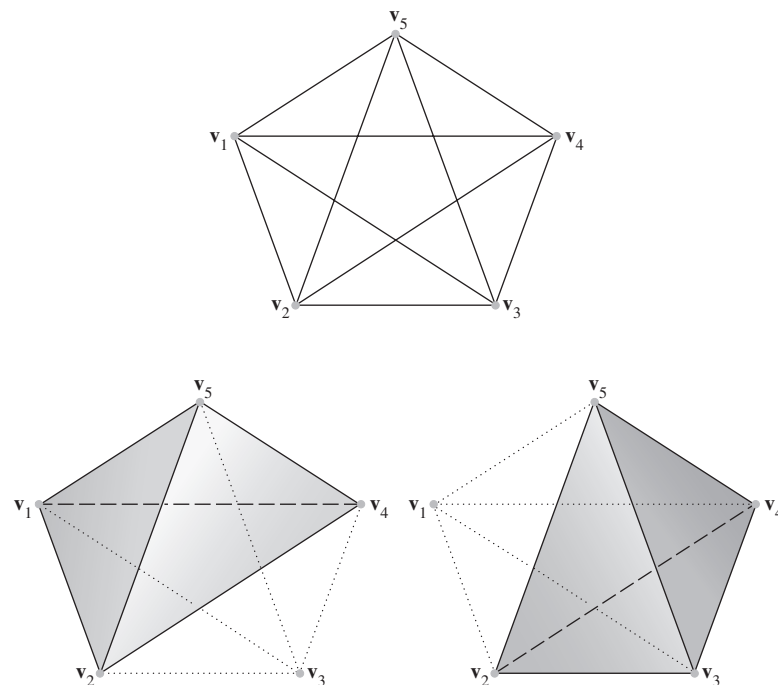


FIGURA 7 El simplejo de cuatro dimensiones S^4 proyectado sobre $\mathbb{R}^2$, con dos facetas tetraédricas resaltadas.

facetas. La figura 7 identifica las 10 aristas de S^4 , las cuales se pueden emplear para visualizar las 10 caras triangulares.

La figura 8 muestra otra representación del simplejo de cuatro dimensiones S^4 . Esta vez el quinto vértice se presenta “dentro” del tetraedro S^3 . Las facetas tetraédricas resaltadas también parecen estar “dentro” de S^3 .

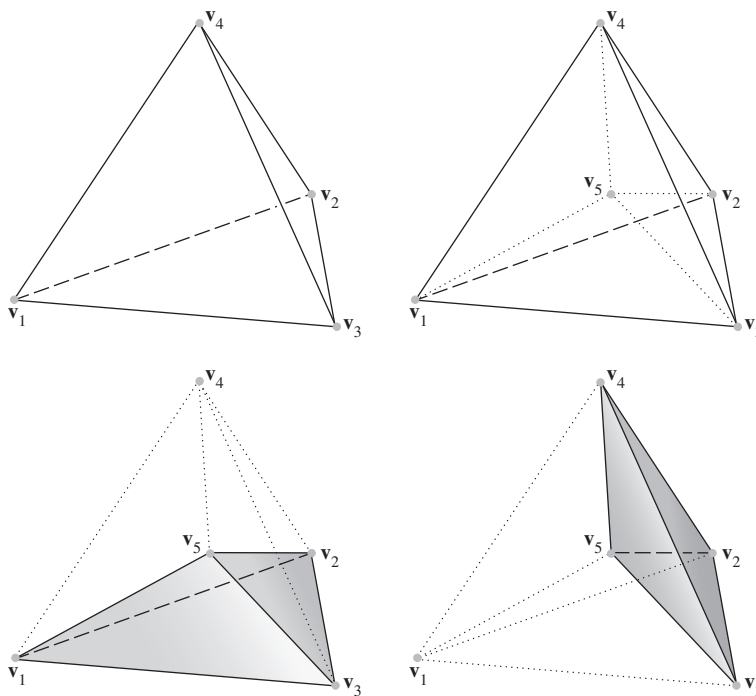


FIGURA 8 El quinto vértice de S^4 está “dentro” de S^3 .

Hipercubo

Sea $I_i = \overline{0\mathbf{e}_i}$ el segmento de recta del origen $\mathbf{0}$ al vector $\mathbf{e}_i$ de la base estándar en $\mathbb{R}^n$. Entonces, para k tal que $1 \leq k \leq n$, el vector suma²

$$C^k = I_1 + I_2 + \cdots + I_k$$

se llama el **hipercubo** k -dimensional.

Para visualizar la construcción de C^k , inicie con los casos sencillos. El hipercubo C^1 es el segmento de recta I_1 . Si C^1 se traslada mediante $\mathbf{e}_2$, la envolvente convexa de sus posiciones inicial y final describe un cuadrado C^2 . (Véase la figura 9 de la siguiente página). Al trasladar C^2 mediante $\mathbf{e}_3$ se produce el cubo C^3 . Una traslación similar de C^3 mediante el vector $\mathbf{e}_4$ produce el hipercubo de cuatro dimensiones C^4 .

Una vez más, esto es difícil de visualizar, pero la figura 10 muestra una proyección bidimensional de C^4 . Cada una de las aristas de C^3 se estira para formar una cara cuadrada de C^4 . Y cada cara cuadrada de C^3 se amplía para formar una cara cúbica de C^4 . La figura 11 muestra tres facetas de C^4 . El inciso a) resalta el cubo proveniente de la cara cuadrada izquierda de C^3 . El inciso b) muestra el cubo que proviene de la cara cuadrada frontal de C^3 . Y el inciso c) destaca el cubo proveniente de la cara cuadrada superior de C^3 .

² El vector suma de dos conjuntos A y B se define mediante $A + B = \{\mathbf{c} : \mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \text{ para algunas } \mathbf{a} \in A \text{ y } \mathbf{b} \in B\}$.

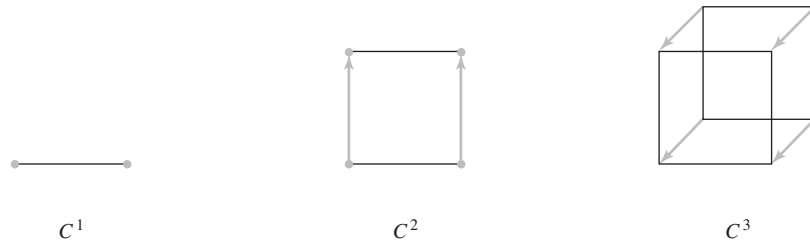


FIGURA 9 Construcción del cubo C^3 .

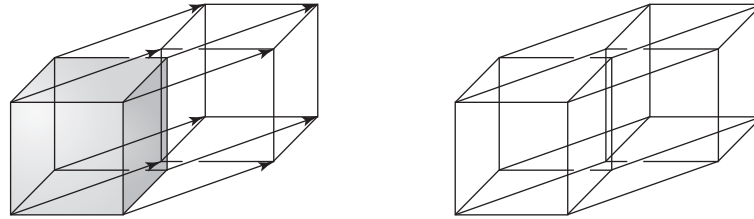


FIGURA 10 C^4 proyectado sobre $\mathbb{R}^2$.

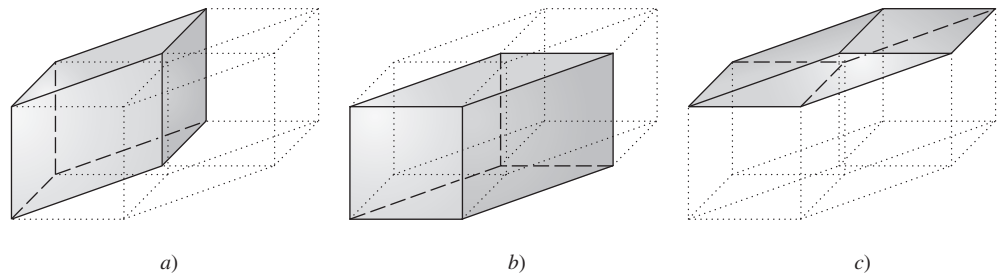


FIGURA 11 Tres de las facetas cúbicas de C^4 .

La figura 12 muestra otra representación de C^4 en la que el cubo trasladado se coloca “dentro” de C^3 . Esto hace más fácil visualizar las facetas cúbicas de C^4 , porque existe menos distorsión.

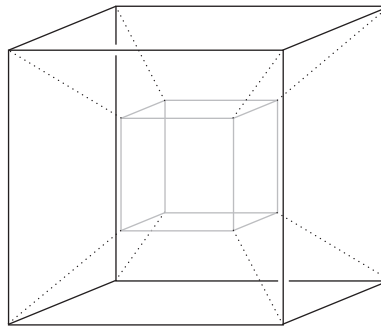


FIGURA 12 La imagen trasladada de C^3 se coloca “dentro” de C^3 para obtener C^4 .

En total, el cubo de cuatro dimensiones C^4 tiene ocho caras cúbicas. Dos de ellas provienen de las imágenes originales y trasladadas de C^3 , y seis provienen de las caras cuadradas de C^3 que se amplían para formar cubos. Las caras cuadradas bidimensionales de C^4 provienen de las caras cuadradas de C^3 y de su traslado, y las aristas de C^3 que se estiran para

formar cuadrados. Por lo tanto, hay $2 \times 6 + 12 = 24$ caras cuadradas. Para contar las aristas, multiplique por dos el número de aristas en C^3 y sume el número de vértices en C^3 . Esto da $2 \times 12 + 8 = 32$ aristas en C^4 . Todos los vértices en C^4 provienen de C^3 y su traslado, de manera que hay $2 \times 8 = 16$ vértices.

Uno de los resultados verdaderamente notables en el estudio de polítopos es la siguiente fórmula; Leonard Euler (1707-1783) fue el primero en probarla. La fórmula establece una relación sencilla entre el número de caras de diferentes dimensiones en un polítopo. Para simplificar el enunciado de la fórmula, sea $f_k(P)$ el número de caras k -dimensionales de un polítopo n -dimensional P .³

$$\text{Fórmula de Euler: } \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k f_k(P) = 1 + (-1)^{n-1}$$

En particular, cuando $n = 3$, $v - e + f = 2$, donde v , e y f denotan el número de vértices, aristas y facetas, respectivamente, de P .

PROBLEMA DE PRÁCTICA[‡]

- 1. Encuentre la representación mínima del polítopo P definido por las desigualdades

$$Ax \leq b \text{ y } x \geq 0, \text{ cuando } A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } b = \begin{bmatrix} 12 \\ 9 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

9.5 EJERCICIOS[†]

1. A partir de los puntos $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ y $p_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

en $\mathbb{R}^2$, sea $S = \text{conv} \{p_1, p_2, p_3\}$. Para cada funcional lineal f , encuentre el valor máximo m de f en el conjunto S , y obtenga todos los puntos x en S en los cuales $f(x) = m$.

$$a) f(x_1, x_2) = x_1 - x_2 \quad b) f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$c) f(x_1, x_2) = -3x_1 + x_2$$

2. Dados los puntos $p_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $p_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $\mathbb{R}^2$,

sea $S = \text{conv} \{p_1, p_2, p_3\}$. Para cada funcional lineal f , encuentre el valor máximo m de f en el conjunto S , y determine todos los puntos x en S en los cuales $f(x) = m$.

$$a) f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \quad b) f(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

$$c) f(x_1, x_2) = -2x_1 + x_2$$

3. Repita el ejercicio 1 considerando que m es el valor *mínimo* de f en S y no el valor máximo.
4. Repita el ejercicio 2 considerando que m es el valor *mínimo* de f en S y no el valor máximo.

En los ejercicios 5 a 8, encuentre la representación mínima del polítopo definido por las desigualdades $Ax \leq b$ y $x \geq 0$.

$$5. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 10 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$6. A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 18 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$7. A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \\ 28 \end{bmatrix}$$

$$8. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 8 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

- * 9. Sea $S = \{(x, y) : x^2 + (y - 1)^2 \leq 1\} \leq \{(3, 0)\}$. ¿El origen es un punto extremo de $\text{conv } S$? ¿Es el origen un vértice de $\text{conv } S$?

- * 10. Encuentre un ejemplo de un conjunto convexo S cerrado en $\mathbb{R}^2$ tal que su perfil P sea no vacío, pero $\text{conv } P \neq S$.

- * 11. Encuentre un ejemplo de un conjunto convexo S acotado en $\mathbb{R}^2$ tal que su perfil P sea no vacío, pero $\text{conv } P \neq S$.

- * 12. a) Determine el número de k -caras del simplejo de cinco dimensiones S^5 para $k = 0, 1, \dots, 4$. Verifique que su respuesta satisfaga la fórmula de Euler.

- b) Realice una tabla de los valores de $f_k(S^n)$ para $n = 1, \dots, 5$ y $k = 0, 1, \dots, 4$. ¿Identifica un patrón? Proponga una fórmula general para $f_k(S^n)$.

³ Se presenta una demostración en Steven R. Lay, *Convex Sets and Their Applications* (Nueva York: John Wiley & Sons, 1982; Mineola, NY: Dover Publications, 2007), p. 131.

- *13. a) Determine el número de k -caras del hipercubo de cinco dimensiones C^5 para $k = 0, 1, \dots, 4$. Compruebe que su respuesta satisfaga la fórmula de Euler.
 b) Construya una tabla de los valores de $f_k(C^n)$ para $n = 1, \dots, 5$ y $k = 0, 1, \dots, 4$. ¿Identifica un patrón? Proponga una fórmula general para $f_k(C^n)$.
- *14. Suponga que $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ son vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ ($1 \leq k \leq n$). Entonces el conjunto $X^k = \text{conv}\{\pm \mathbf{v}_1, \dots, \pm \mathbf{v}_k\}$ es un **k -polígono de cruce** (u **ortoplex**).
 a) Elabore un bosquejo de X^1 y X^2 .
 b) Determine el número de k -caras del polígono de cruce tridimensional X^3 para $k = 0, 1, 2$. ¿Qué otro nombre tiene X^3 ?
 c) Obtenga el número de k -caras del polígono de cruce de cuatro dimensiones X^4 para $k = 0, 1, 2, 3$. Compruebe que su respuesta satisfaga la fórmula de Euler.
 d) Encuentre una fórmula para $f_k(X^n)$, el número de k -caras de X^n , para $0 \leq k \leq n - 1$.
- *15. Una **k -pirámide** P^k es la envolvente convexa de un $(k - 1)$ -polígono Q y un punto $\mathbf{x} \notin \text{aff } Q$. Encuentre una fórmula para cada uno de los siguientes casos en términos de $f_j(Q)$, $j = 0, \dots, n - 1$.
 a) El número de vértices de P^n : $f_0(P^n)$.
 b) El número de k -caras de P^n : $f_k(P^n)$, para $1 \leq k \leq n - 2$.
 c) El número de facetas $(n - 1)$ -dimensionales de P^n : $f_{n-1}(P^n)$.
- En los ejercicios 16 y 17, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.
- *16. a) Un polígono es la envolvente convexa de un conjunto finito de puntos.
 b) Sea $\mathbf{p}$ un punto extremo de un conjunto convexo S . Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$, $\mathbf{p} \in \overline{\mathbf{u}\mathbf{v}}$ y $\mathbf{p} \neq \mathbf{u}$, entonces $\mathbf{p} = \mathbf{v}$.
 c) Si S es un subconjunto convexo no vacío de $\mathbb{R}^n$, entonces S es la envolvente convexa de su perfil.
 d) El simplejo de cuatro dimensiones S^4 tiene exactamente cinco facetas, cada una de las cuales es un tetraedro tridimensional.
- *17. a) Un cubo en $\mathbb{R}^3$ tiene cinco facetas.
 b) Un punto $\mathbf{p}$ es un punto extremo de un polígono P si y solo si $\mathbf{p}$ es un vértice de P .
 c) Si S es un conjunto convexo, compacto y no vacío, y una funcional lineal alcanza su máximo en un punto $\mathbf{p}$, entonces $\mathbf{p}$ es un punto extremo de S .
 d) Un polígono bidimensional siempre tiene el mismo número de vértices y aristas.
18. Sea $\mathbf{v}$ un elemento del conjunto convexo S . Pruebe que $\mathbf{v}$ es un punto extremo de S si y solo si el conjunto $\{\mathbf{x} \in S : \mathbf{x} \neq \mathbf{v}\}$ es convexo.
19. Si $c \in \mathbb{R}$ y S es un conjunto, defina $cS = \{c\mathbf{x} : \mathbf{x} \in S\}$. Sea S un conjunto convexo y suponga que $c > 0$ y $d > 0$. Demuestre que $cS + dS = (c + d)S$.
- *20. Encuentre un ejemplo para demostrar que la convexidad de S es necesaria en el ejercicio 19.
21. Si A y B son conjuntos convexos, demuestre que $A + B$ es convexo.
22. Un poliedro (3-polígono) se llama **regular** si todas sus facetas son polígonos regulares congruentes y todos los ángulos en los vértices son iguales. En la siguiente demostración aporte los detalles de que solamente existen cinco poliedros regulares.
 a) Suponga que un poliedro regular tiene r facetas, cada una de las cuales es un polígono regular de k lados, y que s aristas concurren en cada vértice. Considerando que v y e denotan los números de vértices y aristas en el poliedro, explique por qué $kr = 2e$ y $sv = 2e$.
 b) Utilice la fórmula de Euler para demostrar que $\frac{1}{s} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$.
 c) Obtenga todas las soluciones integrales de la ecuación en el inciso b) que satisfacen las restricciones geométricas del problema. (¿Qué tan pequeños pueden ser k y s ?).
- Para su información, los cinco poliedros regulares son el tetraedro (4, 6, 4), el cubo (8, 12, 16), el octaedro (6, 12, 8), el dodecaedro (20, 30, 12) y el icosaedro (12, 30, 20). (Los números entre paréntesis indican los números de vértices, aristas y caras, respectivamente).

SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE PRÁCTICA

1. La desigualdad matricial $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ conduce al siguiente sistema de desigualdades:

- a) $x_1 + 3x_2 \leq 12$
 b) $x_1 + 2x_2 \leq 9$
 c) $2x_1 + x_2 \leq 12$

La condición $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ coloca al polígono en el primer cuadrante del plano. Un vértice es (0, 0). Las x_1 de intersección de las tres rectas (cuando $x_2 = 0$) son 12, 9 y 6, por lo que (6, 0) es un vértice. Las x_2 de intersección de las tres rectas (cuando $x_1 = 0$) son 4, 4.5, y 12, de manera que (0, 4) es un vértice.

¿Cómo hacer que las tres rectas frontera intercepten en valores positivos de x_1 y x_2 ? La intersección de a) y b) está en $\mathbf{p}_{ab} = (3, 3)$. Al probar $\mathbf{p}_{ab}$ en c) se obtiene $2(3) + 1(3) = 9 < 12$, por lo que $\mathbf{p}_{ab}$ está en P . La intersección de b) y c) está en $\mathbf{p}_{bc} = (5, 2)$. Al probar $\mathbf{p}_{bc}$ en a) se obtiene $1(5) + 3(2) = 11 < 12$, de manera que $\mathbf{p}_{bc}$ está en P . La intersección de a) y c) está en $\mathbf{p}_{ac} = (4.8, 2.4)$. Al probar $\mathbf{p}_{ac}$ en b) se obtiene $1(4.8) + 2(2.4) = 9.6 > 9$. Así, $\mathbf{p}_{ac}$ no está en P .

Por último, los tres vértices (puntos extremos) de los polítopos son $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(5, 2)$, $(3, 3)$ y $(0, 4)$. Esos puntos forman la representación mínima de P . Esto se muestra gráficamente en la figura 13.

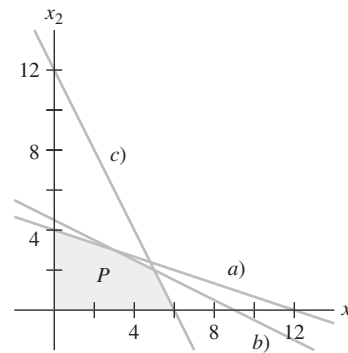


FIGURA 13

9.6 CURVAS Y SUPERFICIES

Durante miles de años, los constructores utilizaron largas tiras delgadas de madera para formar el casco de las embarcaciones. En épocas más recientes, los diseñadores emplearon tiras metálicas largas y flexibles para formar las superficies de autos y aviones. Pesos y clavijas moldearon las tiras en suaves curvas llamadas *splines cúbicos naturales*. La curva entre dos puntos de control sucesivos (clavijas o pesos) tiene una representación paramétrica usando polinomios cúbicos. Por desgracia, dichas curvas tienen la propiedad de que el movimiento de un punto de control afecta la forma de toda la curva, debido a las fuerzas físicas que las clavijas y los pesos ejercen sobre la tira. Los ingenieros diseñadores habían deseado por mucho tiempo tener un gran control local de la curva, de manera que el movimiento de un punto de control afectara solamente una pequeña parte de la curva. En 1962, un ingeniero francés especialista en automotores, Pierre Bézier, resolvió este problema agregando puntos de control y utilizando una clase especial de curvas, las cuales ahora llevan el nombre de su creador.

Curvas de Bézier

Las curvas que se describen a continuación desempeñan un papel importante en los gráficos generados por computadora y en ingeniería. Por ejemplo, se emplean en Adobe Illustrator y en Macromedia Freehand, y en lenguajes de programación como OpenGL. Esas curvas le permiten a un programa almacenar información exacta sobre segmentos curvos y superficies en un número relativamente pequeño de puntos de control. Todos los comandos de gráficos para los segmentos y las superficies solo se tienen que calcular para los puntos de control. La estructura especial de esas curvas también acelera otros cálculos en la “tubería de gráficos” que crea la imagen final en la pantalla.

Los ejercicios de la sección 9.3 introdujeron las curvas cuadráticas de Bézier y mostraron un método para construir curvas de Bézier de grado superior. Aquí el análisis se concentra en las curvas de Bézier cuadráticas y cúbicas, que se determinan con tres o cuatro

puntos de control, denotados como $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$. Esos puntos pueden estar en $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$, o bien, representarse mediante formas homogéneas en $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^4$. Las descripciones paramétricas estándares de esas curvas, para $0 \leq t \leq 1$, son

$$\mathbf{w}(t) = (1-t)^2\mathbf{p}_0 + 2t(1-t)\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2 \quad (1)$$

$$\mathbf{x}(t) = (1-t)^3\mathbf{p}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{p}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}_3 \quad (2)$$

La figura 1 muestra dos curvas típicas. Por lo regular, las curvas pasan solo a través de los puntos de control inicial y final, pero una curva de Bézier siempre está en la envolvente convexa de sus puntos de control. (Véase los ejercicios 21 a 24 de la sección 9.3).

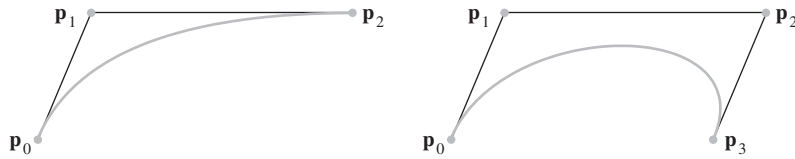


FIGURA 1 Curvas de Bézier cuadráticas y cúbicas.

Las curvas de Bézier son útiles en los gráficos generados por computadora porque sus propiedades esenciales se preservan bajo la acción de transformaciones lineales y traslaciones. Por ejemplo, si A es una matriz de tamaño adecuado, entonces de la linealidad de la multiplicación de matrices, para $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{aligned} A\mathbf{x}(t) &= A[(1-t)^3\mathbf{p}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{p}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}_3] \\ &= (1-t)^3A\mathbf{p}_0 + 3t(1-t)^2A\mathbf{p}_1 + 3t^2(1-t)A\mathbf{p}_2 + t^3A\mathbf{p}_3 \end{aligned}$$

Los nuevos puntos de control son $A\mathbf{p}_0, \dots, A\mathbf{p}_3$. En el ejercicio 1 se consideran traslaciones de curvas de Bézier.

Las curvas de la figura 1 sugieren que los puntos de control determinan las rectas tangentes a las curvas en los puntos de control inicial y terminal. De sus clases de cálculo, recuerde que para cualquier curva paramétrica, por ejemplo $\mathbf{y}(t)$, la dirección de la recta tangente a la curva en un punto $\mathbf{y}(t)$ está dada por la derivada $\mathbf{y}'(t)$, llamada **vector tangente** de la curva. (Esta derivada se calcula entrada por entrada).

EJEMPLO 1 Determine cómo el vector tangente de la curva cuadrática de Bézier $\mathbf{w}(t)$ está relacionado con los puntos de control de la curva, en $t = 0$ y $t = 1$.

SOLUCIÓN Escriba los pesos en la ecuación (1) como simples polinomios

$$\mathbf{w}(t) = (1 - 2t + t^2)\mathbf{p}_0 + (2t - 2t^2)\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2$$

Entonces, ya que la derivación es una transformación lineal sobre funciones,

$$\mathbf{w}'(t) = (-2 + 2t)\mathbf{p}_0 + (2 - 4t)\mathbf{p}_1 + 2t\mathbf{p}_2$$

Así,

$$\mathbf{w}'(0) = -2\mathbf{p}_0 + 2\mathbf{p}_1 = 2(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)$$

$$\mathbf{w}'(1) = -2\mathbf{p}_1 + 2\mathbf{p}_2 = 2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$$

El vector tangente en $\mathbf{p}_0$, por ejemplo, apunta de $\mathbf{p}_0$ a $\mathbf{p}_1$, pero es dos veces más largo que el segmento de $\mathbf{p}_0$ a $\mathbf{p}_1$. Observe que $\mathbf{w}'(0) = \mathbf{0}$ cuando $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_0$. En este caso, $\mathbf{w}(t) = (1-t)^2\mathbf{p}_1 + t^2\mathbf{p}_2$, y la gráfica de $\mathbf{w}(t)$ es el segmento de recta de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$. ■

Conexión de dos curvas de Bézier

Dos curvas de Bézier básicas se pueden unir extremo con extremo, con el punto terminal de la primera curva $\mathbf{x}(t)$ como el punto inicial $\mathbf{p}_2$ de la segunda curva $\mathbf{y}(t)$. Se dice que la curva combinada tiene *continuidad geométrica* G^0 (en $\mathbf{p}_2$) porque los dos segmentos se juntan en $\mathbf{p}_2$. Si la recta tangente a la curva 1 en $\mathbf{p}_2$ tiene diferente dirección que la recta tangente a la curva 2, entonces una “esquina”, o un cambio abrupto de dirección, puede ser evidente en $\mathbf{p}_2$. Véase la figura 2.

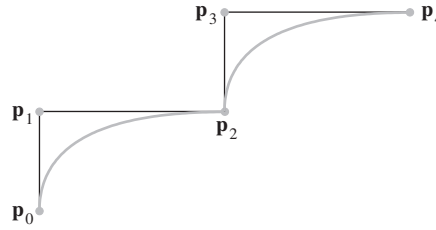


FIGURA 2 Continuidad G^0 en $\mathbf{p}_2$.

Para evitar un doblez pronunciado, es suficiente ajustar las curvas para que tengan lo que se llama *continuidad geométrica* G^1 , donde ambos vectores tangentes en $\mathbf{p}_2$ apuntan en la misma dirección. Es decir, las derivadas $\mathbf{x}'(1)$ y $\mathbf{y}'(0)$ apuntan en la misma dirección, aunque pueden diferir en magnitud. Cuando los vectores tangentes son realmente iguales en $\mathbf{p}_2$, el vector tangente es continuo en $\mathbf{p}_2$, y se dice que la curva combinada tiene continuidad C^1 , o *continuidad paramétrica* C^1 . La figura 3 muestra continuidad G^1 en a) y continuidad C^1 en b).

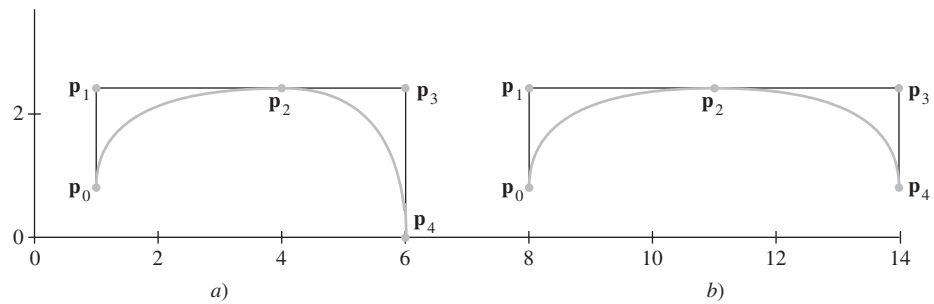


FIGURA 3 a) Continuidad G^1 y b) continuidad C^1 .

EJEMPLO 2 Considere que $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ determinan dos curvas cuadráticas de Bézier, con puntos de control $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ y $\{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$, respectivamente. Las curvas se unen en $\mathbf{p}_2 = \mathbf{x}(1) = \mathbf{y}(0)$.

- Suponga que la curva combinada tiene continuidad G^1 (en $\mathbf{p}_2$). ¿Qué restricción algebraica hace que esta condición se imponga sobre los puntos de control? Exprese esta restricción en lenguaje geométrico.
- Repita el inciso a) para continuidad C^1 .

SOLUCIÓN

- A partir del ejemplo 1, $\mathbf{x}'(t) = 2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$. Además, utilizando los puntos de control para $\mathbf{y}(t)$ en lugar de $\mathbf{w}(t)$, el ejemplo 1 indica que $\mathbf{y}'(0) = 2(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)$. La continuidad G^1 significa que $\mathbf{y}'(0) = k\mathbf{x}'(1)$ para alguna constante positiva k . De forma equivalente,

$$\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2 = k(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1), \quad \text{con } k > 0 \quad (3)$$

Geométricamente, (3) implica que $\mathbf{p}_2$ está sobre el segmento de recta de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_3$. Para probar esto, sea $t = (k + 1)^{-1}$, y observe que $0 < t < 1$. Despeje k , para obtener $k = (1 - t)/t$. Cuando esta expresión para k se emplea en la ecuación (3), un reordenamiento indica que $\mathbf{p}_2 = (1 - t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_3$, lo que comprueba la afirmación acerca de $\mathbf{p}_2$.

- b) La continuidad C^1 significa que $\mathbf{y}'(0) = \mathbf{x}'(1)$. Por lo tanto, $2(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) = 2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1)$, de manera que $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$, y $\mathbf{p}_2 = (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3)/2$. Geométricamente, $\mathbf{p}_2$ es el punto medio del segmento de recta de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_3$. Véase la figura 3. ■

La figura 4 muestra la continuidad C^1 para dos curvas cúbicas de Bézier. Observe cómo el punto que une los dos segmentos de recta está a la mitad del segmento de recta entre los puntos de control adyacentes.

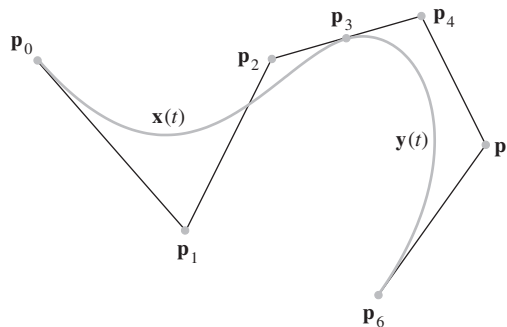


FIGURA 4 Dos curvas cúbicas de Bézier.

Dos curvas tienen continuidad (paramétrica) C^2 cuando tienen continuidad C^1 y las segundas derivadas $\mathbf{x}''(1)$ y $\mathbf{y}''(0)$ son iguales. Esto es posible para curvas cúbicas de Bézier, pero limita severamente las posiciones de los puntos de control. Otra clase de curvas cúbicas, llamadas *B-splines*, siempre tienen continuidad C^2 porque cada par de curvas comparte tres puntos de control en lugar de uno. Los gráficos que utilizan B-splines tienen más puntos de control y, en consecuencia, requieren más cálculos. Algunos ejercicios de esta sección examinan esas curvas.

De manera sorprendente, si $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ se unen en $\mathbf{p}_3$, la suavidad aparente de la curva en $\mathbf{p}_3$, por lo general, es la misma para continuidad G^1 y continuidad C^1 . Esto se debe a que la magnitud de $\mathbf{x}'(t)$ no está relacionada con la forma física de la curva. La magnitud solo refleja la parametrización matemática de la curva. Por ejemplo, si una nueva función vectorial $\mathbf{z}(t)$ es igual a $\mathbf{x}(2t)$, entonces el punto $\mathbf{z}(t)$ atraviesa la curva de $\mathbf{p}_0$ a $\mathbf{p}_3$ dos veces más rápido que la versión original, porque $2t$ alcanza 1 cuando t es .5. Pero, de acuerdo con la regla de la cadena de cálculo, $\mathbf{z}'(t) = 2 \cdot \mathbf{x}'(2t)$, por lo que el vector tangente a $\mathbf{z}(t)$ en $\mathbf{p}_3$ es el doble del vector tangente a $\mathbf{x}(t)$ en $\mathbf{p}_3$.

En la práctica, muchas curvas de Bézier sencillas se unen para crear objetos gráficos. Los programas de composición tipográfica constituyen una importante aplicación, porque muchas letras en un tipo de fuente implican segmentos curvos. Cada letra en letra PostScript®, por ejemplo, se almacena como un conjunto de puntos de control, junto con información sobre cómo construir el “contorno” de la letra utilizando segmentos de recta y curvas de Bézier. El aumento de dicha letra básicamente requiere multiplicar las coordenadas de cada punto de control por un factor de escala constante. Una vez que se ha calculado el contorno de la letra, se rellenan las partes sólidas adecuadas de la letra. La figura 5 ilustra esto para un carácter de una letra PostScript. Observe los puntos de control.

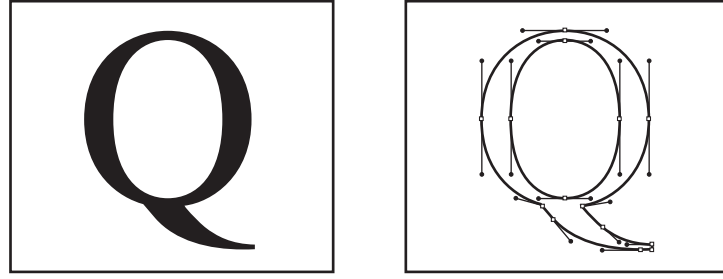


FIGURA 5 Un carácter PostScript.

Ecuaciones matriciales para curvas de Bézier

Como una curva de Bézier es una combinación lineal de puntos de control utilizando polinomios como pesos, la fórmula para $\mathbf{x}(t)$ se puede escribir como

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(t) &= [\mathbf{p}_0 \quad \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3] \begin{bmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{bmatrix} \\
 &= [\mathbf{p}_0 \quad \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3] \begin{bmatrix} 1-3t+3t^2-t^3 \\ 3t-6t^2+3t^3 \\ 3t^2-3t^3 \\ t^3 \end{bmatrix} \\
 &= [\mathbf{p}_0 \quad \mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3] \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

La matriz cuyas columnas son los cuatro puntos de control es la **matriz de geometría**, G . La matriz de 4×4 de coeficientes polinomiales es la **matriz base de Bézier**, M_B . Si $\mathbf{u}(t)$ es el vector columna de potencias de t , entonces la curva de Bézier está dada por

$$\mathbf{x}(t) = GM_B \mathbf{u}(t) \quad (4)$$

Otras curvas cúbicas paramétricas en gráficos de computadora también se escriben en esta forma. Por ejemplo, si las entradas en la matriz M_B se cambian adecuadamente, las curvas resultantes son B-splines. Estas son “más suaves” que las curvas de Bézier, pero no pasan por ninguno de los puntos de control. Una curva cúbica de **Hermite** se presenta cuando la matriz M_B se reemplaza por una matriz base de Hermite. En este caso, las columnas de la matriz de geometría consisten en los puntos inicial y final de las curvas y los vectores tangentes a las curvas en esos puntos.¹

La curva de Bézier en la ecuación (4) se puede “factorizar” de otra manera, para utilizarse en el análisis de superficies de Bézier. Por conveniencia más adelante, el parámetro t

¹ El término *matriz base* viene de las filas de la matriz que listan los coeficientes de los polinomios de *mezclado* utilizados para definir la curva. Para una curva de Bézier cúbica, los cuatro polinomios son $(1-t)^3$, $3t(1-t)^2$, $3t^2(1-t)$, y t^3 . Estos forman una base para el espacio $\mathbb{P}_3$ de polinomios de grado 3 o menor. Cada entrada en el vector $\mathbf{x}(t)$ es una combinación lineal de esos polinomios. Los pesos provienen de las filas de la matriz de geometría G en la ecuación (4).

se reemplaza por un parámetro s :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(s) &= \mathbf{u}(s)^T M_B^T \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1-s)^3 & 3s(1-s)^2 & 3s^2(1-s) & s^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

Esta fórmula no coincide plenamente con la transpuesta del producto de la derecha en (4), porque $\mathbf{x}(s)$ y los puntos de control se presentan en la ecuación (5) sin los símbolos de transpuesta. La matriz de los puntos de control en la ecuación (5) se llama el **vector de geometría**. Esto se debería ver como un bloque matricial de 4×1 (particionado) cuyas entradas son vectores columnas. La matriz a la izquierda del vector de geometría, en la segunda parte de la ecuación (5), también se puede considerar como un bloque matricial, con un escalar en cada bloque. La multiplicación de matrices particionadas tiene sentido, porque cada entrada (vector) en el vector de geometría se puede multiplicar por la izquierda por un escalar, así como por una matriz. Por lo tanto, el vector columna $\mathbf{x}(s)$ se representa mediante la ecuación (5).

Superficies de Bézier

Un parche superficial bicúbico en 3D se puede construir a partir de un conjunto de cuatro curvas de Bézier. Considere las cuatro matrices de geometría

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11} & \mathbf{p}_{12} & \mathbf{p}_{13} & \mathbf{p}_{14} \\ \mathbf{p}_{21} & \mathbf{p}_{22} & \mathbf{p}_{23} & \mathbf{p}_{24} \\ \mathbf{p}_{31} & \mathbf{p}_{32} & \mathbf{p}_{33} & \mathbf{p}_{34} \\ \mathbf{p}_{41} & \mathbf{p}_{42} & \mathbf{p}_{43} & \mathbf{p}_{44} \end{bmatrix}$$

y recuerde de la ecuación (4) que una curva de Bézier se produce cuando cualquiera de esas matrices se multiplica por la derecha por el siguiente vector de pesos:

$$M_B \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{bmatrix}$$

Sea G el bloque matricial (particionado) de 4×4 cuyas entradas son los puntos de control $\mathbf{p}_{ij}$ presentados antes. Entonces, el siguiente producto es un bloque matricial de 4×1 , y cada entrada es una curva de Bézier:

$$GM_B \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11} & \mathbf{p}_{12} & \mathbf{p}_{13} & \mathbf{p}_{14} \\ \mathbf{p}_{21} & \mathbf{p}_{22} & \mathbf{p}_{23} & \mathbf{p}_{24} \\ \mathbf{p}_{31} & \mathbf{p}_{32} & \mathbf{p}_{33} & \mathbf{p}_{34} \\ \mathbf{p}_{41} & \mathbf{p}_{42} & \mathbf{p}_{43} & \mathbf{p}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-t)^3 \\ 3t(1-t)^2 \\ 3t^2(1-t) \\ t^3 \end{bmatrix}$$

De hecho,

$$GM_B \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} (1-t)^3 \mathbf{p}_{11} + 3t(1-t)^2 \mathbf{p}_{12} + 3t^2(1-t) \mathbf{p}_{13} + t^3 \mathbf{p}_{14} \\ (1-t)^3 \mathbf{p}_{21} + 3t(1-t)^2 \mathbf{p}_{22} + 3t^2(1-t) \mathbf{p}_{23} + t^3 \mathbf{p}_{24} \\ (1-t)^3 \mathbf{p}_{31} + 3t(1-t)^2 \mathbf{p}_{32} + 3t^2(1-t) \mathbf{p}_{33} + t^3 \mathbf{p}_{34} \\ (1-t)^3 \mathbf{p}_{41} + 3t(1-t)^2 \mathbf{p}_{42} + 3t^2(1-t) \mathbf{p}_{43} + t^3 \mathbf{p}_{44} \end{bmatrix}$$

Ahora fije t . Así, $GM_B \mathbf{u}(t)$ es un vector columna que se puede utilizar como un vector de geometría en la ecuación (5) para una curva de Bézier en otra variable s . Esta observación produce la **superficie bicúbica de Bézier**:

$$\mathbf{x}(s, t) = \mathbf{u}(s)^T M_B^T GM_B \mathbf{u}(t), \quad \text{donde } 0 \leq s, t \leq 1 \quad (6)$$

La fórmula para $\mathbf{x}(s, t)$ es una combinación lineal de los 16 puntos de control. Si uno imagina que esos puntos de control están acomodados en un arreglo rectangular más o menos uniforme, como en la figura 6, entonces la superficie de Bézier se controla con una red de ocho curvas de Bézier, cuatro en la “dirección s ” y cuatro en la “dirección t ”. La superficie realmente pasa por los cuatro puntos de control en sus “esquinas”. Cuando está a la mitad de una superficie más grande, la superficie de 16 puntos comparte con sus vecinos sus 12 puntos de control frontera.

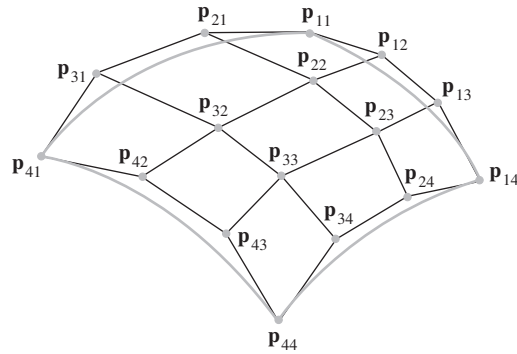


FIGURA 6 Dieciséis puntos de control para un parche superficial bicúbico de Bézier.

Aproximaciones a curvas y superficies

En programas CAD y en los que se utilizan para crear juegos computacionales realistas, el diseñador con frecuencia labora en una estación de trabajo gráfica para crear una “escena” que implica varias estructuras geométricas. Este proceso requiere interacción entre el diseñador y los objetos geométricos. Cada leve reposicionamiento de un objeto requiere nuevos cálculos matemáticos por el programa de gráficos. Las curvas y superficies de Bézier son útiles en este proceso porque implican mucho menos puntos de control que objetos aproximados por bastantes polígonos. Esto reduce notablemente el tiempo de cálculo y acelera el trabajo del diseñador.

Sin embargo, después de la composición de la escena, la preparación de la imagen final tiene diferentes demandas computacionales que se logran con mayor facilidad mediante objetos que consisten en superficies planas y aristas rectas, como los poliedros. El diseñador necesita *generar* la escena, introduciendo iluminación, agregando color y textura a las superficies, y simulando reflexiones en las superficies.

Calcular la dirección de la luz reflejada en un punto $\mathbf{p}$ sobre una superficie, por ejemplo, requiere saber las direcciones de la luz incidente y de la *normal superficial*, esto es, el vector perpendicular al plano tangente en $\mathbf{p}$. Determinar estos vectores normales es mucho más fácil sobre una superficie compuesta de, por ejemplo, pequeños polígonos planos que sobre una superficie curva cuyo vector normal cambia continuamente conforme se mueve $\mathbf{p}$. Si $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$ son vértices adyacentes de un polígono plano, entonces la normal superficial es más o menos el producto cruz $(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)$. Cuando el polígono es pequeño, solo se necesita un vector normal para reproducir el polígono entero. Además, dos rutinas de sombreado ampliamente utilizadas, el sombreado Gouraud y el sombreado Phong, requieren una superficie para definirse mediante polígonos.

Como resultado de esa necesidad de superficies planas, ahora las curvas y superficies de Bézier de la etapa de composición de escenas generalmente se aproximan mediante seg-

mentos de líneas rectas y superficies poliédricas. La idea básica para aproximar una curva o superficie de Bézier es dividir la curva o superficie en partes más pequeñas, con más y más puntos de control.

Subdivisión recursiva de curvas y superficies de Bézier

La figura 7 muestra los cuatro puntos de control $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_3$ para una curva de Bézier, junto con puntos de control para dos nuevas curvas, cada una de las cuales coincide con la mitad de la curva original. La curva “izquierda” inicia en $\mathbf{q}_0 = \mathbf{p}_0$ y termina en $\mathbf{q}_3$, en el punto medio de la curva original. La curva “derecha” comienza en $\mathbf{r}_0 = \mathbf{q}_3$ y termina en $\mathbf{r}_3 = \mathbf{p}_3$.

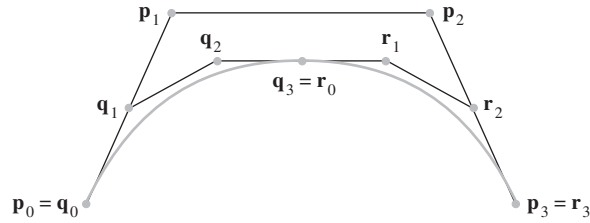


FIGURA 7 Subdivisión de una curva de Bézier.

La figura 8 muestra cómo los nuevos puntos de control encierran regiones que son “más delgadas” que la región encerrada por los puntos de control originales. Conforme las distancias entre los puntos de control disminuyen, los puntos de control de cada segmento de curva también se hacen más cercanos a un segmento de recta. Esta *propiedad de variación-disminución* de las curvas de Bézier depende del hecho de que una curva de Bézier siempre está en la envolvente convexa de los puntos de control.

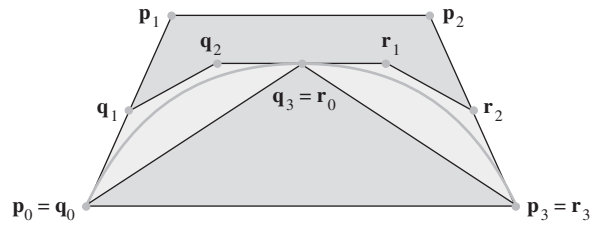


FIGURA 8 Envoltentes convexas de los puntos de control.

Los nuevos puntos de control están relacionados con los puntos de control originales mediante fórmulas sencillas. Desde luego, $\mathbf{q}_0 = \mathbf{p}_0$ y $\mathbf{r}_3 = \mathbf{p}_3$. El punto medio de la curva original $\mathbf{x}(t)$ se encuentra en $\mathbf{x}(.5)$ cuando $\mathbf{x}(t)$ tiene la parametrización estándar.

$$\mathbf{x}(t) = (1 - 3t + 3t^2 - t^3)\mathbf{p}_0 + (3t - 6t^2 + 3t^3)\mathbf{p}_1 + (3t^2 - 3t^3)\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}_3 \quad (7)$$

para $0 \leq t \leq 1$. Así, los nuevos puntos de control $\mathbf{q}_3$ y $\mathbf{r}_0$ están dados por

$$\mathbf{q}_3 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{x}(.5) = \frac{1}{8}(\mathbf{p}_0 + 3\mathbf{p}_1 + 3\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) \quad (8)$$

También son sencillas las fórmulas para los restantes puntos de control “interiores”, pero la deducción de las fórmulas requiere algún trabajo que implica vectores tangentes de las curvas. Por definición, el vector tangente a una curva parametrizada $\mathbf{x}(t)$ es la derivada $\mathbf{x}'(t)$. Este vector muestra la dirección de la recta tangente a la curva en $\mathbf{x}(t)$. Para la curva de Bézier en (7),

$$\mathbf{x}'(t) = (-3 + 6t - 3t^2)\mathbf{p}_0 + (3 - 12t + 9t^2)\mathbf{p}_1 + (6t - 9t^2)\mathbf{p}_2 + 3t^2\mathbf{p}_3$$

para $0 \leq t \leq 1$. En particular,

$$\mathbf{x}'(0) = 3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}'(1) = 3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \quad (9)$$

Geoméricamente, $\mathbf{p}_1$ está sobre la recta tangente a la curva en $\mathbf{p}_0$, y $\mathbf{p}_2$ está sobre la recta tangente a la curva en $\mathbf{p}_3$. Véase la figura 8. Además, a partir de $\mathbf{x}'(t)$, calcule

$$\mathbf{x}'(.5) = \frac{3}{4}(-\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) \quad (10)$$

Sean $\mathbf{y}(t)$ la curva de Bézier determinada por $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_3$, y $\mathbf{z}(t)$ la curva de Bézier determinada por $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_3$. Como $\mathbf{y}(t)$ recorre la misma trayectoria que $\mathbf{x}(t)$, pero solo llega hasta $\mathbf{x}(.5)$ conforme t va de 0 a 1, entonces $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(.5t)$ para $0 \leq t \leq 1$. De manera similar, ya que $\mathbf{z}(t)$ inicia en $\mathbf{x}(.5)$ cuando $t = 0$, entonces $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(.5 + .5t)$ para $0 \leq t \leq 1$. De acuerdo con la regla de la cadena para derivadas,

$$\mathbf{y}'(t) = .5\mathbf{x}'(.5t) \quad \text{y} \quad \mathbf{z}'(t) = .5\mathbf{x}'(.5 + .5t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1 \quad (11)$$

A partir de (9) con $\mathbf{y}'(0)$ en vez de $\mathbf{x}'(0)$, de (11) con $t = 0$, y de (9), los puntos de control para $\mathbf{y}(t)$ satisfacen

$$3(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0) = \mathbf{y}'(0) = .5\mathbf{x}'(0) = \frac{3}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \quad (12)$$

A partir de (9) con $\mathbf{y}'(1)$ en vez de $\mathbf{x}'(1)$, de (11) con $t = 1$, y de (10),

$$3(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_2) = \mathbf{y}'(1) = .5\mathbf{x}'(.5) = \frac{3}{8}(-\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) \quad (13)$$

Las ecuaciones (8), (9), (10), (12) y (13) se pueden resolver y así generar las fórmulas para $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_3$ que se muestran en el ejercicio 13. Geométricamente, las fórmulas se presentan en la figura 9. Los puntos de control interiores $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{r}_2$ son los puntos medios, respectivamente, del segmento de $\mathbf{p}_0$ a $\mathbf{p}_1$ y el segmento de $\mathbf{p}_2$ a $\mathbf{p}_3$. Cuando el punto medio del segmento de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$ se conecta a $\mathbf{q}_1$, ¡el segmento de recta resultante tiene a $\mathbf{q}_2$ como punto medio!

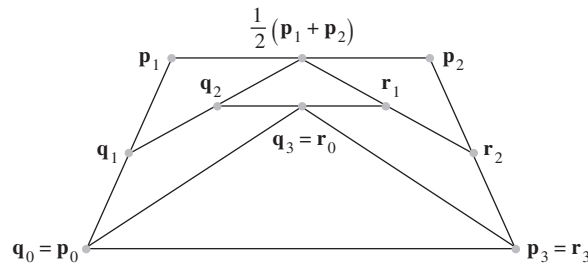


FIGURA 9 Estructura geométrica de los nuevos puntos de control.

Esto completa un paso del proceso de subdivisión. La “recursión” inicia, y las nuevas curvas se subdividen. La recursión continúa a una profundidad en la cual todas las curvas son lo suficientemente rectas. De manera alternativa, en cada paso la recursión puede ser “adaptiva” y no subdividir una de las dos nuevas curvas si esa curva es suficientemente recta. Una vez que la subdivisión se detiene por completo, los puntos extremos de cada curva se unen mediante segmentos de recta, y la escena está lista para el siguiente paso en la preparación de la imagen final.

Una superficie bicúbica de Bézier tiene la misma propiedad de variación-disminución que las curvas de Bézier que forman cada sección transversal de la superficie, de manera que el proceso ya descrito se puede aplicar en cada sección transversal. Omitiendo los detalles, a continuación se presenta la estrategia básica. Considere las cuatro curvas de Bézier “paralelas” cuyo parámetro es s , y aplique el proceso de subdivisión a cada una de ellas. Esto produce cuatro conjuntos de ocho puntos de control; cada conjunto determina una curva conforme s varía de 0 a 1. Sin embargo, al variar t , existen ocho curvas, cada una con cuatro puntos de control. Aplique el proceso de subdivisión a cada uno de esos conjuntos de cuatro puntos, para crear un total de 64 puntos de control. La recursión adaptativa también es posible en este caso, pero hay algunas sutilezas implicadas.²

² Véase Foley, Van Dam, Feiner y Hughes, *Computer Graphics—Principles and Practice*, 2a. ed. (Boston: Addison-Wesley, 1996), pp. 527-528.

PROBLEMAS DE PRÁCTICA[‡]

El término *spline* generalmente se refiere a una curva que pasa por puntos especificados. Sin embargo, una B-spline, normalmente no pasa a través de sus puntos de control. Un solo segmento tiene la forma paramétrica

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{6}[(1-t)^3\mathbf{p}_0 + (3t^3 - 6t^2 + 4)\mathbf{p}_1 + (-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1)\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}_3] \quad (14)$$

para $0 \leq t \leq 1$, donde $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$ son los puntos de control. Cuando t varía de 0 a 1, $\mathbf{x}(t)$ crea una curva corta cercana a $\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$. Álgebra básica indica que la fórmula de B-spline también se puede escribir como

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{6}[(1-t)^3\mathbf{p}_0 + (3t(1-t)^2 - 3t + 4)\mathbf{p}_1 + (3t^2(1-t) + 3t + 1)\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}_3] \quad (15)$$

Esto revela la similitud con la curva de Bézier. Excepto por el factor $1/6$ al frente, los términos $\mathbf{p}_0$ y $\mathbf{p}_3$ son iguales. La componente $\mathbf{p}_1$ se ha incrementado por $-3t + 4$, y la componente $\mathbf{p}_2$ se incrementó por $3t + 1$. Esas componentes hacen más cercana la curva a $\overline{\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2}$ que la curva de Bézier. El factor $1/6$ es necesario para mantener la suma de los coeficientes igual a 1. La figura 10 compara una B-spline con una curva de Bézier que tiene los mismos puntos de control.

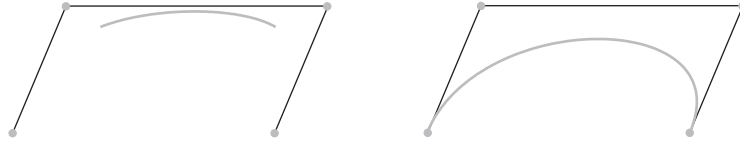


FIGURA 10 Un segmento B-spline y una curva de Bézier.

- 1. Demuestre que la B-spline no inicia en $\mathbf{p}_0$, pero $\mathbf{x}(0)$ está en $\text{conv}\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$. Suponiendo que $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ son afínmente independientes, encuentre las coordenadas afines de $\mathbf{x}(0)$ con respecto a $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$.
- 2. Demuestre que la B-spline no termina en $\mathbf{p}_3$, pero $\mathbf{x}(1)$ está en $\text{conv}\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$. Suponiendo que $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$ son afínmente independientes, encuentre las coordenadas afines de $\mathbf{x}(1)$ con respecto a $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$.

9.6 EJERCICIOS[†]

1. Suponga que una curva de Bézier se traslada a $\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$. Es decir, para $0 \leq t \leq 1$, la nueva curva es

$$\mathbf{x}(t) = (1-t)^3\mathbf{p}_0 + 3t(1-t)^2\mathbf{p}_1 + 3t^2(1-t)\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}_3 + \mathbf{b}$$

Demuestre que esta nueva curva es una vez más una curva de Bézier. [Sugerencia: ¿Dónde están los nuevos puntos de control?]

2. La forma vectorial paramétrica de una curva B-spline se definió en los problemas de práctica como

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{6}[(1-t)^3\mathbf{p}_0 + (3t(1-t)^2 - 3t + 4)\mathbf{p}_1 + (3t^2(1-t) + 3t + 1)\mathbf{p}_2 + t^3\mathbf{p}_3] \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1,$$

donde $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$ son los puntos de control.

- a) Demuestre que para $0 \leq t \leq 1$, $\mathbf{x}(t)$ está en la envolvente convexa de los puntos de control.

- b) Suponga que una curva B-spline $\mathbf{x}(t)$ se traslada a $\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}$ (como en el ejercicio 1). Demuestre que esta nueva curva es una vez más una B-spline.

3. Sea $\mathbf{x}(t)$ una curva de Bézier cúbica determinada por los puntos $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$.

- a) Calcule el vector *tangente* $\mathbf{x}'(t)$. Determine cómo $\mathbf{x}'(0)$ y $\mathbf{x}'(1)$ se relacionan con los puntos de control, y realice descripciones geométricas de las *direcciones* de esos vectores tangentes. ¿Es posible tener $\mathbf{x}'(1) = \mathbf{0}$?
- b) Calcule la segunda derivada $\mathbf{x}''(t)$ y determine cómo $\mathbf{x}''(0)$ y $\mathbf{x}''(1)$ se relacionan con los puntos de control. Dibuje un

esquema basado en la figura 10 y construya un segmento de recta que apunte en la dirección de $\mathbf{x}''(0)$. [Sugerencia: Utilice $\mathbf{p}_1$ como el origen del sistema de coordenadas].

4. Sea $\mathbf{x}(t)$ la B-spline del ejercicio 2, con puntos de control $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$.

a) Calcule el vector tangente $\mathbf{x}'(t)$ y determine cómo las derivadas $\mathbf{x}'(0)$ y $\mathbf{x}'(1)$ se relacionan con los puntos de control. Realice descripciones geométricas de las *direcciones* de esos vectores tangentes. Explore qué pasa cuando $\mathbf{x}'(0)$ y $\mathbf{x}'(1)$ son iguales a $\mathbf{0}$. Justifique sus afirmaciones.

b) Calcule la segunda derivada $\mathbf{x}''(t)$ y encuentre cómo $\mathbf{x}''(0)$ y $\mathbf{x}''(1)$ se relacionan con los puntos de control. Dibuje un esquema basado en la figura 10, y construya un segmento de recta que apunte en la dirección de $\mathbf{x}''(1)$. [Sugerencia: Utilice $\mathbf{p}_2$ como el origen del sistema de coordenadas].

5. Sean $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ curvas de Bézier cúbicas con puntos de control $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ y $\{\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_6\}$, respectivamente, de manera que $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ se unen en $\mathbf{p}_3$. Las siguientes preguntas se refieren a la curva que consiste en $\mathbf{x}(t)$ seguida de $\mathbf{y}(t)$. Para simplificar, suponga que la curva está en $\mathbb{R}^2$.

a) ¿Qué condición sobre los puntos de control garantizará que la curva tenga continuidad C^1 en $\mathbf{p}_3$? Justifique su respuesta.

b) ¿Qué ocurre cuando $\mathbf{x}'(1)$ y $\mathbf{y}'(0)$ son ambos el vector cero?

6. Una B-spline se construye mediante segmentos B-spline, descritos en el ejercicio 2. Sean $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_4$ puntos de control. Para $0 \leq t \leq 1$, sean $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ determinadas por las matrices de geometría $[\mathbf{p}_0 \ \mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3]$ y $[\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3 \ \mathbf{p}_4]$, respectivamente. Observe cómo los dos segmentos comparten tres puntos de control. No hay traslape entre los dos segmentos, sin embargo, se unen en un punto extremo común, cercano a $\mathbf{p}_2$.

a) Demuestre que la curva combinada tiene continuidad G^0 , es decir, $\mathbf{x}(1) = \mathbf{y}(0)$.

b) Demuestre que la curva tiene continuidad C^1 en el punto de unión, $\mathbf{x}(1)$. Es decir, demuestre que $\mathbf{x}'(1) = \mathbf{y}'(0)$.

7. Sean $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ las curvas de Bézier del ejercicio 5, y suponga que la curva combinada tiene continuidad C^2 (que incluye la continuidad C^1) en $\mathbf{p}_3$. Sea $\mathbf{x}''(1) = \mathbf{y}''(0)$ y pruebe que $\mathbf{p}_5$ está completamente determinado por $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$. Así, los puntos $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_3$ y la condición C^2 determinan todos, excepto uno, los puntos de control para $\mathbf{y}(t)$.

8. Sean $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ segmentos de una B-spline como en el ejercicio 6. Demuestre que la curva tiene continuidad C^2 (como también continuidad C^1) en $\mathbf{x}(1)$. Es decir, demuestre que $\mathbf{x}''(1) = \mathbf{y}''(0)$. Esta continuidad de alto orden es deseable en aplicaciones CAD, como en el diseño de carrocerías de automóviles, porque las curvas y superficies aparecen mucho más lisas. Sin embargo, las B-splines requieren tres veces más cálculos que las curvas de Bézier, para curvas de longitud comparable. Para superficies, las B-splines necesitan nueve veces el cálculo de las superficies de Bézier. Con frecuencia, los programadores eligen superficies de Bézier en las aplicaciones (como en los simuladores de vuelo) que requieren generación en tiempo real.

9. Una curva de Bézier cuártica se determina mediante cinco puntos de control, $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ y $\mathbf{p}_4$:

$$\mathbf{x}(t) = (1-t)^4 \mathbf{p}_0 + 4t(1-t)^3 \mathbf{p}_1 + 6t^2(1-t)^2 \mathbf{p}_2 + 4t^3(1-t) \mathbf{p}_3 + t^4 \mathbf{p}_4 \quad \text{for } 0 \leq t \leq 1$$

Construya la matriz base cuártica M_B para $\mathbf{x}(t)$.

10. La “B” en B-spline se refiere al hecho de que un segmento $\mathbf{x}(t)$ se puede escribir en términos de una matriz base, M_S , en una forma similar a una curva de Bézier. Es decir,

$$\mathbf{x}(t) = G M_S \mathbf{u}(t) \quad \text{para } 0 \leq t \leq 1$$

donde G es la matriz de geometría $[\mathbf{p}_0 \ \mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2 \ \mathbf{p}_3]$ y $\mathbf{u}(t)$ es el vector columna $(1, t, t^2, t^3)$. En una B-spline *uniforme*, cada segmento utiliza la misma matriz base, pero cambia la matriz de geometría. Construya la matriz base M_S para $\mathbf{x}(t)$.

En los ejercicios 11 y 12, marque cada enunciado como verdadero o falso. Justifique sus respuestas.

- *11. a) La curva cúbica de Bézier está basada en cuatro puntos de control.
b) Dada una curva de Bézier cuadrática $\mathbf{x}(t)$ con puntos de control $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$, el segmento de recta dirigido $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$ (de $\mathbf{p}_0$ a $\mathbf{p}_1$) es el vector tangente a la curva en $\mathbf{p}_0$.
c) Cuando dos curvas de Bézier cuadráticas con puntos de control $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ y $\{\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4\}$ se unen en $\mathbf{p}_2$, la curva de Bézier combinada tendrá continuidad C^1 en $\mathbf{p}_2$ si $\mathbf{p}_2$ es el punto medio del segmento de recta entre $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_3$.
- *12. a) Las propiedades esenciales de las curvas de Bézier se preservan bajo la acción de transformaciones lineales, pero no traslaciones.
b) Cuando dos curvas de Bézier $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ se unen en el punto donde $\mathbf{x}(1) = \mathbf{y}(0)$, entonces la curva combinada tiene continuidad G^0 en ese punto.
c) La matriz base de Bézier es una matriz cuyas columnas son los puntos de control de la curva.

Los ejercicios 13 a 15 se refieren a la subdivisión de la curva de Bézier que se muestra en la figura 7. Sea $\mathbf{x}(t)$ la curva de Bézier, con puntos de control $\mathbf{p}_0, \dots, \mathbf{p}_3$, y sean $\mathbf{y}(t)$ y $\mathbf{z}(t)$ las curvas de Bézier de subdivisión como en el libro, con puntos de control $\mathbf{q}_0, \dots, \mathbf{q}_3$ y $\mathbf{r}_0, \dots, \mathbf{r}_3$, respectivamente.

13. a) Utilice la ecuación (12) para demostrar que $\mathbf{q}_1$ es el punto medio del segmento de $\mathbf{p}_0$ a $\mathbf{p}_1$.

b) Aplique la ecuación (13) para demostrar que

$$8\mathbf{q}_2 = 8\mathbf{q}_3 + \mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3$$

c) Utilice el inciso b), la ecuación (8) y el inciso a) para demostrar que $\mathbf{q}_2$ es el punto medio del segmento de $\mathbf{q}_1$ al punto medio del segmento de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$. Es decir, $\mathbf{q}_2 = \frac{1}{2}[\mathbf{q}_1 + \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)]$.

14. a) Justifique cada signo de igualdad:

$$3(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) = \mathbf{z}'(1) = .5\mathbf{x}'(1) = \frac{3}{2}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2)$$

- b) Demuestre que $\mathbf{r}_2$ es el punto medio del segmento de $\mathbf{p}_2$ a $\mathbf{p}_3$.
- c) Justifique cada signo de igualdad: $3(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) = \mathbf{z}'(0) = .5\mathbf{x}'(.5)$.
- d) Utilice el inciso c) para demostrar que $8\mathbf{r}_1 = -\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + 8\mathbf{r}_0$.
- e) Use el inciso d), la ecuación (8) y el inciso a) para demostrar que $\mathbf{r}_1$ es el punto medio del segmento de $\mathbf{r}_2$ al punto medio del segmento de $\mathbf{p}_1$ a $\mathbf{p}_2$. Es decir, $\mathbf{r}_1 = \frac{1}{2}[\mathbf{r}_2 + \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)]$.
15. Algunas veces solo se necesita la mitad de una curva de Bézier para subdividir más. Por ejemplo, la subdivisión del lado “izquierdo” se logra con los incisos a) y c) del ejercicio 13 y la ecuación (8). Cuando se dividen ambas mitades de la curva $\mathbf{x}(t)$, es posible organizar los cálculos de manera eficiente para determinar al mismo tiempo los puntos de control izquierdos y derechos, sin emplear la ecuación (8) directamente.
- a) Demuestre que los vectores tangentes $\mathbf{y}'(1)$ y $\mathbf{z}'(0)$ son iguales.
- b) Utilice el inciso a) para demostrar que $\mathbf{q}_3$ (que es igual a $\mathbf{r}_0$) es el punto medio del segmento de $\mathbf{q}_2$ a $\mathbf{r}_1$.
- c) Empleando el inciso b) y los resultados de los ejercicios 13 y 14, escriba un algoritmo que calcule los puntos de control de $\mathbf{y}(t)$ y $\mathbf{z}(t)$ de manera eficiente. Solo se necesitan sumas y división entre 2.
16. Explique por qué una curva cúbica de Bézier está determinada plenamente por $\mathbf{x}(0)$, $\mathbf{x}'(0)$, $\mathbf{x}(1)$ y $\mathbf{x}'(1)$.
17. La simbología TrueType®, creada por Apple Computer y Adobe Systems, utiliza curvas cuadráticas de Bézier, mientras que PostScript®, creado por Microsoft, emplea curvas cúbicas de Bézier. Las curvas cúbicas dan más flexibilidad para el diseño de los tipos de letra, pero es importante para Microsoft que cada letra que utiliza curvas cuadráticas se pueda transformar en una que use curvas cúbicas. Suponga que $\mathbf{w}(t)$ es una curva cuadrática, con puntos de control $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$.
- a) Encuentre puntos de control $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ y $\mathbf{r}_3$ tales que la curva cúbica de Bézier $\mathbf{x}(t)$ con esos puntos de control y con la propiedad de que $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{w}(t)$ tengan los mismos puntos inicial y terminal, así como los mismos vectores tangentes en $t = 0$ y $t = 1$. (Véase el ejercicio 16).
- b) Demuestre que si $\mathbf{x}(t)$ se construye como en el inciso a), entonces $\mathbf{x}(t) = \mathbf{w}(t)$ para $0 \leq t \leq 1$.
18. Utilice la multiplicación matricial particionada para calcular el siguiente producto matricial, que se presenta en la fórmula alternativa (5) para una curva de Bézier:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}$$

SOLUCIONES A LOS PROBLEMAS DE PRÁCTICA

1. De la ecuación (14) con $t = 0$, $\mathbf{x}(0) \neq \mathbf{p}_0$ porque

$$\mathbf{x}(0) = \frac{1}{6}[\mathbf{p}_0 + 4\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2] = \frac{1}{6}\mathbf{p}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{p}_1 + \frac{1}{6}\mathbf{p}_2$$

Los coeficientes son no negativos y suman 1, por lo que $\mathbf{x}(0)$ está en conv $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$, y las coordenadas afines con respecto a $\{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2\}$ son $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$.

2. A partir de la ecuación (14) con $t = 1$, $\mathbf{x}(1) \neq \mathbf{p}_3$ porque

$$\mathbf{x}(1) = \frac{1}{6}[\mathbf{p}_1 + 4\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3] = \frac{1}{6}\mathbf{p}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{p}_2 + \frac{1}{6}\mathbf{p}_3$$

Los coeficientes son no negativos y suman 1, por lo que $\mathbf{x}(1)$ está en conv $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$, y las coordenadas afines con respecto a $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3\}$ son $(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6})$.

AUTOEVALUACIÓN

1. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 6 \\ -38 \\ 18 \end{bmatrix}$. Escriba $\mathbf{y}$ como combinación afín de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.

2. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine si $\mathbf{p} \in \text{gen}(S)$ y si $\mathbf{p} \in \text{aff}(S)$.

3. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$. Determine la ecuación del plano $\text{aff}(S)$.

4. Encuentre las coordenadas baricéntricas del punto $P = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} \\ 2 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, con respecto al conjunto afínmente independiente $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}$.

5. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas para un conjunto $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}$ en $\mathbb{R}^n$?

I: $\{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k - \mathbf{v}_1\}$ es linealmente dependiente si y solo si S es afínmente dependiente.

II: Si S es afínmente independiente y un punto $p \in \mathbb{R}^n$ tiene todas las coordenadas baricéntricas determinadas por S positivas, entonces p no pertenece a $\text{aff}(S)$.

a) I y II

b) Ninguna de las dos

c) II

d) I

6. Considere el conjunto afínmente independiente $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ en $\mathbb{R}^2$. Estos puntos definen una región triangular. Si las coordenadas baricéntricas de un punto p son todas positivas, entonces se puede afirmar que la posición del punto p con respecto al triángulo es:

a) un vértice.

b) un punto afuera del triángulo.

c) un punto de una arista.

d) un punto dentro del triángulo.

7. Sea p un punto en el interior del triángulo Δabc cuyas coordenadas baricéntricas son $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}\right]$. Determine el área de Δpbc con respecto al área Δabc .

8. Sea $S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} : y = x^2 \text{ y } 0 \leq x \right\}$. Dibuje la gráfica de la envolvente convexa de S .

9. Sean $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$, y $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine si p pertenece a la envolvente convexa de S .

10. Si se sabe que $\mathbf{p} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{8}\mathbf{v}_2 + \frac{1}{8}\mathbf{v}_3 + \frac{1}{4}\mathbf{v}_4$ y que $2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_4 = 0$, exprese p como combinación lineal convexa de tres de las $\mathbf{v}_i$.

11. Sean $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$ y $\mathbf{p}_2$ puntos en $\mathbb{R}^n$. Si se define $f_0(t) = (1-t)\mathbf{p}_0 + t\mathbf{p}_1$, $f_1(t) = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2$ y $g(t) = (1-t)f_0(t) + tf_1(t)$ con $0 \leq t \leq 1$, encuentre $g\left(\frac{1}{2}\right)$ en términos de los tres puntos $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ y $\mathbf{p}_3$.

12. Sea H el hiperplano que pasa por los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Encuentre una funcional lineal f y un número real d tal que $H = [f : d]$.

13. Sea H el hiperplano que pasa por los puntos $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$. Determine si el punto $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ se encuentra del mismo lado de H del origen.

14. Considere el conjunto de puntos $S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \frac{1}{x}, x \geq \frac{1}{2} \right\}$. Determine si los conjuntos S y la envolvente convexa son cerrados o no.